初 等 数 学

上 册

湖南省工科院校《初等数学》编写组编

1973年6月

前　言

这本《初等数学》是为适应我省工科院校工农兵学员补课需要而编写的，分代数、平面几何、平面三角和解析几何四编。初步估计各编所需学时为：代数100；平面几何44；平面三角50；解析几何30。附录没有包括在所估计的学时中。带“*”号的内容供有关专业选用。为了加强针对性，可根据补课时间的长短，学员的文化基础和各专业的不同要求取舍内容，调整学时。对其中的习题（带“*”号的是难度较大的题目），也可根据不同情况，适当增减。

由于我们水平有限，时间仓促，教育革命的经验不足，教材中存在的问题一定很多，恳求广大教师和学员提出意见，以便进一步修改。

湖南省工科院校《初等数学》编写组

1973年6月

目　　录

第一篇　代　数

第一章　正负数及其运算

第二章　整　式

第三章　一次方程

第四章　因式分解和分式

第五章　根　式

第六章　一元二次方程

第七章　不等式

第八章　指数与对数

*第九章 数 列

附录：一次方程组与行列式

第二篇 平面几何

第一章 基本知识

第二章 三角形

第三章 四边形

第一编　代　　数

第一章　正负数及其运算

毛主席教导我们：**“理论的基础是实践，又转过来为实践服务。”**在算术中我们已学习了整数和分数(都是大于零的)。但只有这些数还远不能满足实践的需要。例如长沙冬季某天中午气温是$4^{\circ}C$，到半夜时气温下降了$8^{\circ}C$，问半夜气温是多少？显然半夜气温为零下$4^{\circ}C$。一个是零上$4^{\circ}C$，另一个是零下$4^{\circ}C$，不能都用算术中的正数4来表示，那如何用数来表示这种具有相反意义的量呢？故要求我们对于数的认识有进一步的发展。本章研究正负数及其运算规律，就是要解决这些问题。

§1—1　正负数中的一些概念

一　正数和负数

“矛盾是普遍地存在着”。在三大革命实践中，存在着大量互相矛盾的、具有相反意义的量。例如

水位上升40毫米与下降40毫米；40, -40

某生产队增产粮食5000斤与减产5000斤；+5000 , -5000

汽车向东开5公里与向西开5公里；+5， -5,

等等。为了表示这种相反意义的量，我们把其中一种意义的量

（通常是零上、上升、增产等等）规定为正的，而把与它相反意义的量（通常是零下、下降、减产等等）规定为负的。正的量用算术里学过的数（除零外）前面添“+”（读作正）号来表示，负的量就用算术里学过的数(除零外)前面添“-”（读作负）号来表示。例如

零上 $4^\circ C$ 记作 $+4^\circ C$，零下 $4^\circ C$ 记作 $-4^\circ C$；

上升 40 毫米记作 +40毫米，下降 40 毫米记作 -40毫米；等等。

数字前面带有“+”号的数叫**正数**，如

$$+4、\ +0.12、\ +\frac{1}{2}、\ +3\frac{4}{5}、\ +5000,$$

数字前面带有“-”号的数叫**负数**，如

$$-4、\ -0.12、\ -\frac{1}{2}、\ -3\frac{4}{5}、\ -5000.$$

为了简便起见，正数前面的“+”号可以省略不写。如

$$+4、\ +0.12、\ +\frac{1}{2}\ 可写成\ 4、\ 0.12、\ \frac{1}{2}.$$

应当注意，零既不是正数，也不是负数，而是正数与负数的分界数。例如温度零度用数“0”表示，但这不是没有温度，而是表示在通常情况下水结成冰时的一个确定的温度。

列宁在说明矛盾的普遍性时曾指出：**“正和负是数学中的一对矛盾。”**没有正，也无所谓负，相反地，没有负，也无所谓正，它们是对立的统一。同时要看到，一个量是正还是负，总是相对地根据“正”的意义的规定而定的。例如汽车向东开 5 公里。如果规定向东开是“正”，那末向东开 5 公里为 +5 公里。如果规定向西开是“正”，则向东开 5 公里为 -5 公里。所以同一个量根据不同的规定，可以用正数表示，也可以用负

数表示。

二　数轴、绝对值

恩格斯指出：**“数和形的概念不是从任何地方得来，而仅仅是从现实世界中得来的。”** 在日常生活中，人们用直尺上的刻度表示长短；用秤杆上的刻度表示轻重；用温度计上的刻度表示温度的高低；等等。我们把一个温度计如图 1—1—1 那样横放，可以看到：温度计以零度为界，零度右边刻度表示的温度是正的，即零上温度。零度左边刻度表示的温度是负的，即零下温度。

