建筑工程力学

（下册）

主　编　卙　萱

机械工业出版社

建筑工程力学

下　册

主　　编　韩　萱
副主编　徐　悦　杨杏芬　郭宁秀　柳素霞
参　　编　车遂光　李　淮　杨　涛

机械工业出版社

本书共五篇，分上、下两册。

下册共有三篇。第三篇杆件的承载能力计算，内容包括杆件的应力和强度条件；变形和刚度条件；压杆稳定。第四篇超静定结构，内容包括力法、位移法和力矩分配法。第五篇工程应用，内容是介绍计算机在结构内力、位移计算机中的应用。

本书可作为中等专业学校工科土类、近土类专业建筑工程力学课程的教材，也可供其他专业和成人教育、职工中专、职业中专、技工学校等相关专业参考使用。

目 录

第三篇　杆件的承载能力计算

建筑物、设备都是由构件组成的，构件在工作时，总受到外力作用。为了使构件在外力的作用下能正常工作而不损坏、也不发生过度变形、不丧失稳定，就要求构件具有一定的强度、刚度和稳定性。我们把构件满足强度、刚度和稳定性要求的能力称为构件的承载能力。

为了保证构件具有足够的承载能力，常采取一些措施，例如选用优质材料、增加构件的截面尺寸、改变截面形状；但这便涉及到节约资金和减轻自重的问题。为了合理地解决安全与经济这对矛盾，本篇建立满足强度、刚度和稳定性要求所需的条件，为既安全又经济地设计构件提供科学的计算方法。

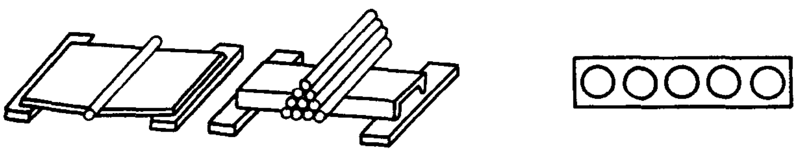
第一章　杆件的应力和强度条件

本章研究问题的方法是先研究与应力有关的截面几何性质，然后分析杆件截面上应力分布情况，最后对杆件危险点的应力建立强度条件。本章重点是杆件的强度条件及其应用。

第一节　平面图形的几何性质

在日常生活中，我们会见到这样的现象，一块薄钢板在较小压力作用下，会发生很大弯曲变形（图 1－1a）；而当把薄板折叠，矩形截面折成槽形截面时，变形相对减小，其承载能力有了很大提高（图 1－1b）。

因此，在计算杆件的应力和变形时，需要用到与截面尺寸和形状有关的几何量值，称为平面图形的几何性质。它是影响构件承载能力的重要因素之一。比如楼板采用空心板这种截面形式（图 1－1c），和实心板相比，优化了截面几何性质，大大提高了板的强度，减轻了自重。所以在研究杆件应力和变形之前，首先必须掌握截面的几何性质及其计算。



a)　　　　b)　　　　c)

图　1－1

一、形心的计算

1．概念

任何物体都可以看作是由许多微小部分组成，在它的每一微小部分都作用着一个铅垂向下的重力。这些重力组成一个空间同向平行力系，这个平行力系的合力就是物体的重力。重力的大小称为物体的重量。由实验可知，不论物体在空间的方位如何，重力作用线总是通过

一个确定点，该点就是物体的重心。重心在工程实际中有很重要的意义。大坝、挡土墙的抗倾复稳定性问题与重心直接有关。预制构件和机械的安装，需知道其重心位置才能吊装平稳。

物体的重心位置与物体的形状及物质分布情况有关。但对于均质物体来说，其重心位置仅取决于物体的几何形状，而与物体的重量无关。因此均质物体的重心与形心的位置是重合的，位于物体的几何形状的中心。较薄的均质薄板，可用平面图形来表示，它的重心作用点称为形心点。工程计算中常需要确定平面图形的形心。

2. 平面图形形心的确定

(1) 对称法（图解法）

如果平面图形具有对称轴或对称中心的话，则其形心必在其对称轴、对称中心上。例如圆形的形心在其对称中心 C 上（图 1－2a），T 形截面的形心在其对称轴上（图 1－2b），任意三角形的形心在任意两条中线的交点 C 上（图 1－2c），平行四边形的形心在两条对角线的交点 C 上（图 1－2d）。

