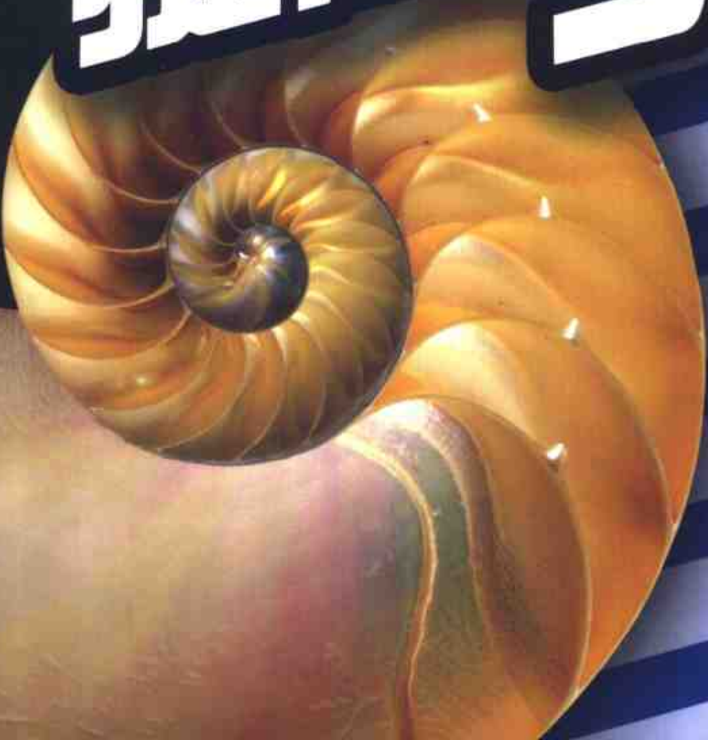
二年级（上）

SHUXUE TIGAO SHOUCE

新编初中课内课外

数学提高手册



浙江少年儿童出版社

新编初中课内课外
数学提高手册

二年级(上)

叶天碧　主编
徐萍萍　副主编

浙江少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编初中课内课外数学提高手册. 二年级. 上/叶天碧主编. --杭州：浙江少年儿童出版社，2003.11
ISBN 7-5342-2948-0

Ⅰ. 新…　Ⅱ. 叶…　Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 078966 号

责任编辑　沈晓莉
美术编辑　吴　珩
封面设计　阿　恒

新编初中课内课外数学提高手册

二年级（上）

叶天碧/主编　徐萍萍/副主编

浙江少年儿童出版社出版发行
(杭州体育场路 347 号)
杭州钱江彩色印务有限公司印刷　　全国各地新华书店经销
开本 710×1000　1/16　印张 12.25　字数 194000
印数 1—6350
2003 年 11 月第 1 版　　2003 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 7—5342—2948—0/G·1601　定价：10.00 元

前　　言

根据教育发展的新形势、新特点，课堂教学也有了新的要求，即从以往内容比较单薄，例题的类型比较陈旧，大多数习题和练习题重在巩固知识，转为以能力立意，并带有选拔性，这与中考要求及选拔人材的角度相适应。如今的中考，不是在知识的难度上区分学生，而是在能力要求上区分学生。因此对于学有余力的学生来说，光学完课本的知识显然是不够的，对于课内的内容要加以充实，在课外的时间要加以提高。

《新编初中课内课外数学提高手册》重在"提高"，这在所有的初中数学辅导读物中是很少见的。这套与现行初中数学教材同步编写的辅导读物，不但注重数学的基础知识、基本技能、基本方法，还注重数学能力的培养和数学思想方法的渗透，确实是教材的补充和提高。

参加编写本书的作者都是长期从事教学实践并有着丰富教学经验的特级教师和骨干教师，他们具有较强的基础理论和专业知识水平。在编写每一单元的教学内容时，都考虑到以下五个方面：

一、【学习目标】主要是对这个单元知识目标、方法目标、能力目标作出具体要求，尤其重在思维的训练。

二、【攻克重难点】是诠释各单元的重点和难点问题，帮助学生逾越障碍，突破难关。这部分列举了许多典型的例题，有的例题还进行引申、拓宽、变形，融入许多课堂内不曾涉及的内容，揭示了一些有规律性的东西，以启迪学生的思维，变技巧为素质。这部分是本书的主体，是补充和提高的核心。