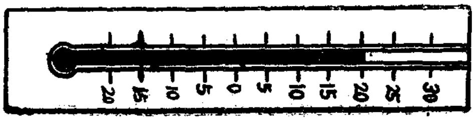

图 1—1—1

这种实践经验告诉我们，在一定条件下，可以用直线上的刻度来表示所有的正数、负数和零。从而直观地帮助我们研究正负数的有关问题。

任意划一条直线，规定从左到右的方向为正方向（如图 1—1—2箭头所示），在这条直线上任意取一点 O，表示零，这点叫做原点，再任意取一定长线段作长度单位。

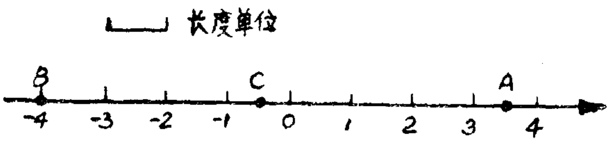

图 1—1—2

规定了方向、原点和长度单位的直线，叫做数轴。建立了数轴后，我们就能使任意一个正负数用数轴上的点来表示。如从

原点 O 起向右截取一个单位长度，终点就表示 $+1$；截取二个单位长度，终点就表示$+2$；继续下去可以依次得到表示$+3$、$+4$、……的点。同样，从原点 O 起向左顺次截取，可得表示 -1、-2、-3、…… 的点。对于分数，如 $3\frac{1}{2}$，可先从原点 O 起向右截取 3 个单位长度，得到表示 3 的点，再继续向右截取$\frac{1}{2}$单位长度，即得表示 $3\frac{1}{2}$的点。这样，所有正数、负数、零都可以用数轴上的点表示，得到了正负数的图形表示法。反之，数轴上的每一个点，也都表示一个正数、负数或零。如图 1—1—2 中，A、B、C、D 分别表示 $3\frac{1}{2}$、-4、 $\frac{1}{2}$、2.

例 1 在数轴上画出表示下列各数的点：

$$3、1\frac{1}{2}、-2.5、-3、-1\frac{1}{2}.$$

解 如图 1—1—3

A 表示 3，它与原点 O 的距离是 3 个长度单位；B 表示 $1\frac{1}{2}$，它与原点 O 的距离是 1 个半长度单位；C 表示 -2.5，它与原点 O 的距离是 2 个半长度单位；D 表示-3，它与原点 O 的距离是 3 个长度单位；E 表示 $-1\frac{1}{2}$，它与原点 O 的距离是 1 个半长度单位。

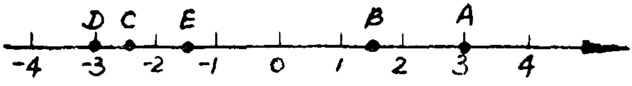

图 1—1—3

在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离叫做这个数的绝对值。一个数的绝对值用在这个数的两旁各画一条竖线表示。如上例，3 与 -3 的绝对值都是 3，记作 $|3|=3$，$|-3|=3$，同理，$\left|1\frac{1}{2}\right|=1\frac{1}{2}$、$\left|-1\frac{1}{2}\right|=1\frac{1}{2}$、$|-2.5|=2.5$。0 的绝对值还是 0，即 $|0|=0$。因此得到

正数的绝对值等于这个数本身；负数的绝对值等于去掉这个数的“$-$”号所得的正数；零的绝对值还是零。总之，除零以外，任何正负数的绝对值都是正数。

两个绝对值相等而符号相反的数，互称为相反数。如上例中的 3 和 -3，$1\frac{1}{2}$ 和 $-1\frac{1}{2}$ 都是互为相反数。显然，在数轴上，互为相反的两个数是与原点等距离的，这也叫做对原点是对称的。

三　正负数大小的比较

温度计上的刻度，越往上表示温度越高，越往下表示温度越低。由此可知数轴上正负数大小的比较是：

一个数轴上的点越往右，它所表示的数就越大，越往左，它所表示的数就越小。因此，正数大于零；正数和零大于负数；两个负数，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大。

例 2 比较下列各对数的大小：

(1) 0.001 与 -1000；　　(2) -0.9 与 -0.99；

(3) $-\frac{3}{4}$ 与 $-\frac{2}{3}$.

