

中国奥赛新教程

ZHONG GUO AO SAI XIN JIAO CHENG

数学大考卷



九年级 初三

奥赛训练技巧研究室编

中国和平出版社

中国奥赛新教程 (修订版)

数 学

大 考 卷

九 年 级

(初三)

丛书主编：曾鹤鸣

本册主编：曾建强

_____ 学校 _____ 年级 _____ 班组

姓名 _____ 学号 _____

中国和平出版社

中国奥赛新教程——数学大考卷(九年级)

奥赛训练技巧研究室 编

* *

中国和平出版社出版发行

(北京市西城区百万庄大街 8 号 100037)

电话: 88375626 88377258 (欣)

北京密云胶印厂印刷 新华书店经销

2003 年 7 月第 1 版 2003 年 10 月第 2 次印刷

787×1092 1/16 9 印张

ISBN7-80154-848-5/O·26 定价: 60.00 (共六册)

《中国奥赛新教程》编委会

主 编：曾鹤鸣

副主编：顾庆元

编 委：汪 军 周 延 李 键 万金陵
刘诗权 施 建 管 元 肖连奇
黄德明 罗继远 尤 可 赖晗之
曾 文 王 忠

(以上排名不分先后)



前言

“奥林匹克”本是世界规模最大及规格最高的体育竞赛运动会的名称,后被教育界借用为数理化等学科领域高水平的考试竞赛名目,参加者主要由各地教育部门逐级选拔或推荐而来,一般都是各学校在某学科方面成绩特别优秀的学生,作为参加者来说,这本身就是一种不凡的荣誉。奥林匹克学科竞赛十分注重参加者的创造性与独立思维,加上考题本身的构思巧妙与趣味,因此,不仅对于参赛学生有指导意义,同时对于广大的中小学生在推进素质教育,提高有关学科的学习能力与创新意识方面也大有裨益。所以此活动在我国举办以来,就一直受到广大师生的欢迎,引起了他们的极大兴趣。而每届获得优秀名次者,基本都会被全国重点大学(如北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学等)提前录取,这样就更激发了学生们的参与热情。同时,这项活动的开展也得到了广大家长的积极支持。毫无疑问,组织编写这么一套专门应对“奥赛”的新颖而别致的教学辅导练习教材,是一件十分必要且有实际意义的教育工作。

鉴于奥林匹克学科竞赛的特色与要求,也为了便于使用者参加国际比赛与交流,这套奥林匹克练习教材主要围绕数学、物理、化学三门学科设计。此外,既考虑循序渐进的教学规律,又着眼自然科学水平的提高,和有必要“从娃娃抓起”,所以这套练习教材设计为小学、初中两个大类,共二十册(教材、练习各半)。具体划分为:

1. 小学共八册,皆为数学,从三年级开始,至六年级,每年级二册,一为教材,二为练习。

2. 初中共十二册,其中初一(即七年级)单设数学一门学科,两册(含教材、练习各一);初二(即八年级)设数学、物理两学科,四册(含教材、练习各二);初三(即九年级)设数学、物理、化学三门学科,六册(含教材、练习各三)。

各练习册主要提供精心设计的多组合、多层次的若干套系统的综合练习题库,并附部分有较大参考价值的国内外相关考卷;各教材则偏重在国家统编教材水平上的提高、加强与适当延伸,目的在于培养学生的创造性与发散性思维。

本套练习教材编撰阵营强大而权威。全套书由中国目标教学专业委员会常务理事、硕士研究生导师曾鹤鸣先生担任主编。其他各册编写者,分别由有关重点学校及教研机构的各学科既有教学成就,同时又有奥林匹克学科竞赛指导经验的教师与研究人员担任。为了确保整套书的质量,从一开始的编写纲目与内容设计,到具体的每册书的编写定稿,均请国内著名的奥林匹克学科竞赛指导专家担任编审。这一切都给本套书增色不少,在此特向他们表示衷心感谢。

为了拓宽大家的思路与眼界,本套书的各册之后,还附录了近几年有较大参考价值的部分国内外“奥赛”考卷,现一并向资料的提供者以诚挚的谢意。

鉴于本书的水平和编辑质量,我们完全有理由相信,这套书将一定会受到广大读者的喜爱,本书将陪伴广大师生一道充满信心地去迎接各类“奥赛”的挑战,等待他们的将是频频飞来的捷报!