三、【提高训练】主要介绍近几年来新的题型、新的思路和新的方法，通过练习，以达到提高数学能力和培养数学思想方法的目的。这部分分两层练习："A 类练习"和"B 类练习"，以供学生检测自己达到何种水平。其中，A 类练习主要立足于消化教材，巩固"双基"，B 类练习旨在加强应用，训练创新。

四、【单元测试】是学习本单元后，进行一次小结。学生学习一段时间后，总结一下，反思一下，这样才有效果。虽然后面附有参考答案，最好还是做完后，再去对照，再去比较，说不定你的解法比书上还要简

捷，还要高明。

五、【课本练习】主要是为正在打基础的学生排忧解难。这部分提供了相应教材中的练习题、想一想、[选做题]、[复习题]A组、B组的答案，要求同学们在独立思考完成作业后再去对照、比较，这样才能更有效果。

本册主编叶天碧，副主编徐萍萍。参加编写的作者：徐萍萍、高兴平、李有新、郑静意、金燕、袁奇英、施建华。全书由叶天碧统稿和审阅。

编　者

2003年9月

目录

第九章 三角形

一、全等三角形

学习目标

1. 正确掌握全等三角形的判定定理——两边夹角对应相等(SAS);两角及夹边对应相等(ASA);三条边对应相等(SSS);两角及其中一角对边对应相等(AAS);斜边及一条直角边对应相等(HL).

2. 树立通过三角形全等来证明线段或角相等,证明线段的和、差、倍、分关系,解决平行、垂直等类型的问题,体验通过转化来解决一些几何问题的数学思想方法.

3. 证明三角形全等,常见的辅助线添法有——延长中线,并使延长部分等于原长;利用角平分线翻折构造全等三角形;过已知中点作平行线或在适当位置另找中点,作出三角形的中位线;截长补短法,即在较长的线段上截取一段等于和式中的一条线段,再证余下部分等于第二条线段;或延长第一条线段,使它等于两条线段的和,再证它与第三条线段相等;补缺法,将图形转化为常见的三角形.

4. 利用三角形顶点的对应关系构造全等,灵活应用,从新的角度体验成功,树立运用数学知识解决问题的信心.

5. 对一些特殊的图形,如正方形、正三角形、等腰直角三角形,能进行旋转变换,使问题转化为常见的全等三角形.

攻克重难点

1. 本单元重点——正确理解三角形边、角之间的对应关系,特别是图形较复杂时,能迅速确定可能的对应关系,正确应用三角形全等的判定定理.

2. 本单元难点——a.推理形式从实验、归纳推理为主体,转变为严

格、规范的演绎推理;从直观几何转变为论证几何为主体. b. 辅助线的添法,以及把要解决的问题转化为三角形全等.

3. 探求解决问题的方法时,一般应考虑能否转化为线段或角相等,然后观察是否有全等三角形,最后分析是否应该添辅助线.

例 1 如图 9-1,9-2,$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. 利用这两个图形,拼出常见的一些图形(至少四个).

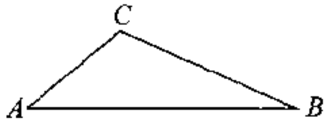


图 9-1

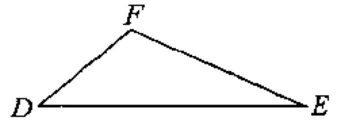


图 9-2

分析:本例是一个开放性的问题,答案不惟一. 经过不同拼法,按图形的不同位置能得到教科书及常见习题中的大部分图形,说明一系列习题均可以看成这两个图形平移和旋转而成.