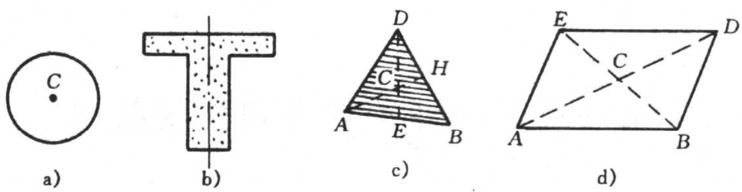


图 1－2

(2) 实验法

对于形状复杂的均质薄板，常用悬挂法确定图形的形心（图 1－3），可先将板悬挂于任意点 A，则可知其形心一定在铅垂线 AB 上，再将板悬挂于任意点 D，其形心必沿铅垂线 DE 上。显然 AB 与 DE 的交点，即为此平板的形心 C。

(3) 公式法

用公式法计算平面图形的形心位置时，必须先要建立参考坐标系 zOy。设有一个平面图形如图 1－4 所示，各微小部分的面积分别为 ΔA_1、ΔA_2、$\cdots\Delta A_n$；其坐标位置分别为 (z_1, y_1)，(z_2, y_2)，$\cdots$ (z_n, y_n)。总面积为 A，形心坐标为 (z_c, y_c)。则其形心坐标公式为：

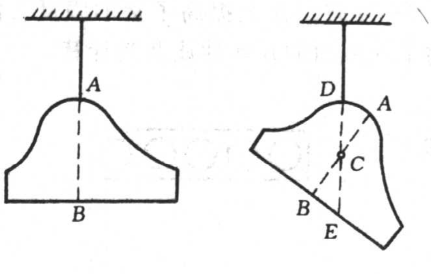


图 1－3

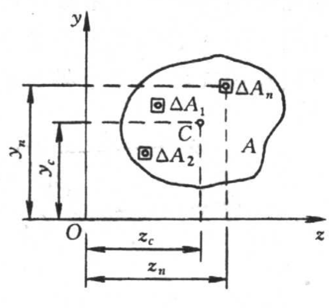
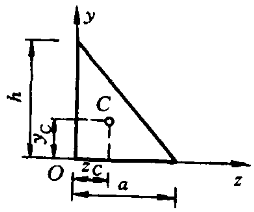
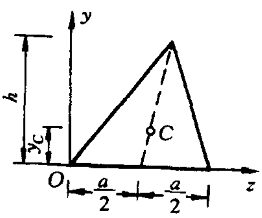
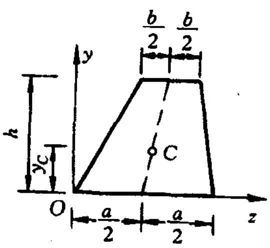
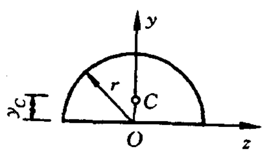
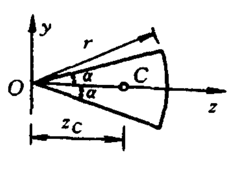


图 1－4

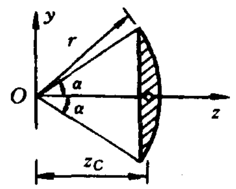
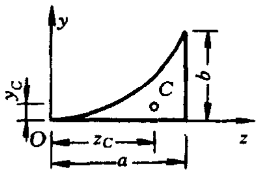
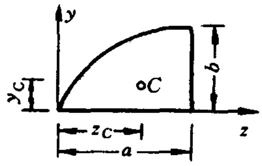
$$z_C = \frac{\Sigma \Delta A_i z_i}{A}$$
$$y_C = \frac{\Sigma \Delta A_i y_i}{A} \qquad (1-1)$$

简单图形的形心位置，可用上述公式通过无限分割的方法求得；一般也可以从有关工程手册中查到。现将几种常见的平面图形的形心位置列于表 1－1 中，以供查阅。

表 1－1　常见平面图形的形心位置

图　　形	形　心　位　置	面　　积
直角三角形 	$z_C=\frac{a}{3}$ $y_C=\frac{h}{3}$	$A=\frac{ah}{2}$
三角形 	在三中线的交点 $y_C=\frac{h}{3}$	$A=\frac{ah}{2}$
梯形 	在上、下底中点的连线上 $y_C=\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$	$A=\frac{h}{2}(a+b)$
半圆形 	$y_C=\frac{4r}{3\pi}$	$A=\frac{\pi r^2}{2}$
扇形 	$z_C=\frac{2}{3}\cdot\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	$A=\alpha r^2$

