日本高中数学課本

第三册

〔日本〕 河口商次等編

北京景山学校譯

（內部发行）

人民教育出版社

日本高中数学課本

第三册

〔日本〕 河口商次等編
北京景山学校譯

人民教育出版社

本书是日本教育出版株式会社1959年出版的“标准高校数学”(河口商次等編)第三册的譯本. 这套課本是供日本高等学校(相当于我国高級中学)教学用的. 第三册內容包括数列和級数, 微分和它的应用, 积分和它的应用, 排列和組合, 概率和統計. 本书系內部参考資料, 供研究外国中学数学教学情况用.

日本高中数学課本

第三册

〔日本〕 河口商次等編

北京景山学校譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华书店北京发行所发行

全国新华书店經售

人民教育印刷厂印装

統一书号：13012・69 字数：160千

开本：850×1168毫米 1/32 印張：7

1965年5月第一版

1965年8月第一次印刷

北京：1—3,150册

定价 1.10 元

(內部发行)

前　言

在数学課本第一册和第二册里，我們已經知道，在学习数学时，用各种不同方法考虑問題和論证地考虑問題是多么重要而且有用了．同时又知道了数、式子和图形之間存在着密切的关系，无論代数知識还是几何知識，都是在同一种思維方法的基础上建立了体系的．还充分理解了不但代数学需要几何学知識，而且几何学也离不开代数学知識．

但是，仅仅知道这些，对于推进数学以至推进科学的发展是不够的．有許多事物，或者是不断改变着它的表現形式，或者是只从个别現象来看，虽然看不出它的性质和規律，但是作为整体来看，却可以发現各种性质和規律．

为了充分地研究和理解这些事物，就必須充分研究变化的状态或者整体的情况．为了研究这些，就需要有这样的数学：能够明确地表現变化的量的变化状态和整体的情况的，并且更加深入地进行科学論证的数学．

現在让我們在数学第一册、数学第二册中学过的知識和观点的基础上，进一步来学习更高一級的数学，充分理解建立关于变化着的現象和整体的状态的理論体系的方法，并且养成合理地考虑問題和处理問題的习慣．

編写这本課本，除了以指导要領为根据以外，还以以下几点作为重要的目标．

1. 不受旧数学的拘束，而用新的数学思想为基础，貫串着进步的数学概念，經常循着数学的正軌前进，以减少进一步学习高等数学的困难．

2. 不是直观的数学，而是建立在邏輯系統上的数学，但是却容易理解.

3. 使学生很有兴趣地主动地学习.

4. 有助于研究需要用到数学的最新的科学.

通过这本課本的学习，让我們更好地运用数和式子以及图形之間的密切关系，以更确切地表現事物和科学地研究事物；同时更深入地理解代数知識和几何知識都是在同一种思維方法的基础建立了体系的，并且把所学的这些运用到实际生活中去，再进一步加以发展.

原著者

目　次

第1章　数列和級数

第2章　微分和它的应用

第3章　积分和它的应用

第4章　排列和組合

第5章　概率和統計

第 1 章　数列和級数

§1. 等差数列和等比数列

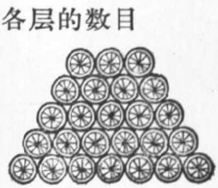
1. 数列和它的通項

我們常常会見到一些順次排成一列的数字．例如，順次排列着的奇数

$$1、3、5、7、9、11、\cdots \qquad (1)$$

或者像 1-1 图那样堆叠着的米袋从下到上的各层的数目

$$7、6、5、4、3 \qquad (2)$$



1-1 图

又或者像存款 1 万日元，按年利率 6 分的复利計算，經 1 年、2 年、3 年、4 年后的本利和(单位万日元)

$$1.06、1.06^2、1.06^3、1.06^4 \qquad (3)$$

这些都是按簡单的規律排列着的数．此外，还有像按点名册的名字順序記录的学生身长表(厘米以下的四舍五入)