解:如图 9-3,9-4,9-5,9-6,9-7,9-8,9-9,9-10——

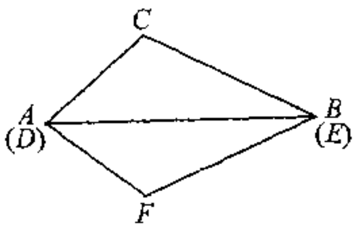


图 9-3

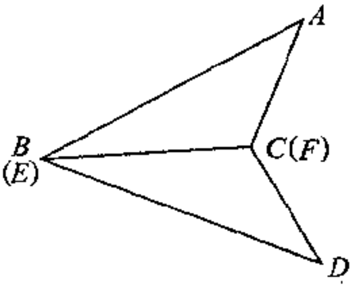


图 9-4

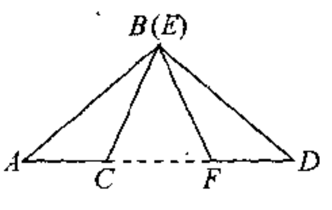


图 9-5

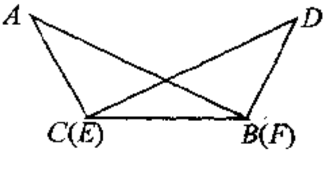


图 9-6

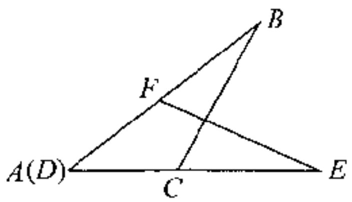


图 9－7

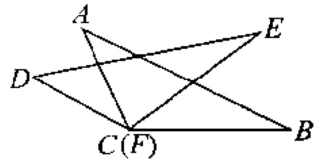


图 9－8

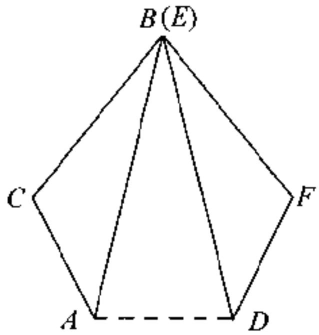


图 9－9

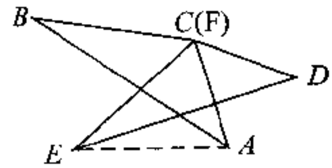


图 9－10

小结：在两个三角形全等条件下，如果对应顶点的位置发生变化，对应顶点的顺序发生变化，都构成我们常见习题中出现的图形. 两个全等三角形有部分重叠，此时图形较复杂，应引导按不同位置充分想像，也可借助实验手段找对应顶点，使思维得到升华. 也可以采用平行移动及旋转的方法理解不同图形的内在联系.

例 2　如图 9－11，点 B 为线段 AC 上一点，在同侧以 AB，BC 为边分别作等边 $\triangle ABE$，$\triangle BCD$.

(1) 求证 $AD=CE$；(2) 求 $\angle AOE$ 的度数.

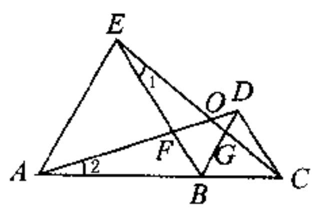


图 9－11

分析：本例线段较多，图形较复杂，不易发现三角形全等. 但从要证 $AD=CE$ 入手，不难发现对应顶点，只要证明 $\triangle ADB \cong \triangle EBC$ 即可，由 $\angle 1=\angle 2$，可求 $\angle AOE$.

解(1) ∵　$\triangle ABE$ 和 $\triangle BCD$ 是正三角形，

∴　$AB=BE, BD=BC, \angle ABE=\angle DBC=60^\circ$.

又∵ $\angle ABD=\angle ABE+\angle EBD$，$\angle EBC=\angle EBD+\angle DBC$，

∴ $\angle ABD=\angle EBC$.

在$\triangle ABD$和$\triangle EBC$中，$\begin{cases} AB=BE & \text{（等边三角形的边长相等），} \\ \angle ABD=\angle EBC, & \\ BD=BC & \text{（等边三角形的边长相等）.} \end{cases}$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle EBC(SAS)$.

∴ $AD=CE$，$\angle 1=\angle 2$.

(2) ∵ $\angle 1=\angle 2$， ∴ $\angle AOE=180^\circ-(60^\circ+\angle 1)-(60^\circ-\angle 2)=60^\circ$.

