中学数学教学经验选辑

ZHONGXUE SHUXUE JIAOXUE GINGYAN XUANJI

江苏省教育厅编

江苏人民出版社

中等数学教学经验选辑

中学数学教学經験选輯

江苏省教育厅編

江苏人民出版社

中学数学教学經驗选輯

江苏省教育厅編

※

江苏省书刊出版业营业許可証出 001 号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 11 号

江苏省新华书店发行　上海市印刷四厂印刷

※

开本 787×1092 耗 1/32　印張 3 1/4　字数 75,000

1960 年 3 月第 1 版

1960 年 3 月南京第 1 次印刷

印数 1—20,000

目　录

在数学教学中使学生理解知識牢固掌握知識提高教学質量的措施

江苏省苏州高級中学数学教研組

数学教学的質量，主要体現在学生掌握数学知識的程度与运用这些知識的能力方面。只有在学生牢固地掌握知識以后，才能够运用这些知識来解决問題，并順利地継續学习新的知識，而要求学生牢固地掌握知識，首先就要使学生能透徹地理解所学的知識。因此，怎样使学生牢固地掌握知識，以及首先是怎样使学生理解知識，应該是数学教学中的一个主要問題。为了提高数学教学的質量，在这一方面，我們作了如下的一些措施。

（一）教师应該根据党的教育方針，認真鉆研大綱和教材，明确每一单元、每一課的教学目的。据此，确定教学的具体要求、深度、广度与重点。

关于教学目的，我們一般从下列两个方面来考慮，一是这些知識在人們生活上、生产上和进一步学习其他知識方面的意义；一是知識本身的教养与教育意义。

例如：关于代数"二次方程解法"这一单元的教学：首先，我們考慮到，在中学里所講的方程，一般在最后都是归結为一个解二次方程的問題（如无理方程、分式方程、某些指数方程、对数方程、高次方程和三角方程等），因此，二次方程又是方程中的基础。再从方程与实际問題的联系来考虑，为了使学生能应用方程的知識来解决实际問題，就必須教会学生列方程和解方程，根据这些，确定"二次方程解法"这一单元的教学目的为：

使学生理解二次方程的意义，掌握一般的解法，为今后学习其他方程的解法作准备，并能以此解决实际問題，同时通过列方程与驗根，培养学生对問題的分析能力与判断能力。

再如在这一单元“用配方法解二次方程”的教学，因为二次方程的一般解法主要是应用求根公式，而求根公式则是通过配方法导出的，且配方法也是二次方程的一种解法，因此从“二次方程解法”这一单元的教学目的，又确定“用配方法解二次方程”，这一課时的教学目的是：掌握用配完全平方的方法来解二次方程，为导出二次方程的求根公式作准备。

这样在教师明确教学目的的基础上，才能正确确定教学的具体內容与重点，向学生提出明确的要求，学生也才能明确学习的目的，自觉地学好新知識。

（二）講解新課时，应根据教材的科学系統，注意前后的联系，掌握循序漸进的原則，启发学生的思維活动，使他們很好地获得知識。

数学本身具有严密的邏輯性和系統性，学生接受知識的規律也应当是循序漸进，逐步深入的，所以只要經常对照学生已熟知的旧知識，通过思維导出新的知識，是能够促使学生更好地理解并掌握新知識的。在教学过程中，我們充分注意到这一点。

例如高一代数二次函数的图象，是先由函数 $y=x^2$ 的图象开始，而后講授 $y=ax^2$，$y=ax^2+c$，$y=a(x+m)^2$，$y=a(x+m)^2+k$，最后給出 $y=ax^2+bx+c$ 的图象。当学生已掌握了函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+c$ 的图象及其性质，而在講授函数 $y=a(x+m)^2$ 的图象时，我們便利用了如下的方式，引导学生逐步深入。

1. 首先复习 $y=ax^2+c$ 的图象：

(1) 命学生上黑板粗描函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$，$y=-\frac{1}{3}x^2+3$，