$$157、160、158、161、160、157、159、\cdots \qquad (4)$$

这种数，要是不直接考察每一项，就不知道第几項究竟是多少．研究这些数的排列規律以及它們的总和等，是非常重要的．

上面所說的排列着的数，叫做**数列**，各个数分别叫做**項**．

表示某个項是从头数起第几个的数字，叫做**項数**．从头数起，各項分别叫做**第 1 項**(或者**初項**)、**第 2 項**、**第 3 項**、……，如果有最后的項，就叫做**末項**．有末項的数列，叫做**有穷数列**；沒有末項，它的項能无限延續的数列，叫做**无穷数列**．

一个数列中，从开头数到第 n 个的項，也就是第 n 項，叫做这个数列的**通項**．

上面(1)、(2)、(3)三个数列，可以用 n 的簡单的式子表示出通項．

这就是，(1)的通項是 $2n-1$，(2)的是 $8-n$，(3)的是 1.06^n．但是数列(4)，虽然通項也是 n 的函数，但是如果不直接考察，就不能知道各項是多少．

下面，我們不涉及(4)那样的数列．

問 1. 下列各式是数列的通項，写出初項到第 5 項．

① $2n+1$　　② $3-\frac{n}{2}$　　③ n^3

④ $\frac{n}{n+1}$　　⑤ 2^{n-1}　　⑥ $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

問 2. 用 n 的函数表示出下列数列的通項．

① 2、4、6、8、…　　② 2、4、8、16、…

③ $\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{6}$、$\frac{7}{8}$、…　　④ $\frac{1}{1\times 2}$、$\frac{1}{2\times 3}$、$\frac{1}{3\times 4}$、$\frac{1}{4\times 5}$、…

⑤ 1、−1、1、−1、…

問 3. 写出問 2 各数列的第 7 項和第 10 項．

2. 等差数列和它的总和

前节的数列(1)，也就是奇数的数列

$$1、3、5、7、9、\cdots$$

它的第 2 項、第 3 項、……分别是前一項加 2 而成的．

像这样，从一个項减去前一項的差总相等的数列，叫做**等差数列**. 这个一定的差、叫做**公差**.

問 1. 从下列数列中，指出等差数列，并分别說出它的公差.

① 2、5、8、11、…　　② 1、2、4、8、…

③ 4、3、2、1、…　　④ 10、0、−10、−20、…

⑤ $(-1)^3$、0^3、1^3、2^3、…　　⑥ $\frac{1}{2}$、2、$\frac{7}{2}$、5、…

初項是 a、公差是 d 的等差数列，因为初項、第 2 項、第 3 項、第 4 項、……分别是

$$a、a+d、a+2d、a+3d、\cdots$$

所以一般可以用：

$$\boxed{a+(n-1)d}$$

来表示通項，也就是第 n 項.

注意 a、a、a、…也可以看成是公差 d 等于 0 的等差数列.

例 1. 某人現有 1000 日元，他打算从第二天起每天积蓄一定金額，使一个月后(第 31 天)成为 10000 日元，每天应积蓄多少？

解： 設每天积蓄的錢是 d 日元，因为第 1 天是 1000 日元，第 2 天是 $(1000+d)$ 日元，第 3 天是 $(1000+2d)$ 日元，……，所以第 31 天是 $(1000+30d)$ 日元，因此，

$$1000+30d=10000, \text{ 得 } d=300$$

答： 300 日元

問 2. 回答下列等差数列的問題.

① 初項是 5，公差是 −3 时，求第 15 項.

② 初項是 3，公差是 4 时，47 是第几項？

③ 第 5 項是 −21，公差是 −6 时，初項是多少？

問 3. 說出下列等差数列的□里的适当数值：

① 2、□、1、$\frac{1}{2}$、…

② a、$3(a+b)$、□、$7a+9b$、□、…

a、x、b 成等差数列时，x 叫做 a、b 的**等差中項**.

問 4. x 是 a、b 的等差中項时，試用 a、b 表示出 x.