即$\angle AOE=60^\circ$

［思考一］ 还有三角形全等吗？还有线段相等吗？$\triangle FBG$是等边三角形吗？

［思考二］ 如图 9－12，如果由点 B 在线段 AC 上改为点 B 不在线段 AC 上，其余条件不变，本例结论是否仍然成立？

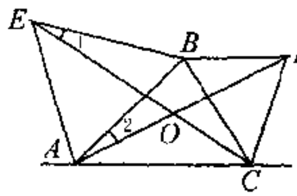


图 9－12

分析：此时$\triangle ABD$与$\triangle EBC$仍全等，故$AD=CE$仍成立．因为$\angle 1=\angle 2$，故$\angle AOE=60^\circ$也仍然成立．

［思考三］ 如图 9－13，如果将条件“$\triangle ABE$、$\triangle BCD$为等边三角形”改为正方形$ABEF$、正方形$BCGD$，其结论又将如何？请说明理由．

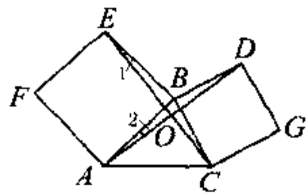


图 9－13

分析：此时$\triangle ABD$与$\triangle EBC$仍全等，故$AD=CE$成立．∵ $\angle 1=\angle 2$， ∴ $\angle AOE=360^\circ-90^\circ-(90^\circ-\angle 1)-(90^\circ+\angle 2)=90^\circ$.

［思考四］ 如图 9－14，如果将条件改为分别以 AB，BC 为斜边向外作等腰直角三角形 ABE，BCD，O 为 AC 中点，其结论将发生怎样变化？

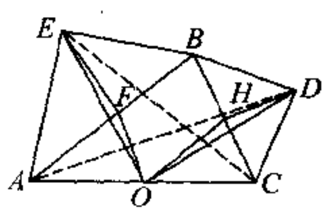


图 9－14

分析：显然此时$\triangle BEC$和$\triangle ABD$不全等，故$AD\neq EC$，结论将改变．取 AB，BC 中点为 F，H，不难证明$\triangle EFO\cong\triangle OHD$，得 $EO=$

DO，$\angle EOF=\angle DOH$，故$\angle EOD=90°$.

例 3　如图 9－15，9－16，已知$\triangle ABC$，$\triangle ACB$.

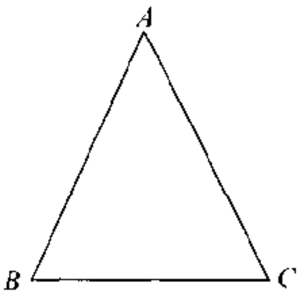


图 9－15

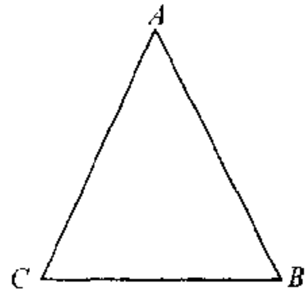


图 9－16

(1) 如果 $AB=AC$，则$\angle B=\angle C$；(2) 如果$\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$.

分析：显然此类问题本身就是等腰三角形的性质定理和判定定理，一般都是在同一三角形中构造全等而解决问题. 由于条件 $AB=AC$ 的特殊性，能否构造自身全等的两个三角形而解决问题呢？显然 B 与 C，C 与 B 可能成为对应顶点，而$\triangle ABC\cong\triangle ACB$，故$\angle B=\angle C$，反之亦然.

证明：(1) 在$\triangle ABC$ 和$\triangle ACB$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle A=\angle A,\\ AC=AB.\end{cases}$

$\therefore$　$\triangle ABC\cong\triangle ACB(SAS)$.　$\therefore$　$\angle B=\angle C$.

(2) 在$\triangle ABC$ 和$\triangle ACB$ 中，$\begin{cases}\angle B=\angle C,\\ BC=CB,\\ \angle C=\angle B.\end{cases}$

$\therefore$　$\triangle ABC\cong\triangle ACB(ASA)$.　$\therefore$　$AC=AB$.

[变式一]　如图 9－17，在$\triangle ABC$ 中，BD，CE 分别平分$\angle B$，$\angle C$.

(1) 如果 $AB=AC$，则 $BD=CE$.

(2) 如果 $BD=CE$，则 $AB=AC$.

