綫性規划

王 銘 文

吉林人民出版社

綫性規划

王銘文

吉林人民出版社
1960 长春

线性规划 王銘文

吉林人民出版社出版 （长春市北京大街） 吉林省书刊出版业营业许可証出字第1号

长春新华印刷厂印刷 吉林省新华书店发行

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：$1\frac{1}{8}$ 字数：21,000 印数：1—1,000册

1960年2月第1版 1960年2月第1版第1次印刷

统一书号：13091·23 定价(8)：0.13元

目　次

一 运筹学的一般介紹

运筹学也和其他科学一样是由实际需要而产生的. 在社会生产活动領域里，为了不断提高生产效率，发展生产力，要从两个不同的方面去考虑. 一方面是发現新的物質資源，創造新的技术方法，比如勘探和发現新的矿藏，制造新的机器和改进生产工具等等. 另一方面是在物質資源、設备和技术水平一定的条件下，想办法如何最大限度的发揮現有的人力、物力以达到最高的利用率. 比如在一定数量、質量的机器設备和一定的操作方法的条件下，如何合理的組織工人进行生产，以达到既使工人数目少，又不增强工人劳动强度，而且还能发揮机器的最大使用率，就是这一类的問題. 总之就是怎样运用和筹划的問題. 运筹学就是用数学的方法，研究解决后一方面問題的一門科学. 关于这方面問題的研究，虽然在很久以前就有人开始注意了，但是由于生产力发展水平的限制，使它成为一門比較成熟的科学，还只有一、二十年的历史.

在第二次世界大战时期，在作战中产生了不少象这样的問題：某一国家的空軍数目不多，为了战胜敌人应当怎样有效的使用这些空軍；某一国家的海洋运輸綫常常受敌人潛水艇的威胁，应当怎样使用飞机来最有效地偵察潛水艇；船舶供应很紧张，而軍事物質运輸任务又很重，应当怎样最有效地利用和发掘运輸潛力；昂貴的軍火在大量制造，应当怎样最有效地对軍

火做迅速的质量检查，大规模的輪番轟炸对方，应当怎样使用飛机場和领航調度才最合适等等。为了解决这些問题，不少科学家参加了研究工作，而且得到了一些方法和經驗。战后有些科学家就把这些方法和經驗用到工业、商业、交通运輸业等許多部門中去。經过十几年的研究，从中得到了一些規律，但运算起来是很繁复的。由于統計数学的飞快发展，快速电子計算机日益广泛的被使用，使得既有的理論得到了計算工具，因而运筹学做为一門新的科学产生了。目前在几个社会主义国家里，都有专門从事这方面研究的科学家，而且得到了很多成果。我国虽然过去在这方面的研究基础較差，但自从大跃进以来，在党的科学为政治服务，科学为生产服务的方針指导下，也有了飞速的发展，社会主义制度，給运筹学的发展創造了无比优越的条件。

运筹学被广泛地应用在經济建設的各个不同方面及各种不同問題上，由于所研究問題的性质的区别，运筹学已形成了很多不同的分支。現在仅对运筹学几个分支所研究的問題，做一簡单介紹。

1 綫性規划

我們先从一个例子开始，来說明一下綫性規划所研究的問題。

假定某个机械厂有两台万能式机床 B_1、B_2，加工三种不同的零件 A_1、A_2、A_3，但不同零件在同一机床上的生产速度不相同，所以它的单位成本也不同，并且机床的工作能力是有一定

限度的；假如在一星期内第一台机床只能工作 H_1 机器小时，第二台机床只能工作 H_2 机器小时，并且要求加工的三种零件 A_1、A_2、A_3 的数目，分别不得少于 a_1、a_2、a_3，問在一星期内，把这三种零件如何分配給两台机床加工，使得总的加工費用最低？

为了使得对問題的已知条件有清楚的了解，我們列出下表：

零件 \ 机床	B_1	B_2	加工数目
A_1	h_{11}	h_{21}	$\geqslant a_1$
A_2	h_{12}	h_{22}	$\geqslant a_2$
A_3	h_{13}	h_{23}	$\geqslant a_3$
加工时数	$\leqslant H_1$	$\leqslant H_2$	

表中属于 A_1 行 B_1 列的 h_{11} 表示 B_1 制造 A_1 一个所需的小时数，属于 A_2 行 B_1 列的 h_{12} 表示 B_1 制造 A_2 一个所需的小时数，其他依此类推。