（续）

图　　形	形　心　位　置	面　　积
弓形 	$z_C=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^3\sin^3\alpha}{A}$	$A=\frac{r^2\ (2\alpha-\sin2\alpha)}{2}$
二次抛物线（1） 	$z_C=\frac{3}{4}a$ $y_C=\frac{3}{10}b$	$A=\frac{1}{3}ab$
二次抛物线（2） 	$z_C=\frac{3}{5}a$ $y_C=\frac{3}{8}b$	$A=\frac{2}{3}ab$

常用杆件的截面形状往往是由几个简单图形组合而成。求组合图形的形心时，可先将其分割成几个简单图形，找出简单图形的形心，然后按式（1－1）求出组合图形的形心，这种求组合图形形心的方法称为分割法。

例 1－1　有一“T”字形截面如图 1－5 所示，已知 $a=2\text{cm}$，$b=10\text{cm}$，试求此截面的形心位置。

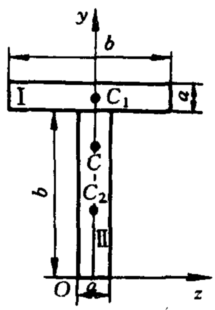


图　1－5

解：

（1）将 T 形截面分割成Ⅰ、Ⅱ两块矩形，形心分别为 C_1、C_2。

（2）坐标原点选在图形Ⅱ的下边如图 1－5 所示，因图形有对称性，取对称轴为 y 轴。

（3）各矩形的面积和形心坐标为：

$$A_1=20\text{cm}^2,\ z_1=0,\ y_1=11\text{cm}$$

$$A_2=20\text{cm}^2,\ z_2=0,\ y_2=5\text{cm}$$

（4）应用式（1－1）计算“T”形截面形心

$$z_C=\frac{A_1z_1+A_2z_2}{A_1+A_2}=\frac{A_1\cdot0+A_2\cdot0}{A_1+A_2}=0$$

$$y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}=\frac{20\times11+20\times5}{20+20}\text{cm}=8\text{cm}$$

关于 $z_C=0$，从图形的对称性也可直接看出。因为 y 轴为对称轴，T 形截面形心必在 y 轴上，即 z_C 必为零。

有些组合图形，可以看成从某个简单图形中挖去另一个简单图形。求这类组合图形的形心，仍可应用分割法，不过挖去面积应取负值，这种求形心的方法称为负面积法。

例 1－2 如图 1－6 所示，已知大圆半径为 R，小圆孔半径为 r，两圆中心距为 a，求阴影部分的形心。

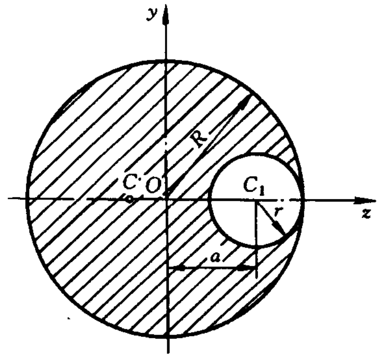


图 1－6

解：

(1) 将此图形分成半径为 R 的圆面积和半径为 r 的圆面积，但后者面积为负。

(2) 选坐标系 zOy 如图所示。

(3) 各简单图形的面积和形心坐标：

$$A_1=\pi R^2,\quad z_1=0$$

$$A_2=-\pi r^2,\quad z_2=a$$

(4) 由式 (1－1) 计算形心坐标为：

$$z_C=\frac{A_1z_1+A_2z_2}{A_1+A_2}=\frac{\pi R^2\cdot 0+(-\pi r^2)\cdot a}{\pi R^2-\pi r^2}=-\frac{ar^2}{R^2-r^2}$$

由图形对 z 轴对称关系可知：$y_C=0$，故所求形心 C 的位置坐标为$\left(-\dfrac{ar^2}{R^2-r^2},\ 0\right)$。由于 $R>r$，故 z_C 为负值，这表示形心 C 应位于原点 O 的左侧。

二、截面二次矩（惯性矩）

1. 简单图形的截面二次矩

设任意平面图形的面积为 A，在该图形所在平面内选取一坐标系 zOy 如图 1－7 所示，从坐标 $(z,\ y)$ 处取一微面积 dA，则乘积 $y^2\cdot dA$ 称为该微面积对 z 轴的截面二次矩。对整个平面图形积分，得到平面图形对 z 轴的截面二次矩，用 I_z 表示