分析：(1)如果$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，马上就可得到 $BD=CE$；(2)是非常著名的几何题，即角平分线相等的三角形是等腰三角形. 因此(2)作为(1)的逆定理，(1)的证明非常简单，而(2)的证明非常困难.

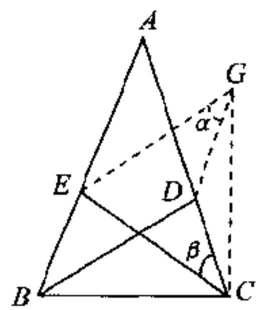


图 9－17

证明：(1) $\because AB=AC$， $\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

又$\because$ BD、CE 分别为$\angle B$、$\angle C$ 平分线，

$\therefore$ $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore$ $\angle ABD=\angle ACE$.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 中，$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle A=\angle A, \\ \angle ABD=\angle ACE. \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE(ASA)$， $\therefore BD=CE$.

(2) 作 $EG \mathrel{\underline{\parallel}} BD$，不难证明 $GD=BE$，$\angle EGD=\angle EBD=\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\because$ $EG=BD$，$BD=CE$， $\therefore$ $EG=CE$.

令$\angle EGD=\alpha$，$\angle DCE=\beta$，则 $\alpha+\angle DGC=\beta+\angle DCG$.

$\triangle BDC$ 和$\triangle CEB$ 中，由 $BC=BC$，$BD=CE$，若 $\alpha>\beta$，则 $CD>BE$，即 $CD>DG$， $\therefore$ $\alpha<\beta$ 与 $\alpha>\beta$ 矛盾，同理 $\alpha<\beta$ 也不成立.

$\therefore$ $\alpha=\beta$， $\therefore$ $AB=AC$.

［变式二］ 如果将条件“$BD=CE$”改为 $BE=CD$，是否也能推出 $AB=AC$?

［变式三］ 如图 9－18，在$\triangle ABC$ 中，BD、CE 分别平分$\angle B$，$\angle C$.

(1) 如果 $\angle B>\angle C$，能得到 $BD<CE$ 吗？

(2) 如果 $BD<CE$，能推出 $\angle B>\angle C$ 吗？

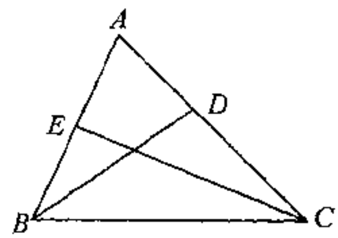


图 9－18

小结：用全等三角形处理等腰三角形的一系列问题是一种创新，使得问题更加干脆. 同时，更进一步说明对应的重要性，但是对其逆定理的复杂性及艰难程度应有心理准备.

例 4 如图 9－19，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，BE 交 AC 于 E，交 AD 于 F. 且 $AE=EF$. 求证：$AC=BF$.

分析：很明显，本例涉及辅助线“中线加倍法”. 延长 AD 到 G，使 $DG=AD$，连结 BG. 如果$\triangle BDG\cong\triangle CDA$，只要证明$\angle G=\angle BFG$ 即可. 遇到中线问题，延长一倍的目的是通过旋转 180°改变位置，达到由“分散”

到"集中"的过程，使原来分散在两个三角形中的 AC，BF 集中到同一$\triangle BFG$ 中.

证明：延长 AD 到 G，使 $DG=AD$，连结 BG.

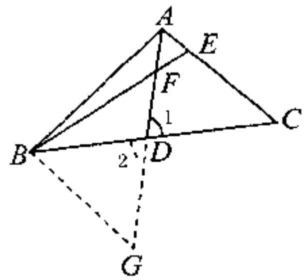


图 9-19

$\because$ 在$\triangle BDG$ 和$\triangle CDA$ 中，$\begin{cases} BD=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \\ DG=DA, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle BDG \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $BG=CA$，$\angle G=\angle CAD$.

又$\because$ $AE=EF$，$\therefore$ $\angle CAD=\angle AFE$.

而$\angle AFE=\angle BFG$，$\therefore$ $\angle G=\angle BFG$，$BF=BG$，

$\therefore$ $AC=BF$.