本书由曾建强、刘佳香、李俊德、肖锋、肖以光、张功萍、官运和、贺江编写,由曾建强统稿、修改。

2003年7月



目 录

单元测试题

试卷 / 答案

一、一元二次方程的根	(1) / (76)
二、一元二次方程的特殊根	(4) / (77)
三、特殊方程(组)的解	(7) / (79)
四、二次函数	(10) / (81)
五、一元二次方程(不等式)与二次函数	(14) / (82)
六、函数应用	(17) / (86)
七、整数问题	(21) / (89)
八、高斯函数 $[x]$	(24) / (91)
九、不定方程与组合数学	(26) / (93)
十、解三角形	(29) / (95)
十一、三角形的四心	(32) / (99)
十二、圆与四点共圆	(35) / (101)
十三、几何计算	(39) / (104)
十四、反证法与整体方法	(43) / (106)
十五、构造法与分类讨论	(46) / (108)
十六、信息分析	(49) / (112)

综合测评

综合训练(一)	(54) / (115)
综合训练(二)	(56) / (116)
综合训练(三)	(57) / (118)
综合训练(四)	(59) / (120)
综合训练(五)	(61) / (121)
综合训练(六)	(63) / (123)
综合训练(七)	(64) / (125)
综合训练(八)	(65) / (127)
综合训练(九)	(67) / (129)
综合训练(十)	(68) / (131)

附 2000~2002 年全国初中数学联赛试题	(70) / (133)
-------------------------------	--------------

参考答案与提示	(75)
---------------	------



单元测试题

一、一元二次方程的根



【A卷】

一、选择题

1. 方程 $2(m+1)x+1=(|m|-1)x^2$ 只有一个实数根, 则().

- (A) $m=0$ (B) $m=-1$ (C) $m=1$ (D) $m=-\frac{1}{2}$

2. 若 $0 < a < 1$, 则方程 $|x^2 - 4x + 3| = a$ 的解的个数是().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 已知方程 $2x^2 + kx - 2k + 1 = 0$ 的两实根的平方和是 $7\frac{1}{4}$, 则 k 的值是().

- (A) 3 (B) -11 (C) 3 或 -11 (D) 11

4. 方程 $(1987x)^2 - 1986 \cdot 1988x - 1 = 0$ 的较大根是 α , 方程 $x^2 + 1986x - 1987 = 0$ 的较小根是 β , 则 $\alpha - \beta$ 等于().

- (A) $\frac{1}{1988}$ (B) $\frac{1987}{1988}$ (C) 1988 (D) 0

5. 已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根的和是 p , 平方和是 q , 立方和是 r , 则 $ar + bq + cp$ 等于().

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

6. 如果关于 x 的方程 $6x^2 - 8x + 2k - 1 = 0$ 没有实数根, 则 k 能取的最小整数值是().

- (A) -1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

1. 方程 $x^2 - 501x + k = 0$ 的一个根加上 3 即为另一根的 125 倍, 则 $k =$ _____.

2. 如果方程 $x^2 + px + 1 = 0$ 与方程 $x^2 - x - p = 0$ 有且仅有一个公共根, 则 $p =$ _____.

3. 已知 $6x^2 + x = 12$, 那么 $36x^4 + 12x^3 - 71x^2 - 12x + 1 =$ _____.

4. 已知: 方程 $2x^2 - 5x - 6 = 0$ 的两根为 α, β , 则 $2\beta^2 + 7\alpha + 2\beta =$ _____.



三. 解答题

1. 若关于 x 的方程 $x^2 - (m-5)x - 3m^2 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 满足 $|\frac{x_1}{x_2}| = \frac{3}{4}$, 求 m 的值.

2. 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2 - (2a-3)x + a = 0$ 有实数根.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是方程 $(a-1)x^2 - (3-2a)x + a = 0$ 的两个根, 且 $x_1^2 + x_2^2 = 9$, 求 a 的值.



[B卷]

一. 选择题

1. 如果方程 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的两个根是 $a, \frac{1}{a}$, 则方程 $x + \frac{1}{x-1} = a + \frac{1}{a-1}$ 的根是().

(A) $a, \frac{1}{a-1}$ (B) $\frac{1}{a-1}, a-1$ (C) $\frac{1}{a}, a-1$ (D) $a, \frac{a}{a-1}$

2. 若分式 $\frac{1}{x^2 - 2x + m}$ 不论 m 取何实数总有意义, 则 m 的取值范围是().

(A) $m \geq 1$ (B) $m > 1$ (C) $m \leq 1$ (D) $m < 1$

3. 已知 $a+b=5$, 那么 $a^3 + 15ab + b^3$ 的值是().