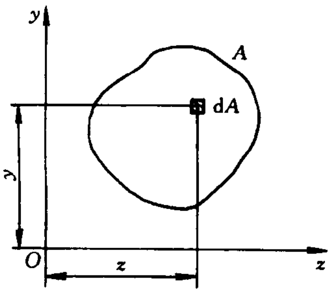


图 1－7

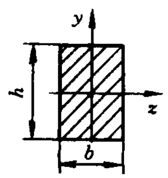
$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A \qquad (1-2a)$$

同理得到平面图形对 y 轴的截面二次矩

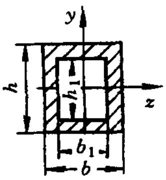
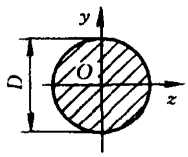
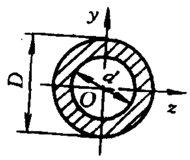
$$I_y=\int_A z^2\mathrm{d}A \qquad (1-2b)$$

截面二次矩恒为正值，常用单位是 m^4 或 mm^4。简单图形的截面二次矩可直接用积分法求得。现将常用平面图形的截面二次矩列于表 1－2 中，以供查阅。

表 1－2 常见平面图形的截面二次矩、抗弯截面系数和惯性半径

平面图形	截面二次矩	抗弯截面系数	惯性半径
	$I_z=\frac{bh^3}{12}$ $I_y=\frac{hb^3}{12}$	$W_z=\frac{bh^2}{6}$ $W_y=\frac{h\cdot b^2}{6}$	$i_z=\frac{h}{\sqrt{12}}$ $i_y=\frac{b}{\sqrt{12}}$

（续）

平面图形	截面二次矩	抗弯截面系数	惯性半径
	$I_z=\frac{bh^3-b_1h_1^3}{12}$ $I_y=\frac{h_1b^3-h_1b_1^3}{12}$	$W_z=\frac{bh^3-b_1h_1^3}{6h}$ $W_y=\frac{hb^3-h_1b_1^3}{6b}$	$i_z=\frac{\sqrt{bh^3-b_1h_1^2}}{\sqrt{12(bh-b_1h_1)}}$ $i_y=\frac{\sqrt{hb^3-h_1b_1^3}}{\sqrt{12(bh-b_1h_1)}}$
	$I_z=I_y=\frac{\pi D^4}{64}\approx 0.05D^4$	$W_z=W_y=\frac{\pi D^3}{32}\approx 0.1D^3$	$i_y=i_z=\frac{D}{4}$
	$I_z=I_y=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$ $\approx 0.05D^4(1-\alpha^4)$ 式中 $\alpha=d/D$	$W_z=W_y=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$ $\approx 0.1D^3(1-\alpha^4)$ 式中 $\alpha=d/D$	$i_z=i_y=\frac{\sqrt{D^2+d^2}}{4}$

2. 平行移轴公式

表 1－2 中所列公式均为图形对其形心轴的截面二次矩，但图形对非形心轴的截面二次矩应当如何求解呢？下面介绍平行移轴公式。

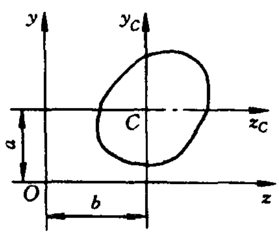


图 1－8

图 1－8 所示为任一平面图形，其面积为 A，C 为图形的形心，z_C 是形心轴，z 轴与 z_C 轴平行且相距为 a，则图形对 z 轴的截面二次矩为：

$$I_z = I_{zC} + a^2A \tag{1-3a}$$

同理图形对 y 轴的截面二次矩为

$$I_y = I_{yC} + b^2 \cdot A \tag{1-3b}$$

即平面图形对某轴的截面二次矩等于图形对平行于该轴的形心轴的截面二次矩加上图形面积与两轴之间距离平方的乘积。这一关系称为平行移轴公式。由上式可见，平面图形对形心轴的截面二次矩最小。