［变式一］ 如图 9-20，在$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，$DE=BD$，$EF \parallel AC$ 交 AD 于 F，求证 $EF=AB$. 解决此问题，要添出辅助线吗？要添的话，如何添？

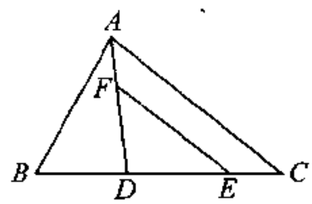


图 9-20

分析：因为 $DE=BD$，故仍然与中线问题类似，可以延长 FD，也可以过点 B 或点 E 作平行线，都能解决问题.

［变式二］ 如图 9-21，AE 是$\triangle ABD$ 中线，$CD=AB$，$\angle BDA=\angle BAD$. 求证 $AC=2AE$.

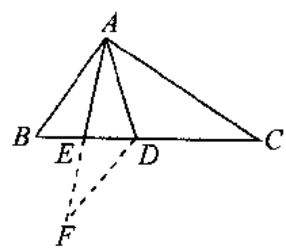


图 9-21

分析：证明线段倍、半问题的一般方法是加倍或折半，欲证 $AC=2AE$，则延长 AE 至 F，使 $EF=AE$，证明$\triangle AFD \cong \triangle ACD$ 即可.

［变式三］ 如图 9-22，在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 中点，E 为 AB 上任一点，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，分别交 AB 于点 E，交 AC 于 F.

求证：$BE+CF>EF$.

分析：BE，CF，EF 太散，要想办法添辅助线使"分散"能够"集中". 由于 D 是 BC 中点，可以考虑类似中线的处理方法.

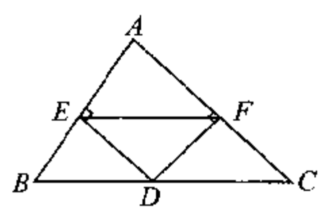


图 9-22

［变式四］ 如图 9-23，M 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边中点，在 AB 上取点 P，在 AC 上取点 Q，

使$\angle PMQ=90^\circ$，则PQ，BP，CQ有怎样的关系？

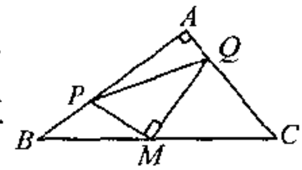


图 9-23

分析：几乎与［变式三］完全一样，只增加了$\angle A=\text{Rt}\angle$条件．不难发现，BP，PQ，CQ是直角三角形的三边，即$PQ^2=BP^2+CQ^2$．

小结：中点、中线类的问题如何添辅助线是难点．因为"分散"的线段、角是很难处理的．解决此类问题时，延长一倍或过点作平行线或构造中位线应成为常规．

例 5　如图 9-24，在$\triangle ABC$中，$\angle B=60^\circ$，$\angle A$，$\angle C$的平分线AD与CE交于点O．

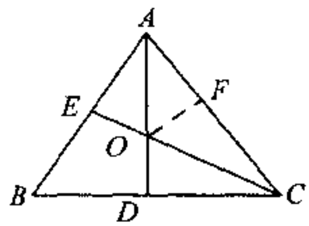


图 9-24

求证：$AE+CD=AC$．

分析：要证两线段之和等于某线段，一般采用截长补短法，即在某线段上截取一段等于和式中的一条线段，再证余下部分等于另一条线段；或者延长第一条线段，使它等于两条线段的和，最后证它与第三条线段相等即可．故只要在AC上截取$AF=AE$，证明$CF=CD$，还要证明$\triangle OCD\cong\triangle OCF$．

证明：作$AF=AE$，连结OF．

$\because$　在$\triangle AEO$和$\triangle AFO$中，$\begin{cases}AE=AF,\\ \angle EAO=\angle FAO,\\ AO=AO.\end{cases}$

$\therefore$　$\triangle AEO\cong\triangle AFO$，　$\therefore$　$\angle AOE=\angle AOF=\angle COD$．

$\because$　$\angle B=60^\circ$，AD，CE分别平分$\angle A$、$\angle C$，

$\therefore$　$\angle AOC=90^\circ+\dfrac{1}{2}\times60^\circ=120^\circ$．

$\therefore$　$\angle AOF=\angle COD=\angle AOE=60^\circ$，　$\therefore$　$\angle COF=60^\circ$．