(A) 5 (B) 25 (C) 75 (D) 125

4. 已知一直角三角形的三边长为 a, b, c , $\angle B = 90^\circ$, 那么关于 x 的方程 $a(x^2 - 1) - 2cx + b(x^2 + 1) = 0$ 的根的情况为().

(A) 有两个相等的实数根 (B) 有两个不相等的实数根

(C) 没有实数根 (D) 无法确定

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 9x + m = 0$ 的一个根是另一个根的 2 倍, 则 m 的值为().

(A) $m \leq \frac{11}{8}$ (B) $9 \leq m \leq \frac{81}{8}$ (C) $m = 9$ (D) $m = -9$ 或 $m = 9$

6. 设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根是 x_1, x_2 , 给出下列等式:



$$(1) x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a};$$

$$(2) |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|};$$

$$(3) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{b}{c} = 0;$$

$$(4) ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

则其中成立的个数是().

(A) 1个

(B) 2个

(C) 3个

(D) 4个

二. 填空题

1. 如果二次三项式 $3x^2 - 4x + 2k$ 在实数范围内总能分解成两个一次因式的乘积, 则 k 的取值范围是_____.

2. 已知方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是原方程各根的倒数, 则这个一元二次方程是_____.

3. 若 $2x^2 - 5x + \frac{8}{2x^2 - 5x + 1} - 5 = 0$, 则 $2x^2 - 5x - 1$ 的值为_____.

4. 已知 x_1 和 x_2 为一元二次方程 $2x^2 - 2x + 3m - 1 = 0$ 的两个实根, 并且 x_1 和 x_2 满足不等式 $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 - 4} < 1$, 则实数 m 的取值范围为_____.

三. 解答题

1. 已知方程 $x^2 + px + m = 0$ 的两根是 a, b , 方程 $x^2 + px + n = 0$ 的两根是 c, d . 求证: $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) = (m-n)^2$.

2. 整系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的判别式记为 Δ , 试问能否选择到适当的整数 a, b, c , 使 $\Delta = 18$?

3. a, b, h 中至少有一个不为零, 证明: 方程 $x^2 - (a+b)x + ab - h^2 = 0$ 必有实根, 且至少有一个根不为零.



一元二次方程的特殊根



[A卷]

一. 选择题

1. 方程 $x^2 + (m+1)x + m - 7 = 0$ 有两个负根, 则 m 的取值范围是().
(A) $m > -1$ (B) $m > 7$ (C) $m \geq 4\sqrt{2}$ (D) $m \leq -4\sqrt{2}$
2. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 6x + 9 = 0$ 与 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 的根都是整数, 则 m 的值是().
(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 2
3. 方程 $x^2 + 2mx - 1 = 0$ 与方程 $x^2 + (m+3)x - 4 = 0$ 有一公共整数根, 则 $m =$ ().
(A) $\frac{24}{7}$ (B) 0 (C) 1 (D) -1
4. 方程 $x^2 + px + 1997 = 0$ 恰有二正整数根 x_1, x_2 , 则 $\frac{p}{(x_1+1)(x_2+1)}$ 的值为().
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) 1
5. 已知方程 $x^2 + (m+1)x + 2m - 1 = 0$ 的两个根都是整数, 则 m 的整数值是().
(A) -1 或 -3 (B) -3 (C) 1 (D) 1 或 5
6. 方程 $(x-a)(x-8) = 1$ 有两个整数根, 则 a 的值为().
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

二. 填空题

1. 使方程 $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ 的两根都是整数的所有正数 a 的和为_____.
2. 使方程 $(a+1)x^2 - (a^2+1)x + 2a^3 - 6 = 0$ 有整数根的所有整数 a 的值为_____.
3. 已知方程 $a^2x^2 - (3a^2 - 8a)x + (2a^2 - 13a + 15) = 0$ (其中 a 是非负整数) 至少有一个正整数根, 那么 $a =$ _____.
4. n 为正整数, 方程 $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}n - 6 = 0$ 有一个整数根, 则 $n =$ _____.

三. 解答题

1. 设 a, b, c 为一钝角三角形的三边, 且 b 最长, 证明: 二次方程 $ax^2 - \sqrt{2}bx + c = 0$ 有相异两实根.



2. 求 k , 使方程 $x^2 - 4mx + 4x + 3m^2 - 2m + 4k = 0$ 的根是关于 m 的有理式.



【B卷】

一. 选择题

1. 已知 $a \neq 0$, 关于 x 的方程 $ax^2 + bx - \frac{a}{4} = 0$ 的根的情况是().