为了研究各种数列，需要馬上知道某一項是第几項.

因此，有穷数列用

$$a_1、a_2、a_3、\cdots、a_n \text{ 或者 } \{a_i\}_{i=1、2、3、\cdots、n}$$

来表示. 无穷数列用

$$a_1、a_2、a_3、\cdots、a_n、\cdots$$

或者 $$\{a_i\}_{i=1、2、3、\cdots、n、\cdots}$$

来表示. a_i 的 i，也可以写成 j 或者 k.

这时，a 后面所带的小字 1、2、3、…、n、…叫做 a 的**足碼**，它是表示这个項的項数的. 因此，a_n 就是第 n 項.

使用上述符号，初項是 a，公差是 d 的等差数列的通項可以写成

$$a_n=a+(n-1)d$$

从这个式子可以知道，在公差不是 0 时，

"a_n 是关于 n 的一次函数."

反过来，通項 a_n 是关于 n 的一次函数的数列是不是等差数列呢？为了研究这个問題，可以看一看，通項 a_n 是

$$an+b \ (a\neq 0, b \text{ 是常数})$$

的数列，从 a_n 减去 a_{n-1} 的結果.

因为 a_{n-1} 就是用 $n-1$ 代替 a_n 式子中的 n，所以得

$$a_{n-1}=a(n-1)+b$$

因此，就成为 $a_n-a_{n-1}=a$. 因为差一定，所以这个数列是等差

数列.

为了求有穷等差数列的总和，首先来考虑最簡单的等差数列，求从1到n的自然数列

1、2、3、4、5、…、n （初項1，公差1，項数n）

的总和.

到第10項为止的总和是

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

跟这样直接計算相比，如果像右面那样計算，馬上就能得出答案.

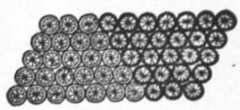
$$\begin{array}{r} 1+\ 2+\ 3+\ 4+5 \\ 10+\ 9+\ 8+\ 7+\ 6 \\ \hline 10+10+10+10+10+5=55 \end{array}$$

現在来考慮怎样求从1到n的总和. 設法使相加时，它們的得数相同，可得

$$\begin{array}{rl} S= & 1+2+3+\cdots+(n-1)+n \\ S= & n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \\ \hline 2S= & (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)=n(n+1) \end{array}$$

所以，$S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

在德川时代，日本的数学，也曾經像右图那样考慮，求出前节的米袋的数目，計算出



1-2 图

$$S=\frac{5(7+3)}{2}=25$$

这个办法，能够应用于求一般等差数列的总和.

設初項是a，公差是d，項数是n的等差数列的总和是S_n，那么

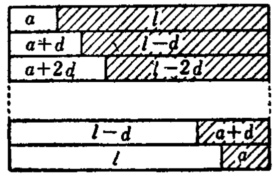
$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\{a+(n-1)d\}$$

求S_n时，設末項是l，

$$
\begin{array}{l}
S_n = \quad a \quad +(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \\
S_n = \quad l \quad +(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \\
\hline
2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)=n(a+l)
\end{array}
$$

所以

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$



1-3 图

因此，用 a、l、n 或者用 a、d、n，可以得出下列两个公式：

$$\boxed{S_n=\frac{n(a+l)}{2}, \quad S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}}$$

問 5. 求奇数列 1、3、5、7、⋯ 到第 100 項为止的总和. 又到第 n 項的总和是怎样的？

問 6. 等差数列的各項是 a_1、a_2、⋯、a_n 时，設 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

① $S_{15}=600$，公差 $d=5$ 时，求 a_{11}.

② $a_{59}=70$，$a_{66}=84$ 时，求 a_{100}.