在$\triangle COF$和$\triangle COD$中，$\begin{cases}\angle COD=\angle COF,\\ OC=OC,\\ \angle OCD=\angle OCF.\end{cases}$

$\therefore$　$\triangle COF\cong\triangle COD$，　$\therefore$　$CF=CD$．

$\therefore$　$AE-CD=AC$．

［变式一］　如图 9-25，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=100^\circ$，$\angle B$的平分线BE交AC于E．求证：$BC=AE+BE$．

分析：如何添辅助线，非常明确：一是把 BE 延长到 F，使 $EF=AE$，把问题转化为证明 $BC=BF$；或者在 BC 上截取 $BM=BE$，把问题转化为证明 $CM=AE$.

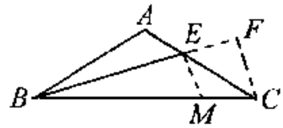


图 9－25

［变式二］　在$\triangle ABC$中，如果 $AB=AC$，$\angle B$ 的平分线交 AC 于 E，$BC=AE+BE$，能推出$\angle A=100°$吗？

［变式三］　如图 9－26，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，$AB=AC$，显然成立 $AB+CD=AC+BD$. 如果将条件改变为：$AD\perp BC$，$AB+CD=AC+BD$，能推出 $AB=AC$ 吗？

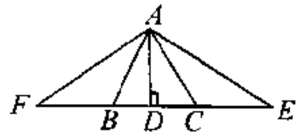


图 9－26

分析：显然，这是互为逆定理，原定理非常简单，但由逆定理直接证明 $AB=AC$ 异常困难. 如何将 $AB+CD=AC+BD$ 条件进行转化是解决本例的关键. 因条件是和式，故考虑延长 BC 到 E，使 $CE=AB$，延长 CB 到 F，使 $FB=AC$，再看能否证明$\triangle ABF\cong\triangle ACE$.

证明：分别延长 BC 到点 E，CB 到点 F，使 $CE=AB$，$BF=AC$，连结 AF、EA.

$\because$　$AB+CD=AC+BD$，　$\therefore$　$FD=DE$.

$\therefore$　$\triangle ADF\cong\triangle ADE$，　$\therefore$　$AE=AF$.

在$\triangle ABF$和$\triangle ACE$中，$\begin{cases}AE=AF,\\AC=BF,\\CE=AB.\end{cases}$

$\therefore$　$\triangle ABF\cong\triangle ECA$，　$\therefore$　$\angle ABF=\angle ACE$.

$\therefore$　$\angle ABC=\angle ACB$，　$\therefore$　$AB=AC$.

［变式四］　如图 9－27，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=120°$. 求证：$BC+DC=AC$.

分析：本例实际是等边$\triangle ABD$外接圆$\overset{\frown}{BD}$上一点 C，证明 $AC=BC+DC$ 的变异. 故考虑延长 BC 到 E，使 $CE=CD$，连结 BD，证明$\triangle ACD\cong\triangle BED$. 而$\triangle CDE$和$\triangle ABD$均为等边三角形，故马上得到 $AC=BE=BC+CE=BC+CD$.

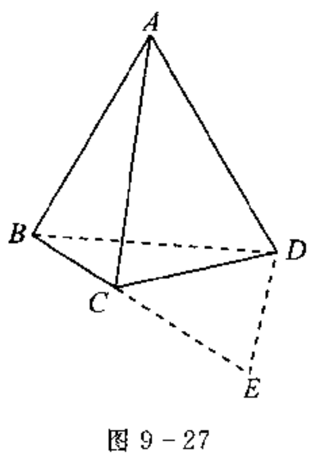


图 9－27

小结：证明线段的和式或已知条件是和式，处理方法都相同. 如果以截长补短法处理，应按不同位置构造全等三角形，同时充分发掘是否有等边三角形等较特殊图形.

提高训练

A 类练习

一、选择题

1. 如图 9－28，$AB=AC$，$AD=AE$，可证明$\triangle ABE\cong\triangle ACD$，其理由是（　　）.