- (A) 有两个负实数根 (B) 无实数根
(C) 有一个正实数根和一个负实数根 (D) 有两个正实数根

2. 解某一元二次方程, 甲抄错一次项, 得根为 -2 和 -3 , 乙抄错常数项, 得根为 6 或 -1 , 则正确的方程是().

- (A) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (B) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (C) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (D) $x^2 - 5x - 6 = 0$

3. 已知方程 $x^2 + kx + 6 = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 , 同时方程 $x^2 - kx + 6 = 0$ 的两实根为 $x_1 + 5, x_2 + 5$, 则整数 k 的值等于().

- (A) 5 (B) -5 (C) 7 (D) -7

4. 方程 $x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ 有两负根, 则 m 的取值范围是().

- (A) $m \leq -1$ 或 $m \geq 3$ (B) $m > -\frac{3}{2}$
(C) $-\frac{3}{2} < m < 0$ (D) $-\frac{3}{2} < m \leq -1$

5. 设 $4 < m < 40$, 方程 $x^2 - 4mx + 6x + 4m^2 - 14m + 8 = 0$ 有二整数根, 则 m 的值为().

- (A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 12 或 24

6. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 4x + 4 = 0$ 与方程 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 的根都是整数, 则 m 的值为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$



三、特殊方程(组)的解

[A卷]

一、选择题

- 方程 $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根有()个.
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 若 x 满足 $x^4 + (x-4)^4 = 626$, 则 $x-2$ 的值为().
 (A) -33 (B) 9 (C) ± 3 (D) 3
- 实数对 (x, y) 满足 $xy + x + y = -13$, 且 $x^2 + y^2 = 29$. 下列实数对 $(2, -5)$ 、 $(-5, 2)$ 、 $(\frac{1+\sqrt{57}}{2}, \frac{1-\sqrt{57}}{2})$ 、 $(1-\sqrt{57}, 1-\sqrt{57})$ 中有()对不满足已知条件.
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 方程 $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}}$ 的根().
 (A) 不存在 (B) 等于 2 (C) 大于等于 2 (D) 小于等于 2

二、填空题

- 方程 $\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} = \frac{10}{3} (\frac{x}{3} - \frac{4}{x})$ 的正整数根是_____.
- 设 x_1, x_2 为方程 $4x^2 + x + 2x\sqrt{3x^2 + x} = 9$ 的两个根, 则 $x_1 + x_2$ 等于_____.
- 如果 $|x-2| - 3|x+1| = 2x-9$, 那么 $2001x - 666$ 的值为_____.
- 已知 $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, 则 $x+y+z$ 的值是_____.

三、解答题

- 解方程组 $\begin{cases} x+y+z = \sqrt{x+y+z+1} + 5 & \dots\dots ① \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} & \dots\dots ② \end{cases}$



2. 求满足条件 $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$ 的实数 x, y .



[B卷]

一. 选择题

1. 方程 $\sqrt{x+4}-4\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}=0$ 是().

- (A) 无解 (B) 有解 (C) 不一定有解 (D) 可能无解

2. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x^3+y^3=468, \\ x^2y+xy^2=420, \end{cases}$ 则 xy 的值为().

- (A) 12 (B) 5 (C) 7 (D) 35

3. 满足条件 $5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}=2$ 的 x 的整数个数有().

- (A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 3个

4. 方程 $x^2+4x+4=2\sqrt{x^3+5x^2+8x+4}$ 的解为().

- (A) 0或2 (B) 0或-2 (C) ± 2 (D) 0

5. x, y 是方程 $x+y=x^2-xy+y^2+1$ 的实数解, 则函数 $f(t)=t^2-2xt+2001y$ 的最小值为().

- (A) 1999 (B) 2000 (C) 2001 (D) 2002

6. 方程 $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{3x-2}}=\frac{10}{3}$ 的一个根是().

- (A) $\frac{26}{17}$ (B) $-\frac{26}{17}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $-\frac{7}{6}$

二. 填空题

1. 方程 $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ 所有根之和为_____.

2. 满足 $\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}=\frac{2x^2+3x+1}{2x^2-3x+1}$ 的 x 的值为_____.

3. 方程 $\frac{x-7}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}=\sqrt{x-3}$ 有_____个根.



4. 已知方程 $\sqrt{3x^2-4x+34} + \sqrt{3x^2-4x-11} = 9$ 有且只有两个根, 则这两根之积为 _____.

三. 解答题

1. 已知 a 为给定常数, 且 $a \geq -6$, 解方程 $x^4 - 10x^3 - 2(a-11)x^2 + 2(5a+6)x + 2a + a^2 = 0$.