需要指出，截面二次矩是对一定的坐标轴而言的，对于不同的坐标轴，它们的数值是不同的。

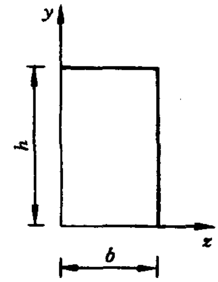


图 1－9

例 1－3 如图 1－9 所示，矩形截面高为 h，宽为 b，求矩形截面对 z 轴、y 轴的截面二次矩。

解：由于矩形截面对形心轴 z_C 的截面二次矩查表得到：

$$I_{zC} = \frac{1}{12}bh^3$$

则利用平行移轴公式得到，矩形截面对 z 轴的截面二次矩：

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times bh = \frac{1}{3}bh^3$$

同理得：

$$I_y = \frac{1}{12}h \cdot b^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \times bh = \frac{1}{3}h \cdot b^3$$

3．组合图形的截面二次矩

由截面二次矩定义可知，组合图形对其形心轴的截面二次矩就是等于组成它的各简单图形对同一轴截面二次矩之和，见式（1-4）。简单图形对本身形心轴的截面二次矩可通过查表求得，再应用截面二次矩的平行移轴公式，便可求得各简单图形对组合图形形心轴的截面二次矩。

$$I_z = \Sigma I_{zi} \tag{1-4}$$

式中　I_{zi}——各简单图形对组合图形形心轴的截面二次矩；

　　　I_z——组合图形对形心轴的截面二次矩。

工程实际中，常用构件截面的形状多为简单图形或几个简单图形的组合。所以组合图形的截面二次矩在力学计算中经常用到。

例 1-4　试计算如图 1-10 所示 T 形截面对其形心轴的截面二次矩。

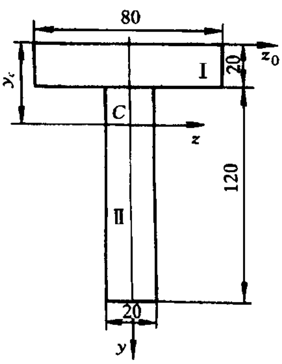


图 1-10

解：

（1）确定 T 形截面的形心位置。将截面分为 Ⅰ、Ⅱ 两块矩形，选矩形 Ⅰ 的上边 z_0 为参考边，坐标系如图所示，则截面形心坐标为：

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{80 \times 20 \times 10 + 20 \times 120 \times (20 + 60)}{80 \times 20 + 20 \times 120}\text{mm} = 52\text{mm}$$

y 轴为对称轴，$z_C = 0$

（2）计算 T 形截面对形心轴 z 的截面二次矩

①矩形 Ⅰ 对 z 轴的截面二次矩：

$$I_{z1} = \left[\frac{80 \times 20^3}{12} + 80 \times 20 \times (52 - 10)^2\right]\text{mm}^4$$

$$= 287.6 \times 10^4\text{mm}^4$$

②矩形 Ⅱ 对 z 轴的截面二次矩

$$I_{z2} = \left[\frac{20 \times 120^3}{12} + 20 \times 120(80 - 52)^2\right]\text{mm}^4$$

$$= 476.2 \times 10^4\text{mm}^4$$

③T 形截面对 z 轴的截面二次矩

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} = (287.6 + 476.2) \times 10^4\text{mm}^4$$

$$= 764 \times 10^4\text{mm}^4$$

例 1－5 计算如图 1－11 所示阴影部分图形对其形心轴 z 的截面二次矩。

解：

(1) 求组合图形的形心位置。将图形看成由一矩形上挖去一圆形组成。以矩形底边 z_0 为参考边，y 轴为对称轴，如图所示。

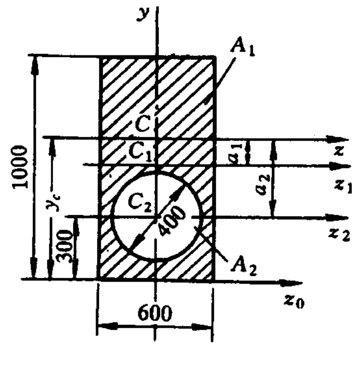


图 1－11

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{600 \times 1000 \times 500 - \frac{\pi}{4} \times 400^2 \times 300}{600 \times 1000 - \frac{\pi}{4} \times 400^2} \text{mm} = 553\text{mm}$$

$$z_C = 0$$

(2) 阴影部分对 z 轴的截面二次矩

①矩形对 z 轴的截面二次矩：

$$I_{z1} = \frac{600 \times 1000^3}{12} + 53^2 \times 600 \times 1000\text{mm}^4 = 517 \times 10^8\text{mm}^4$$