(A) SSS　　(B) SAS　　(C) ASA　　(D) AAS

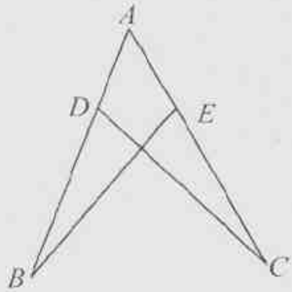


图 9－28

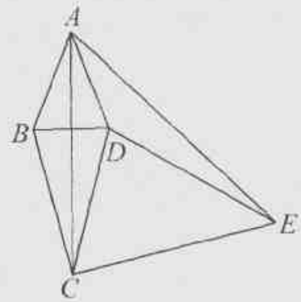


图 9－29

2. 如图 9－29，$\angle BAD=\angle CAE$，且 $AB=AD$，$AC=AE$，则（　　）.

(A) $\triangle ABD\cong\triangle ACE$　　(B) $\triangle ABC\cong\triangle ADC$

(C) $\triangle ADC\cong\triangle ADE$　　(D) $\triangle ABC\cong\triangle ADE$

二、填空题

1. 如图 9－30，$DE\perp AB$，$CF\perp AB$，$AF=BE$，要判断$\triangle ACF\cong\triangle BDE$，还要加条件________或________.

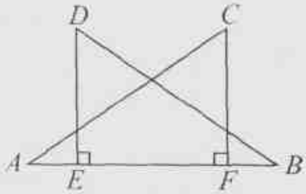


图 9－30

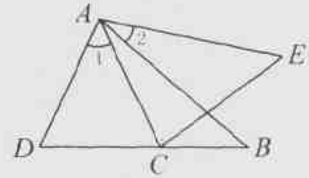


图 9－31

2. 如图 9－31，$\angle 1=\angle 2$，$AB=AE$，$\angle B=\angle E$，那么图中相等的线段还有____________，相等的角还有____________.

三、解答题

1. 如图 9－32，AB 和 CD 互相平分于点 O，过点 O 作直线 EF 交 AC 于 E，交 BD 于 F. 求证：$OE=OF$.

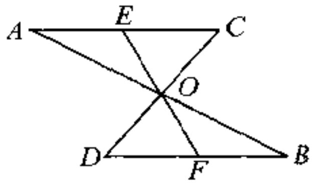


图 9－32

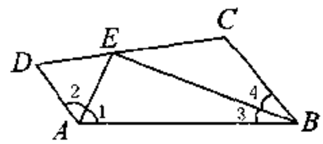


图 9－33

2. 如图 9－33，已知：$AD\parallel BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证：$AD+BC=AB$.

3. 如图 9－34，B,E,C,D 在同一直线上，AE 是 $\triangle ABC$ 的中线，AC 平分 $\angle EAD$，$AD=2AE$. 求证：$AB=CD$.

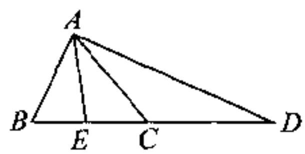


图 9－34

4. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60^\circ$，$\angle A$，$\angle C$ 的平分线 AD，CE 交于点 F，试猜想 AE，CD，AC 三线段有何数量关系，并加以证明.

5. 如图 9－35，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 AB 上一点，E 为 AC 延长线上一点，$BD=CE$，DE 交 BC 于 F. 求证：$DF=EF$.

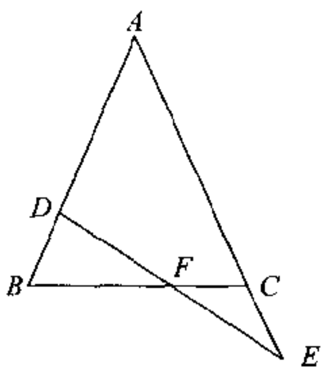


图 9－35

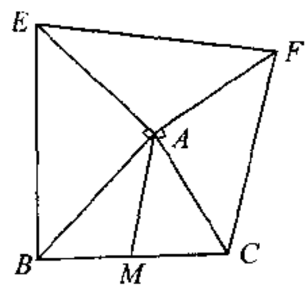


图 9－36

6. 如图 9－36，AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，分别以 AB，AC 为直角边向外作等腰直角 $\triangle AEB$，$\triangle AFC$. 求证：$EF=2AM$.