2. 已知 $\begin{cases} 2000(x-y) + 2001(y-z) + 2002(z-x) = 0, \\ 2000^2(x-y) + 2001^2(y-z) + 2002^2(z-x) = 2001. \end{cases}$ 求 $z-y$ 的值.

3. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$



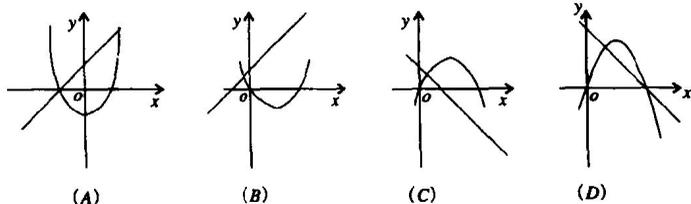
四、二次函数



【A卷】

一、选择题

1. $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$ ($ab \neq 0$) 的图像只可能是().



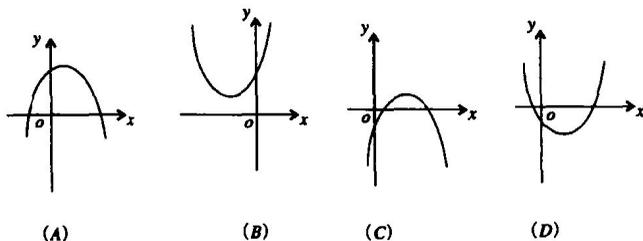
2. 若 $y=x^2+px+q$, 且 y 的最小值是零, 则 q 等于().

- (A) 0 (B) $\frac{1}{4}p^2$ (C) $\frac{1}{2}p$ (D) $-\frac{1}{4}p^2$

3. 二次函数 $y=-x^2-6x+k$ 的图像的顶点在 x 轴上, 则 k 的值为().

- (A) -9 (B) 9 (C) 3 (D) -3

4. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$, 如果 $a>b>c$, 且 $a+b+c=0$, 则它的图像可能是().



5. 已知函数 $y=(m-1)x^2-mx-m$ 的图像如图 4-3, 则 m 的取值范围是().

- (A) $m < \frac{4}{5}$ (B) $0 < m < \frac{4}{5}$
(C) $m < 1$ (D) $0 < m < 1$

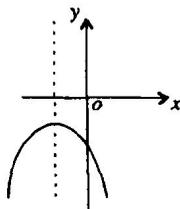


图 4-3

6. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像(如图 4-4)的对称轴是 $x=1$, 有下列结论:

- (1) $a < 0, b > 0$ (2) $2a+b=0$
(3) $a+b+c > 0$ (4) $4a+2b+c=0$

其中正确结论的个数是().

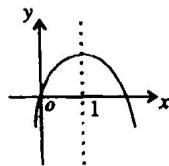


图 4-4



- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

二. 填空题

1. 若点 $A(a, 5)$ 在函数 $y=x^2-x-1$ 的图像上, 则 $a=$ _____.

2. 二次函数的图像经过点 $(1, 10)$, 顶点坐标为 $(-1, -2)$, 此二次函数的解析式为_____.

3. 设 x, y 为实数, 则 $x^2+xy+y^2-x-2y+5$ 的最小值为_____.

4. 已知 x, y 为实数, 且 $3x^2+2y^2=6x$, 则 x^2+y^2 的最大值为_____.

三. 解答题

1. 在条件 $x+y+z=1, x-5y+2z=16, 3y+z=5a$ 下, 试确定 a 取什么整数时, 可以使 $w=x^2+y^2+z^2$ 取得最小值? 并求这个最小值.

2. 如图 4-5, 二次函数 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 的图像与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B (点 B 在点 A 的右侧), 与 y 轴交于 $C(0, 2)$.

- (1) 请说明 a, b, c 的乘积是正数还是负数;
 (2) 若 $\angle OCA = \angle CBO$, 求这个二次函数的解析式.

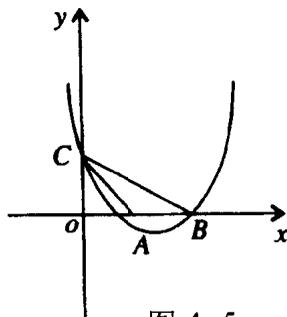


图 4-5



[B 卷]

一. 选择题

1. 抛物线 $y=x^2+2mx+m-7$ 与 x 轴的两个交点在点 $(1, 0)$ 两旁, 则关于 x 的方程 $\frac{1}{4}x^2+(m+1)x+m^2+5=0$ 的根的情况是().