例 2. 如果每月月初存款 3000 日元，一年后的本利和是多少？（按月利率 5 厘的单利計算）

解： 最初存入的 3000 日元到 1 年后本利和 a_1 日元是

$$a_1=3000(1+0.005\times 12)$$

第二个月月初存入的 3000 日元的本利和 a_2 日元是

$$a_2=3000(1+0.005\times 11)$$

这样，以后存入时，本利和每次递减 $3000\times 0.005=15$（日元），所以，它們的本利和的总和能够用

初項 $a=3000(1+0.005\times 12)$，公差 $d=-15$

的等差数列的总和来表示.

因为末項 $l=3000(1+0.005)$，把它代入公式

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

得

$$S_{12}=\frac{12\times3000(2+0.005\times13)}{2}=37170$$

答：37170 日元

問 7. 如果按第 1 天 1 日元、第 2 天 2 日元、第 3 天 3 日元，这样，每天比前一天多积蓄 1 日元，問第多少天的积蓄总額是 1 万日元？

例 3. 数列的从初項到第 n 項的总和 S_n，能够用关于 n 的二次式 an^2+bn+c 表示时，这个数列是不是等差数列？

解： 設这个数列是 a_1、a_2、a_3、…、a_n、….

（i）設 $n=1$，那么 a_1 就等于 $S_n=an^2+bn+c$ 在 $n=1$ 时的值，即

$$a_1=S_1=a+b+c$$

（ii）設 $n\geqq2$，因为

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$$

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

所以这个数列的第 n 項 a_n 是

$$S_n-S_{n-1}=a_n$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}=a(2n-1)+b=2an+b-a$$

所以第 2 項以下的数列是等差数列，公差是 $2a$.

（iii）根据(i)、(ii)，这个数列就成为

$$a+b+c、3a+b、5a+b、\cdots、2an+b-a、\cdots$$

因此，$c=0$ 时，这个数列是初項是 $a+b$，公差是 $2a$ 的等差数列.

$c\neq 0$ 时，第 2 项以下是等差数列，第 1 项 $a_1=a+b+c$ 不屬于这个数列.

問 8. 比較 $S_n=\frac{n}{2}\{2a_1+(n-1)d\}$ 与 $S_n=an^2+bn+c$，試用另外的方法来解例 3.

問 9. 在 $y=mx+n$(m、n 是常数)中，如果順次以成等差数列的值代入 x，試证明 y 的值也成等差数列.

3. 等比数列和它的总和

从数列

$$1、2、4、8、16、\cdots$$

来看，初项是 1，第 2 项是它的 2 倍，第 3 项又是第 2 项的 2 倍，以后各项也都是前一项的 2 倍.

像这样，开始用某一定值乘某数，以后順次用同一个定值乘所得的数，所得的这种数列，叫做**等比数列**，这个一定值叫做**公比**.

上面数列的公比是 2.

問 1. 下列数列中，哪些是等比数列？并說出它的公比：

① $10、5、0、-5、\cdots$　　② $3、6、12、24、\cdots$

③ $8、-4、2、-1、\cdots$　　④ $1、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{1}{4}、\cdots$

⑤ $1、\frac{1}{2}、\frac{1}{4}、\frac{1}{8}、\cdots$　　⑥ $1、-1、1、-1、\cdots$

問 2. 求問 1 的等比数列的第 5 项和第 10 项.

一般地說，初项是 a，公比是 r 的等比数列，可以用 r 順次乘 a，得出

$$a、ar、ar^2、ar^3、\cdots$$

因此，通项 a_n 是

$$\boxed{a_n=ar^{n-1}}$$

注意 要注意 a_n 不是 ar^n.

例 1. 求三个数 a、b、c 成等比数列的必要而充分的条件.(但 $b\neq0$)

解: (i) 先求必要条件.

設 a、b、c 成等比数列,它的公比是 r,那么

$$a,\qquad b=ar,\qquad c=ar^2$$

所以

$$b^2=(ar)^2,\qquad ac=a\cdot ar^2=(ar)^2$$

因此

$$b^2=ac$$

(ii) 反过来說,如果 $b^2=ac$,那么根据 $b\neq0$,可知 $a\neq0$,所以

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=r\ (r\ \text{是一定的数})$$

因此,

$$a,\qquad b=ar,\qquad c=br=ar^2$$

即 a、b、c 成等比数列,所以 $b^2=ac$ 是充分条件.