現在把这个問題写成数学形式：

如果用 xij 表示 Bi 生产 Aj 的数目，例如 x_{11} 表示 B_1 生产 A_1 的数目，x_{12} 表示 B_1 生产 A_2 的数目等等。用 Cij 表示 Bi 生产 Aj 一个所需的費用，例如 C_{11} 表示 B_1 生产 A_1 一个所需的費用，C_{12} 表示 B_1 生产 A_2 一个所需的費用等等。則 $hij\ xij$ 表示 Bi 生产 xij 个 Aj 所需要的小时数，而 $Cij\ xij$ 表示 Bi 生产 xij 个 Aj 所需要的費用。按問題的已知条件 xij 应滿

足下列关系式：

$$\left.\begin{array}{l}h_{11}x_{11}+h_{12}x_{12}+h_{13}x_{13}\leqslant H_1\\ h_{21}x_{21}+h_{22}x_{22}+h_{23}x_{23}\leqslant H_2\\ x_{11}+x_{21}\geqslant a_1\\ x_{12}+x_{22}\geqslant a_2\\ x_{13}+x_{23}\geqslant a_3\\ x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}\text{均大于 }0\end{array}\right\}(1)$$

（1）称为問題的約束条件.

按上面的表示法，我們的問題就成为求未知数 xij 在滿足（1）的条件下，而使函数（目标函数）

$$c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$$

的值为最小. 或写为使函数

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}cij\ xij$$

的值为最小.

上面举的例子是一个綫性規划問題，所以称为綫性規划問題是因为目标函数为一次函数，即綫性函数. 現在我們可进一步写出綫性規划問題的一般形式，一般綫性規划問題可归結为：

求一組非負数 $xij(j=1,2,\cdots\cdots m;\ j=1,2,\cdots\cdots,n)$滿足約束条件：

$$\sum_{j=1}^{n}aij\ xij\leqslant bi(\text{或}>bi)(i=1,2,\cdots\cdots m)$$

$$xij\geqslant 0,$$

而使目标函数

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} cij\ xij$$

值为最小. 其中 $cij \geqslant 0$.

2 策略論

关于策略論，我們举一个国防上的例子.

假設我們的一个潜水艇必須通过某一条河道，这条河道有 l 公里长. 这支潜水艇的最大潜水长度（即一次潜水时間所走的长度）小于河道的长度，因此在通过这条河道时，潜水艇必須几次潜出水面. 敌方的飞机在河道的上空来往飞行偵察. 假使我們的潜水艇在飞机偵察的地方潜在水底，它便能够逃走. 当然飞机不会老在一点偵察，它必定时常改变它的偵察地点，以达变化莫測之妙. 問題是我們应該采取怎样的战略，无論敌人飞机采取何种战略，总的說来，使得被偵察到的可能性最小，并且如果是敌方的潜水艇，那末我們的飞机应該在哪些地点进行偵察，使得偵察到敌方潜水艇的可能性最大. 总之就是要求解决問題的最优策略. 解决所有这一类問題的理論就构成了运筹学的一个分支——策略論.

3 排队論

在我們日常生活中，存在着各种各样的排队現象，比如在公共汽車或电車站上常常排着很长一队人等車；机器坏了，送到机器修理厂往往不能立刻修理，而要先挂上号，过一个时期

才能修理，这时机器在修理厂也就排成了队；在紗厂里，常常是一个工人同志照顧好几部机器，在一卷紗繞完了的时候，机器就要工人去换装上一个新的繞筒。也許在繞的时候紗断了，工人还得去接上。这样，当这位工人同志做着一件事情的时候，恰巧另一件事情又发生。这样机器便排着队等人去逐一处理。此外，又如顧客到商店去买东西，或打电話时向交换台叫話等事情上也都有排队現象。

对于这种排队現象，排队論能解决什么問題呢？我們以紗厂工人为例，对于上面提到的机器等人的現象，假如我們只考虑如何使工人工作不閑着，即工人工作时間不浪費，那么我們的办法就可以是使工人尽量的少，使每个工人照顧的机器尽量的多，但这对充分发揮机器效能不利，因为机器等人的时間更要多，如果我們只考虑发揮机器效能，不使它閑着，那么我們的办法是一个工人一台机器最好，但这又太浪費人力。排队論就告訴我們如何在工人工作时間損失和紗机利用时間損失之間求得一个最經济的平衡，确定一个工人照顧几部紗机最合适。