解 (1) $\because$ 0.001 是正数（“$\because$”读作“因为”）-1000 是负数，$\therefore$ 0.001 大于 -1000（“$\therefore$”读作“所以”），记作：

$0.001>-1000$（“$>$”读作“大于”）

(2) $\because$ $|-0.9|=0.9$, $|-0.99|=0.99$,

而 $0.9<0.99$（“<”读作“小于”），也就是说

$$|-0.9|<|-0.99|, \quad \therefore \quad -0.9>-0.99.$$

(3) $\because$ $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$,

而 $\frac{9}{12}>\frac{8}{12}$, 即 $\left|-\frac{3}{4}\right|>\left|-\frac{2}{3}\right|$, $\therefore$ $-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}$.

例 3 用数轴上的点分别表示绝对值是4.5和1的各数，并且把它们从小到大用“<”号连接起来。

解 绝对值是4.5的数有4.5和-4.5；绝对值是1的数有1和-1。图1—1—4中的A、B、C、D分别表示4.5、-4.5、1、-1。

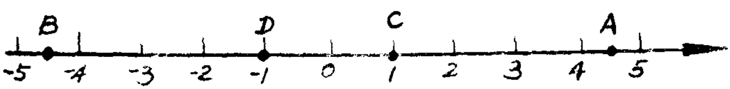

图 1—1—4

$$\therefore \quad -4.5<-1<1<4.5$$

§1—2 正负数的加减法

一 正负数的加法

根据正数的加法减法与正负数大小比较法则。很容易得到正负数的加法法则：

同号两数相加，绝对值相加，和的符号不变；

异号两数相加，绝对值相减（大的减小的），和的符号与绝对值大的数的符号一致。

此外，任何数和零相加还是它自己；两个互为相反数（简称互

反数）的和等于零。

例 1 计算：

(1) $\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$；(2) $(-13.5)+(-1.27)$；

(3) $3\frac{5}{7}+\left(-\frac{3}{4}\right)$；(4) $(-6.318)+2\frac{3}{4}$；

(5) $\left(-3\frac{5}{18}\right)+0$；(6) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$.

解 (1) $\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)=+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$.

(2) $(-13.5)+(-1.27)=-(13.5+1.27)$

$=-14.77$.

(3) $3\frac{5}{7}+\left(-\frac{3}{4}\right)=3\frac{5}{7}-\frac{3}{4}=2\frac{48}{28}-\frac{21}{28}=2\frac{27}{28}$.

(4) $(-6.318)+2\frac{3}{4}=-\left(6.318-2\frac{3}{4}\right)$

$=-(6.318-2.75)=-3.568$.

(5) $\left(-3\frac{5}{18}\right)+0=-3\frac{5}{18}$.

(6) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=0$.

容易看出正负数的加法满足下面运算规律：

(1) 加法交换律：被加数与加数的位置可以交换，其和不变。

一般地，用字母 a、b 代表任意数（正数、负数或零），有

$$a+b=b+a,$$

例如　$(-18)+(+15)=(+15)+(-18)$.

(2) 加法结合律：三个数相加，可以先把前两个数相加或者先把后两个数相加，它们的和是相等的。

用字母 a、b、c 表示任意数，有

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

例如　$[(-14)+(-7)]+(+4)=(-14)+[(-7)+(+4)]$

利用加法运算规律，有时可使加法运算化为简单。

例 2　计算：

(1)　$(-8)+(+5)+(-4)+(+7)+(-3)$;

(2)　$(+0.65)+(-1.9)+(-0.1)+(-0.65)$;

(3)　$\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+5\frac{1}{2}\right)+(+6)+\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$.

解　(1)　$(-8)+(+5)+(-4)+(+7)+(-3)$

$$=[(-8)+(-4)+(-3)]+[(+5)+(+7)]$$

$$=(-15)+(+12)=-3.$$

(2)　$(+0.65)+(-1.9)+(-0.1)+(-0.65)$

$$=[(+0.65)+(-0.65)]+[(-1.9)+(-0.1)]$$

$$=0+(-2)=-2.$$

(3)　$\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+5\frac{1}{2}\right)+(+6)+\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$

$$=\left[\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)\right]+\left[\left(+5\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$+(+6)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)+(+3)+(+6)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)+(+9)=8\frac{2}{3}.$$

由此例看出，利用加法运算规律先把符号相同的数或互反

数或分母相同的数结合在一起，然后再相加，计算较简便。

二 正负数的减法

根据正负数的加法法则及减法是加法的逆运算得正负数的减法法则：

减去一个数等于加上这个数的相反数。

用字母表示：

$$a-(+b)=a+(-b),$$
$$a-(-b)=a+(+b).$$

例 3 计算：

(1) $(+8)-\left(-\frac{1}{3}\right)$； (2) $\left(-\frac{7}{10}\right)-\left(+\frac{3}{5}\right)$；

(3) $(-0.47)-\left(-3\frac{47}{50}\right)$.