②图形对 z 轴截面的二次矩：

$$I_{z2} = \frac{\pi \times 400^4}{64} + 253^2 \times \frac{\pi \times 400^2}{4}\text{mm}^4 = 93 \times 10^8\text{mm}^4$$

③阴影部分对 z 轴的截面二次矩：

$$I_z = I_{z1} - I_{z2} = 424 \times 10^8\text{mm}^4$$

三、截面二次极矩

如图 1－12 所示，平面图形对某点的截面二次极矩的定义是：微面积 dA 与它到圆心距离 ρ 平方的乘积在整个平面图形上的积分。即

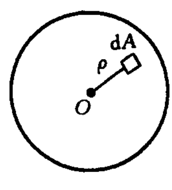


图 1－12

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \qquad (1-5)$$

截面二次极矩恒为正值，单位是 m^4 或 mm^4。利用上式积分得到实心圆和空心圆的截面二次极矩。

1) 圆形截面如图 1－13a 所示（设直径为 D）

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \qquad (1-6a)$$

2) 圆环形截面如图 1－13b 所示（设外径为 D，内径为 d）

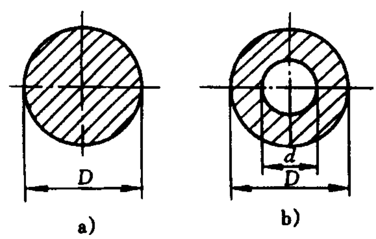


图 1－13

$$I_\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \text{ 令 } \alpha = d/D$$

$$\text{则 } I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \qquad (1-6b)$$

其中 $\alpha = d/D$ 为空心圆轴内、外径之比值。

四、惯性半径

在实际应用中，常会出现 I_z/A，I_y/A 这样的几何量值，令：

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{1-7a}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \tag{1-7b}$$

i_y，i_z 分别为截面对 y 轴、z 轴的惯性半径。单位是 m 或 mm。

常见截面的惯性半径见表（1－2）

第二节　应力与应变

一、应力的概念

我们知道用一根麻绳起吊一重物，绳受拉力作用，其内部必然产生轴向内力 N。但一根麻绳是由无数根麻丝组成的，在外力作用下每根麻丝都参加了工作，都要产生内力，所以截面上内力实际上是个分布力，这个分布力的合力就是轴向内力 N。如果仅仅会计算构件的内力，是不能完全解决工程问题的。因为用粗、细两根麻绳同样吊起 1kN 的重物，绳内轴力 N 均等于 1kN，若用粗绳吊起 1kN 重物则不会断，而用细绳起吊则一吊就断。这说明两根绳内每一根麻丝所受的内力大小不一样，用力学的观点来看，就是单位面积上的内力不相等，这个大小差别主要是同麻绳的截面面积有关。因此，对工程构件进行强度计算时，判断杆件破坏与否的依据不是内力的大小，而是以单位面积的内力大小为依据。我们将作用在单位面积上的内力称为应力。它反映了内力在面积上的分布密度。应力常被简单地叫做一点处内力大小。