4 質量控制

在工业生产中，保証和提高产品質量，是一件具有头等重要意义的事。保証和提高产品質量的工作包括两个方面：第一是在生产过程完毕后，在已制成的产品中尽量把废品挑出来，使購买者得到的产品，在質量上达到一个較高的水平。第二是在生产过程中，及时检查生产进行是否正常，預防废品发生，以提高产品合格率。第一方面的工作叫做驗收检查，主要是通过

抽样检查的方法来做，第二方面的工作叫做工序检查。首先談談什么是抽样检查。

当我們买一种物品时，总希望物品的质量是合乎规格的，为此我們对物品常常要試一試。但当我們所要买的貨物是很多的时候，比如象百貨公司向工厂取貨，取的是成千上万的貨，这时由于种种原因，有时不能一一检查。有的貨物只有把它破坏了才能知道它的质量好坏，比如检查砖块的抗压强度时，当用試驗机驗得它的抗压强度时，砖块已被压碎，因此不能一个一个检查。也有的貨物虽然一个一个检查是可能的，但由于检查时所用費用太大，比如需要貴重的精密仪器及很多检查人員不值得因而也不能百分之百的进行检查。所以一般来說，在现代大生产的工业中，对于产品质量的检查，由于产品的大量及检查中的破坏性，多数用抽样检查的方法。

抽样检查是从整批的产品当中抽出一部分来，由这一部分产品的好坏去决定整批产品的好坏。假如已知整批产品的数目为N，决定从中抽出n个，看这里面有多少个坏的，假若坏的数目小于或等于一个数目c，就認为这整批产品可以留下，相反地，若这数目大于c，就不要。确定了n和c，也就确定了检查方式，n和c决定的是否合理，直接影响到抽样检查的結果接近产品实际质量的程度。

检查方式，即n和c是怎样确定的呢？这与很多条件有关，比如同一产品在过去一段时間里的废品率与生产者和消費者的各种不同要求等等有关，只凭經驗和惯例去决定n和c是不可靠的。对于这样問題，抽样检查的理論将給我們以科学的

結論.

其次再談談什么是質量控制.

工厂里按同一規格要求生产出来的大量产品，絕不会是完全相同的，它們的質量之間总多少要有点差别，規格里的公差制度就是承認这个事实的表示。比如制造一种軸承，讓它的内径尺寸是 35 mm，但实际制造出来的軸承内径尺寸不会都是 35mm，于是我們要求制造出来的軸承内径尺寸能在 35±0.25 mm的范围內就可以。也就是說，对要达到的基本尺寸35mm允許有0.25mm的偏差，所謂公差尺寸就是指35mm+0.25mm同 35mm—0.25mm 之間的差异 0.5mm。当然产品的公差愈小，它的質量就愈好.

假如生产出来的产品質量变动很大，那么不滿足規格要求的废品便会多，在經过检查把废品全部挑选出去以后，剩下的合格品里，剛剛达到規格的，必然也很多，因此就全部合格品来說，它們的質量也是不高的。若是半成品，把它們送到下个工序或装配車間去，就会产生許多困难。因此如何通过制造过程的检查，尽量减小公差、防止废品出現，就成为非常必要的了。怎样才能减少質量的变化呢？首先我們应当搞淸楚質量的变动究竟是怎样发生的.

产品質量的变动有两类：一类是不能避免的变动，另一类是可以避免的变动。造成第一类变动的原因是些經常作用着的影响小的因素，对于这些因素我們不仅不易通过分析研究确定它們，即使能确定，也不易加以控制，如气流或气温，这些因素統称为不能确定的因素。造成后一类变动的原因是某一时发

生的比較突出的因素，对于这些因素，我們通过分析研究可以确定，如制造产品时的原材料換了一批新材料以后往往产品質量就要产生变动，这些因素統称为可以确定的因素。

若在产品制造中，造成質量变动的原因只是第一类的，则这种产品質量变动是有規律的。从理論及經驗得知在这种情况下質量变动是最小的变动．这种制造过程叫稳定的制造过程。質量控制的目的是：使产品制造过程为稳定的，就是把第一类变动原因同第二类变动原因分开，然后再把后者除掉。因此我們能够做到，不仅对已經制造出来的产品質量，有了判断的标准，而且对于在制造的以及将要制造的产品質量，都可有預言的能力。

5 存儲及棄旧換新問題

首先談談存儲問題。

設想我們要在某机床上，制造某复杂的成品或半成品，在制造之前，要考虑这样一个問題：在安装好制造这些成品或半成品的机器后，一次应該生产多少产品才合适？就安装費观点而言，一次的产量愈多愈好，如果产量过少，单位产品的費用要增加，有时甚至于发生缺貨現象，而造成缺貨损失。但另一方面，如果一次产量过多，则需要大仓庫存放，因之存儲費增加。因此一次生产量应使各种費用的总期望值达到最小。下面我們举一个最簡单的例子。