$y=-\frac{1}{3}x^2-2$ 的图象。(不先求函数与自变量的对应值进行描述，而是根据函数的性质描繪出它們的形状与位置关系。)

(2) 分别提問学生关于函数 $y=\frac{1}{4}x^2-4$ 的图象的頂点、对称，向上还是向下伸展，有极大値还是有极小値，函数上升、下降时自变量的区間等間題。

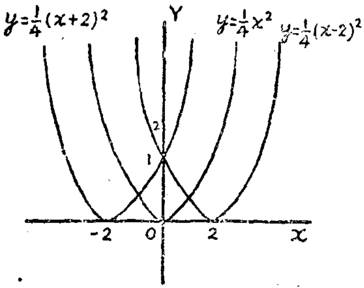
(3) 再由另一学生小結函数 $y=ax^2+c$ 的图象的性质，其中 a、c 的符号与絕对値对图象的形状与位置的关系。

2. 引进函数 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$ 与 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$，进行研究，启发学生，以此与函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象来比較。

(1) 指定学生在黑板上列出函数 $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$, $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ 与自变量 x 間对应数値的表：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	·········
$y=\frac{1}{4}x^2$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	·········
$y=\frac{1}{4}(x+2)^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9	·········
$y=\frac{1}{4}(x-2)^2$	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	·········

(2) 由另一学生根据表列数字，上黑板选取坐标軸，同时描繪 $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$, $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的图象。(最后由教师修正图象)



(3) 要求学生根据图象的形状与位置，說出它們之間的关系。

(4) 再要求学生根据函数的解析式，就同一函数 y 的値其所对应自变量 x 的値的差数来判定它們的形状与位置关系。

(5) 提問学生怎样移动函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象，得出 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$ 与 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的图象。

至此，教师对函数 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$，$y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的图象作出結論：形状全同，都是拋物綫，但位置不同，函数 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$ 的图象是在函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象左面 2 个单位，函数 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的图象是在函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象右面 2 个单位。

(6) 要求学生思考：函数 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$ 及 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的极大値或极小値，函数 y 为 0 时、上升、下降时，自变量 x 的値的区間。

3. 用同样的方法討論，函数 $y=-\frac{1}{3}(x+4)^2$ 的图象(与函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象作比較)。

4. 提出一般形式，函数 $y=a(x+m)^2$ 的图象，与函数 $y=ax^2$ 的图象比較，要求学生分别回答下面的問題：

(1) 它們的名称、頂点、对称情况。

(2) a 对图象形状的影响。

(3) m 对图象位置的影响。

而后教师进行小結。

5. 再提出討論函数 $y=-\frac{1}{5}(x+5)^2$，$y=-\frac{1}{5}(x-5)^2$，$y=x^2-4x+4$ 的图象进行巩固，并为下一課时研究一般形式的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象作准备。

6. 最后布置課外作业(复习与練习)。

这样，按教材的內在联系和自然发展的邏輯順序，根据由簡单到繁复，由特殊到一般的原則，注意到前后的关联，先由教师提出一联串的問題，启发学生思考回答，而后归納小結，以引出新的知識，使課堂教学成为在教师指导之下学生主动探求知識的活动。同时使新旧知識联成一串，并註学生通过自己积极思維，逐步理解，而获得的新知識，也易于理解与牢固掌握。为此，教师必須深入鉆研教材，掌握教材本身的系統，弄清来龙去脉和前因后果，才能使課堂教学順利进行。

(三)講授数学中的定理、公式与法則时，应突出重点与关鍵，使学生能抓住要領，便于理解与記忆。

1. 教材內容系統地罗列着各个方面的知識，教学要求学生能全部掌握，并能运用这些知識解决各种不同形式的問題。如果我們是平鋪直叙地講述，将使学生茫无头緒，顧此失彼。因此，在教学过程中必須随时归納小結，突出重点，指出关鍵，使学生抓住要領，能举一反三，理解并掌握全部教材。