解 (1) $(+8)-\left(-\frac{1}{3}\right)=8+\frac{1}{3}=8\frac{1}{3}$.

(2) $\left(-\frac{7}{10}\right)-\left(+\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{7}{10}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$

$=\left(-\frac{7}{10}\right)+\left(-\frac{6}{10}\right)=-\frac{13}{10}=-1\frac{3}{10}$.

(3) $(-0.47)-\left(-3\frac{47}{50}\right)=(-0.47)+3\frac{47}{50}$

$=(-0.47)+3.94=3.47$.

三 加减法混合运算、代数和

毛主席教导我们：**“在一定的条件下，矛盾的东西能够统一起来，又能够互相转化。”**加法与减法是一对矛盾，但引入正负数后，在每一个数都有相反数的条件下，减法可以转化为加法，从而使加减法统一于加法。

例 4 计算：

$$(-20)-(+5)+(+3)-(-7).$$

解 $$(-20)-(+5)+(+3)-(-7)$$
$$=(-20)+(-5)+(+3)+(+7)$$
$$=(-25)+(+10)=-15.$$

几个正负数（也可以是零）的和叫做代数和。

以后凡遇正负数加减混合运算时，都是先转化成代数和，再按加法进行运算。

在代数和里，因为所有运算都是加法，所以通常把加号连同括号及第一个加数的正号都省略不写。例如

$$(-20)+(-5)+(+3)+(+7)$$
$$=-20-5+3+7.$$

这样得到的式子，叫做省略加号的代数和。其中符号“+”“-”表示数的正负号，即看成性质符号，故把“$-20-5+3+7$”读作“负20、负5、正3、正7的和”或“负20、负5、加正3、加正7”。但人们常按习惯把“$-20-5+3+7$”读作“负20减5、加3、加7”即将式中的“+”“-”号（除第1个加数的符号外）看成运算符号，这与理解为“负20、负5、正3、正7的和”是一致的。

例 5 把下列各题写成省略加号的代数和，并计算：

(1) $(+9)-(+10)+(-2)-(-8)$;

(2) $(+1.4)-(-1.2)-(+2.5)+(-3.6)$;

(3) $\left(-2\frac{1}{2}\right)-\left(+3\frac{1}{4}\right)+\left(+1\frac{1}{2}\right)-\left(-4\frac{3}{4}\right)$.

解 (1) $$(+9)-(+10)+(-2)-(-8)$$
$$=(+9)+(-10)+(-2)+(+8)$$
$$=9-10-2+8=17-12=5.$$

(2) $$(+1.4)-(-1.2)-(+2.5)+(-3.6)$$

$=(+1.4)+(+1.2)+(-2.5)+(-3.6)$

$=1.4+1.2-2.5-3.6=2.6-6.1=-3.5$。

(3) $\left(-2\frac{1}{2}\right)-\left(+3\frac{1}{4}\right)+\left(+1\frac{1}{2}\right)-\left(-4\frac{3}{4}\right)$

$=\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(+1\frac{1}{2}\right)+\left(+4\frac{3}{4}\right)$

$=-2\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}$

$=\left(-2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\right)+\left(4\frac{3}{4}-3\frac{1}{4}\right)$

$=-1+1\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

通过上例可看出把加减混合运算直接改写为省略加号的代数和的符号法则为：

$+(+a)=+a \qquad +(-a)=-a$

$-(-a)=+a \qquad -(+a)=-a$

利用这个法则可使正负数的加减混合运算大大简化。

例 6 计算：

(1) $(-3)+(+4)-(+2.5)-(-1.2)$；

(2) $\left(-1\frac{1}{4}\right)-\left(+5\frac{1}{4}\right)-\left(-8\frac{1}{3}\right).$

解 (1) $(-3)+(+4)-(+2.5)-(1.2)$

$=-3+4-2.5+1.2$

$=-5.5+5.2=-0.3.$

(2) $\left(-1\frac{1}{4}\right)-\left(+5\frac{1}{4}\right)-\left(-8\frac{1}{3}\right)$

$=-1\frac{1}{4}-5\frac{1}{4}+8\frac{1}{3}=-6\frac{1}{2}+8\frac{1}{3}$