某制造厂，每年須将其某种产品24,000个供給顧客，这种需求是完全固定的。又产品供应給顧客系用流水作业法，而顧

客又无貯藏产品的地方，因此厂方必須将每日的需要当天供应，缺貨的情况是絕对不允許的．一单位产品每月的存儲費是0.10元，而每一制造循环的安装费是350元，因此，問題在于求每个制造循环中最好生产产品的数量，与其相应的最优制造循环程序的周期最小总期望費用．

其次談談弃旧换新問題．

弃旧换新的理論，是研究关于换新設备（例如机器之类）时各种费用的预测以及如何决定最合算的换新政策等問題的．

大多数設备，其工作效率，因机器寿命之增长而逐渐減低，因而設备的运轉費及修理費等設备維持費要逐漸增加，这就要考虑这样的問題，是继續使用旧設备呢？还是放弃旧設备而装上全新的設备．新設备的購置需要一笔大量的資金，因此弃旧换新在什么时期进行才使得在經济上最合算？有时当要换新設备时，新設备有数种可换，它的价值寿命长短等等都不相同，在这种情况下，又换哪一种在經济上最合算？这类問題就是弃旧换新理論中的主要研究内容，下面举一个簡单的例子．

設想有某机器已旧，想要换新机器，新机器有甲、乙两种，机器甲和机器乙在一个三年期間之内每年的費用列如次表

年初的費用(單位元)

年份	机器甲	机器乙
1	900	1400
2	600	100
3	700	700
总計	2200	2200

折算价格（利率10%，單位元）

年份	机器甲	机器乙
1	900.00	1400.00
2	545.00	90.91
3	578.52	578.52
总計	2023.97	2069.43
差額	45.46	

对每一机器而言，三年内的总費用都是2200元，但机器乙第一年所費較多，同时如将投資的利息計算在內，它比机器甲就要花費多些。第一年多花費的500元，虽可在第二年省回来，但以10%的利率計算在第二年初机器甲只需投資455元，第二年即可得500元。因此，甲乙两机器虽說在三年內总費相同，但事实上，如計算投資的利息，甲机器要比乙机器节省45.46元。

以上是对运筹学几个分支的簡单介紹，提到的很不全面，运筹学并非就是这些，比如还有預卜論，訊息論等等。不同分支所研究的問題不同，但它們有共同点，就是都属于运用和筹划的范围，即研究在資源固定情况下，如何运用这些資源，使它发揮最大效能及在任务給定情况下，如何使用最少的資源来完成这些任务。

以下着重介紹一下，一种綫性规划問題的两个解法。

二 物資調运問題的表上作业法

1 物資調运問題

首先說明一下什么是物資調运問題。

設有一种物資，它有三个产地 A_1、A_2、A_3，产量各为5、5、10，它有四个銷地 B_1、B_2、B_3、B_4，銷量各为3、4、6、7，产銷平衡，即5+5+10=3+4+6+7=20。假定由各产地到各銷地的单位运价为已知，試寻求一种調运方案，使得总的运費最省。这类問題的一般形式可叙述如下：

設有一种物資，它有m个产地 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots Am$，产量各为$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_m$，它有$n$个銷地 $B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots, Bn$，銷量各为 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, bn$。假定产銷平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m} ai=\sum_{j=1}^{n} bj$$

問題是寻求一种調运物資的方案，使得总的运費最省。

假設从 Ai 到 Bj 的单位运价是 Cij .从 Ai 运到 Bj 的物資是 xij 单位．那末問題就是求一組非負数 xij 使滿足約束条件

$$\sum_{j=1}^{n} xij=ai \quad (i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} xij=bj \quad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

而函数

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

值最小。

凡能表示成上面数学形式的綫性規划問題，叫做康脱洛維奇問題。

現在我們用表上作业法来給出这个問題的解答．运用表上作业法时，首先要列出調运物資的产銷平衡表和运价表，比如前面举的例子的平衡表及运价表如下：

平　衡　表

产地＼銷地	B_1	B_2	B_3	B_4	产　量
A_1					5
A_2					5
A_3					10
銷　量	3	4	6	7	20

运　價　表

产＼單位运价＼銷	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	5	6	7
A_2	8	2	7	6
A_3	9	3	4	8