例如高中代数二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性質，包括图象的頂点、位置、对称关系，函数的上升、下降区間，极大值或极小值等方面，形式上非常繁杂，但关鍵在于能将 ax^2+bx+c 进行配方，化成 $a(x+m)^2+k$ 型，观察 a、m、k

的数値，由此，一系列問題均可解决。

再如高中代数中关于复数、实数、虚数、純虚数的概念，学生是比較容易混淆的，因此教师在講解时，必須明确以下几点：

(1) 复数是实数与虚数的总称，如 $3-4i$，-5，$7i$，0 都称复数。

(2) 复数中实数与虚数的区别是决定于虚部的系数是否为零，与实部无关，如 -3，0 均是实数，$5+2i$，$4i$ 均是虚数。

(3) 純虚数是虚数的特例，是实部为零的虚数，如 $3i$，$-7i$ 等都是純虚数。

这样学生对这些概念，便有清晰的印象，而不再含混了。

2. 对于数学习題的解法，为了使学生解习題时不至有无从着手的感觉，我們也同样在举例时指出解决同类型問題的关键，让学生掌握。

例如高中代数有关根式运算的問題，就要求学生审辨式中的补助元，而后用乘方公式进行变換，如化簡：

$$\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right)$$

$$\div\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{2b}, \quad (a\neq 2b)$$

若能将 $\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{2b}$ 視作題中的元，設分别为 x 与 y，用 $x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$ 等公式进行变換，則此題就很容易解决了。

再如高中三角中一些斜三角形边角間关系的証明題，关鍵在将問題中的边用正弦定理化成角的关系（如 $a=2R\sin A$），或将角化成边的关系进行变換，如求証

$$a+b+c=8R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

当我們将边化成角的关系时便得出：

$$a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

問題便归結为，求証 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$ 的問題了，而这个式子的証明，对学生来說，是过去所熟悉的，因此該題就容易解决了。

这样指出解决同类型問題的关鍵，也就是指引对問題分析思考的方向，不仅使学生对問題的解决不至感到束手无策，并且知道应該怎样灵活运用所学得的知識。

3．除了在教学中突出重点与关鍵外，并通过例題及时指出学生容易犯錯誤的地方及其原因，以防患于未然。

例如，学生对于相似三角形面积之比等于对应边平方之比这个定理，在应用中經常会忽略“平方”这个关系，所以在講授过程中，便可提出問題“已知两个相似三角形面积之和为 $50\,cm^2$，对应边之比为 2∶3，求这两个三角形的面积”，让学生当堂練习。当有学生立刻答出这两个三角形的面积分别为 $20\,cm^2$ 与 $30\,cm^2$ 时，教师便指出这是由 2∶3 得出的，忽略了“平方”比这个关系，以引起学生注意。

再如学生在初学三角时，对三角函数間的互余关系与倒数关系，在应用中有时也易混淆，因此在講过互余二角的三角函数之間的关系时，便提出問題，化簡 $\sin 20^\circ\cdot\sec 70^\circ\cdot\cos 20^\circ$，让学生当堂練习。当学生得出：

$$\sin 20^\circ\cdot\sec 70^\circ\cdot\cos 20^\circ=\sin 20^\circ\,\frac{1}{\cos 20^\circ}\,\cos 20^\circ$$

$=\sin 20^\circ$ 时，便指出 $\sec 70^\circ=\frac{1}{\cos 70^\circ}$，使学生明白錯誤的原因。

这样預先指出学生容易犯錯誤的地方，不仅能防止今后在練习中出现类似的情况，并且有助于学生透徹理解所学的知識。

（四）根据不同内容，运用各种不同方法，处理教材中的难

点，使学生容易理解。

教材中有些內容是属于必需掌握的基础知識，但是由于学生生活經驗与知識的不足，或思維能力的限制，往往难于理解，对于这些，必須根据不同內容，运用不同的方法来講清講透。

例如高中代数中常量、变量、函数的概念，尤其是函数的概念是比較抽象难懂的，但这些概念本身体現着自然現象和社会生活中数量之間的一种依存与制約关系，因此在講解过程中，便应該多举实例，尤其是用学生知識領域、生活經驗中的事例来說明，如圓的周长 C 与半径 R 的关系：$C=2\pi R$，行一定距离 S 的速度与时間 v 之間 t 的关系 $t=\frac{S}{v}$，貨物的总价 P 与数量 a 及单价 p 之間的关系 $P=ap$ 等等，最后再引出 $y=f(x)$ 的一般概念。