因此,所求条件是 $b^2=ac$.

a、b、c 成等比数列时,b 叫做 a、c 的**等比中項**.

問 3. 求下列等比数列的第 7 項及通項:

① $1、-2、4、\cdots$　　② $\frac{1}{2^3}、\frac{1}{2^2}、\frac{1}{2}、\cdots$

③ $16.2、5.4、1.8、\cdots$　　④ $0.5、3、18、\cdots$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}、-2、\frac{8}{\sqrt{2}}、\cdots$　　⑥ $1、-1、1、\cdots$

現在来研究怎样求出,初項是 a、公比是 r 的等比数列的到第 n 項的总和

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \tag{1}$$

如果注意到各項都是前一項的 r 倍，把(1)的两边 r 倍起来，就得到

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \tag{2}$$

因为第(2)式右边的前 $n-1$ 項与第 (1) 式右边的后 $n-1$ 項相同，所以为了消去它們，可以从(1)的两边分别减去(2)的两边，得出

$$(1-r)S_n=a-ar^n$$

在 $r\neq1$ 时，就得到

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{3}$$

这就求出了总和.

在 $r=1$ 时，(1)成为

$$S_n=a+a+\cdots+a=na$$

因此下述公式能够成立.

如果 $r\neq1$，那么 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$
如果 $r=1$，那么 $S_n=na$

例 2. 如果按第一天存 1 日元、第 2 天存 2 日元、第 3 天存 4 日元. 这样，每天积存的錢数是前一天的 2 倍，那么：

(1) 第 10 天存多少？在这 10 天里，积存的总金額是多少？

(2) 第 30 天存多少？在这 30 天里，积存的总金額是多少？

解: (1) 因为每天所存的錢数是初項是 1，公比是 2 的等比数列，所以第 10 天所存的是

$$1\times2^9=512(\text{日元})$$

根据总和的公式，积存的总金額是

$$S_{10}=\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1=1023(\text{日元})$$

(2) 跟(1)相同，所存的金額与总金額，分别是

$$(1\times 2^{29})\text{日元},\quad (2^{30}-1)\text{日元}$$

要求出它們的值，可以把 2 自乘 29 次，也可以这样求：

$$2^9=512 \text{ 乘以 } 2^{20}=(2^{10})^2=(1024)^2=1048576$$

答：所存的金額是 536870912 日元

积存的总金額是 1073741823 日元

注意 与前节的問 7 比較起来，在成等比数列时，結果大得惊人．在(2)的計算中，如果用对数来概算，很为簡便．

問 4. 用对数表进行例 2 的概算．

問 5. 分别求下列等比数列的(　)里的适当的数：

① $1、-2、4、\cdots(S_6)$　　② $\frac{1}{2^3}、\frac{1}{2^2}、\frac{1}{2}、\cdots(S_7)$

③ $4、4\sqrt{3}、12、\cdots(S_8)$　　④ $1\frac{1}{2}、4\frac{1}{2}、13\frac{1}{2}、\cdots(S_7)$

⑤ $0.5、0.25、0.125、\cdots(S_6)$

4. 年金和按年分期付款

像养老金、邮政年金和按年分期付款等，都是按年支取或者支付一定金額．

年金分为一定期間的，永久的和到死亡为止的各种，这里要讲的不包括到死亡为止的不定期年金．

年金中，根据开始支付的时間，分为在訂契約时立即开始支付第一次的**即付年金**，和訂契約一定时間以后，才支付第一次的**期付年金**．又根据在期初或期末支付，分为**期初支付年金**和**期末支付年金**．

下面，应用等比数列来計算各种年金．

I 現价

設銀行的定期存款(期間一年)的年利率是 6 分．現在假定存