这样通过实际事例来闡明概念，使学生不致感到过分抽象，难于理解，并且使学生对新概念的本質属性，理解得更透彻。

再如，高中代数中关于算术根的概念，也是学生較难接受的，我們在教学中就要多举数字例子来进行講解。

1. 根据在实数集合內，正数的偶次方根（如平方根）有正負两个值，符号“$\sqrt[n]{\ }$”（n 是偶数）究竟表示哪一个值，必須要有明确的規定，以免在表达与运算方面发生困难，由此有規定算术根的必要。

2. 提出算术根的定义：正数的正的方根叫作算术根，若 $a>0$，n 是偶数，則符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示的是算术根。（即 $\sqrt[n]{a}>0$）

3. 要求学生注意，文字 a 所代表的数字，可以是正数，也可以是負数，因此便不能断定恒有 $\sqrt{a^2}=a$ 的結論，并用数字例子来說明（如 $a=-2, -3$ 等等）。

4. 指出在上述 $a<0$ 的情况下，根据負数的相反数是正数，怎样用相反数的符号（即 $-a$）来表正数。

5. 通过下列一类的例題，来巩固概念。

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

$$\sqrt{(a-1)^2}=\begin{cases} a-1 & (a>1) \\ 0 & (a=1) \\ 1-a & (a<1) \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{(a-2)^2}=\begin{cases} 2-2a & (a<0) \\ 2 & (0\leq a\leq 2) \\ 2a-2 & (a>2) \end{cases}$$

在以后講授根式的基本性質，进行根式运算，一直到解无理方程的时候，再随时联系复习。这样由于对难点反复講解，不仅使学生深入理解，并且可以达到巩固的目的。

(五)注意旧知識的复习，使学生能深入理解与記忆知識。

复习是使已經学习过的概念、定理、公式、法則在記忆里再现出来，弄清楚在原先学习时尚未透徹理解的部分，并以新的更全面的观点来闡明所学习的知識，这样可以加深对这些知識的理解与記忆，达到巩固的目的。我們在教学中，注意到下述的一些复习方式：

1. 在講授新課的过程中，不断联系旧的知識，由于旧知識的反复出现，从而加深記忆。

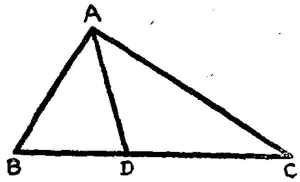
如在高中平面几何講授正多边形的定义时，就要学生回忆相似多边形的定义，将两者在边与角的关系上作比較，指出在三角形的情况下，也是类同的。这样既有利于学生掌握正多边形的定义，又巩固了相似多边形的定义。再在正多边形中講授正十边形的边长与半径的关系时，同时要学生回忆中外比的作图，$\sqrt{5}a$ 的作法，这样又巩固了代数法作图。

由于数学习题的演算，必須要求具有綜合运用各种知識的

能力，因此我們便經常通过例題的分析，来复习巩固旧知識。

如在高中平面几何多边形的面积計算中，我們举了这样的一个例子：

“已知 ΔABC的$\angle A=60^\circ$，$AC=16cm$，$AB=10cm$，AD为$\angle A$的平分綫，与BC交于D，求ΔABD，ACD的面积。”



由問題可以知道：ΔABC的面积是能够直接計算的，先要学生回答它的計算方法：

$$\Delta ABC\text{ 的面积 }=\frac{1}{2}\times 16\times 10\cdot \sin 60^\circ=40\sqrt{3}$$

这样让学生复习一下用两边夹一角計算三角形面积的方法，同时又复习了特别角60°的正弦函数値。

其次要学生发现所求的两个三角形ABD、ACD的面积之間的关系，一种方法是根据两三角形分别以BD、CD为底，則它們等高，因此，

$$\frac{\Delta ABD\text{ 的面积}}{\Delta ACD\text{ 的面积}}=\frac{BD}{CD}$$

这样复习了三角形面积的比的定理（三角形的高相等，則其面积之比等于底之比）。但$\frac{BD}{CD}$仍是未知量，因此再启发学生化为$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$，这样又复习了“三角形內角二等分綫分对边成两綫段和两条邻边成比例”的定理。

另外由于ΔABD与ΔACD有一角相等，因此它們的面积又有：

$$\frac{\Delta ABD\text{ 的面积}}{\Delta ACD\text{ 的面积}}=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AD}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8},$$

这样又复习了另一三角形面积的比的定理（夹等角的两三角形其面积的比等于夹等角两边乘积的比）。

或由$\Delta ABD, ACD$分别以AB, AC为底，直接得出

$$\frac{\Delta ABD\text{ 的面积}}{\Delta ACD\text{ 的面积}}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8},$$

这样又复习了“一个角的二等分綫上的点到角的两边等距离”的定理。

当然我們还可以用“两三角形有一角互补，則其面积之比等于夹补角两边乘积之比”的定理，得出：

$$\frac{\Delta ABD\text{ 的面积}}{\Delta ACD\text{ 的面积}}=\frac{DA\cdot BD}{DA\cdot CD}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

这样的討論，不仅复习了有关的一些定理，同时也养成学生习慣从各个方面来观察三角形的方法。

最后启发学生，分别求得

$$\frac{\Delta ABD\text{ 的面积}}{\Delta ABC\text{ 的面积}}=\frac{5}{8+5}=\frac{5}{13},$$

$$\frac{\Delta ACD\text{ 的面积}}{\Delta ABC\text{ 的面积}}=\frac{8}{8+5}=\frac{8}{13};$$

从而得出：

$$\Delta ABD\text{ 的面积}=40\sqrt{3}\times\frac{5}{13}=\frac{200\sqrt{3}}{13}\ cm^2$$

$$\Delta ACD\text{ 的面积}=40\sqrt{3}\times\frac{8}{13}=\frac{320\sqrt{3}}{13}\ cm^2$$

又复习了合比定理，以及用比例分配来求部分量的方法。

这样不仅解决了問題，并且复习了許多有关的定理与方法，使学生感到所学的知識不是割裂的，而是可以融会貫通的，从而有助于对这些定理的掌握与应用。

2．定期举行阶段复习，使学生系統地理解某一单元的全部

內容以及相互間的关系，便于牢固掌握全部知識。

因为尽管平时教学注意到教材的系統性与相互間的联系，但在每一課时中仍是段落地讲解，学生容易停留在片断的理解記忆上，通过阶段的总結复习，由于对整个教材进行了系統概括的叙述与分析比較，将整个內容联串在一起，使学生有一个全面系統的概念，便于掌握它的要点与关鍵。

如高中代数“二元二次方程組”这一章，我們作了这样的复习：

（1）在一般概念方面：

① 二元二次方程的一般形式是什么？

$(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0)$

② 一个二元二次方程解答的不定性。

（如 $2x^2+3xy-y^2+4x-2y+1=0$ 可有无数組解）

③ 由一个二元二次方程与一个二元一次方程所組成的方程組，都可以用代入法消去一个未知数，得出一元二次方程来解。如：

$$\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 2x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

由 ② $y=2x-1$ 代入 ① 整理后得

$15x^2-23x+8=0$，

解出 x 后，再求对应的 y 值。

④ 由两个二元二次方程所組成的方程組，在消去一个未知数后，在一般情况下，要得出一个一元四次方程，因此目前无一般解法，如：

$$\begin{cases} y=x^2+1, \\ x=y^2-1。 \end{cases}$$

消去y后得 $x^4+2x^2-x-1=0$，現在尚不会解。

（2）在方程組的一般解法方面（限某些特殊情况的方程組）：