应力根据外力形成的不同有正应力和切应力两种基本形态；垂直于截面的应力称为正应力或法向应力，用 σ 表示；相切于截面的应力称为切向应力或切应力，用 τ 表示。

在国际单位制中，应力单位是帕斯卡，简称帕，符号为 Pa。

$$1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$$

工程实际中应力数值较大，常以千帕（kPa）、兆帕（MPa）或吉帕（GPa）为单位。

$$1\text{kPa} = 10^3\text{Pa}$$

$$1\text{MPa} = 10^6\text{Pa}$$

$$1\text{GPa} = 10^9\text{Pa}$$

工程图样上常以 mm 为单位，则：

$$1\text{MPa} = 1\text{N/mm}^2$$

本书将按工程计算的方便，应力主要用 MPa 的单位。

二、应变的概念

物体在外力作用下，不但物体尺寸会改变，也可能发生形状的改变。我们用应变表示应力状态下材料的相对变形，它亦有类似应力的两种基本形态，线应变和切应变。

1. 线应变

我们知道，杆件在外力作用下，会变得又细又长，即杆件的长度发生了改变，这种由于长度尺寸的变化而引起的变形称为线变形如图 1－14 所示。

$$\Delta l = l_1 - l \qquad (1-8a)$$

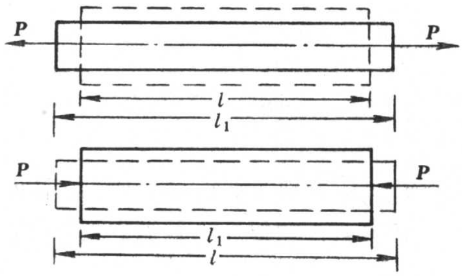


图 1-14

但是，线变形 Δl 随杆件原长 l 不同而变化，为了避免杆件原长的影响，用单位长度的变形量反映变形的程度。称为线应变，用符号 ε 表示：

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} \qquad (1-8b)$$

其中 l 为杆件原长，l_1 为杆件变形后的长度。线应变是一个无单位的量值。

2. 切应变

为了说明什么是切应变，我们作一个简单的实验，手拿一叠卡片如图 1-15a 所示，并在卡片上、下两侧加上一对剪切力，那么这叠卡片将发生相对错动如图 1-15b 所示。

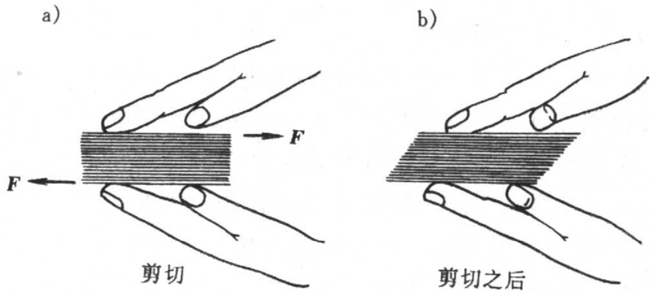


图 1-15

如果用类似的方法去处理一块整体材料，材料在一对剪切力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，截面将产生相对错动，矩形形状变为平行四边形，即材料的形状发生改变如图 1-16 所示。这种由于角度的变化而引起的变形称为切应变，用符号 γ 表示。因为 γ 为小变形且以弧度（rad）为单位，则：

$$\gamma = \frac{x}{h} \qquad (1-9)$$

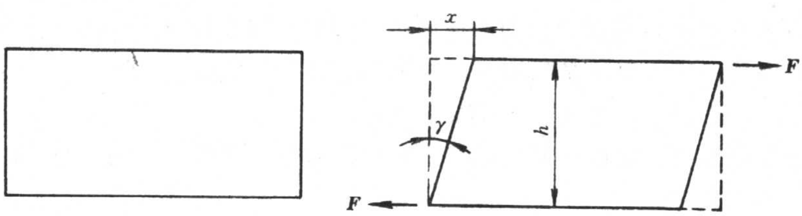


图 1-16

第三节　四种基本变形横截面上的应力

工程构件破坏的依据是应力的大小。从应力最大处开始破坏，直至杆件全部断裂。例如挑水时，扁担中间表层首先出现裂纹，最后在中间位置全部断开。因此，工程构件在进行强度计算时，必须确定杆件上最大应力及其位置。本节以四种基本变形为例，说明杆件上应力分布情况。而其它复杂变形由于都是由基本变形组合而成，可依此推理得到。

一、轴向拉伸和压缩时横截面上的应力

为说明轴向拉压杆横截面上应力分布情况，我们先做一个实验。取一根橡胶制成的等截面直杆如图 1-17a 所示，在其表面上沿垂直于杆轴线方向画横向线 ab、cd。然后对其施加沿轴线作用一对大小相等，方向相反的外力 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$

在受到拉伸后，试件产生变形，ab、cd 分别平移到$a'b'$和$c'd'$的位置如图 1－17b 所示。且各线段仍与杆轴线垂直。由此可以得到平面假设，即变形前为平面的各横截面，在变形后仍为平面，且与杆的轴线垂直。设想杆件是由无数条与轴线平行的纵向纤维组成，由平面假设推断，纵向纤维产生了相同的伸长量。伸长量相同，则各纵向纤维的受力也相同，由此断定，横截面上的应力是均匀分布的，方向垂直于横截面如图 1－17c 所示。即轴向拉（压）杆横截面上仅有正应力存在且各点的正应力大小相等。其计算公式为：

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{1-10}$$

式中 N ——横截面的轴力，单位用 N 或 kN；

A ——横截面的面积，单位用 m^2 或 mm^2。

正应力 σ 的正负号规定与轴力 N 相同，拉伸时 σ 为拉应力取正值，压缩时 σ 为压应力取负值。

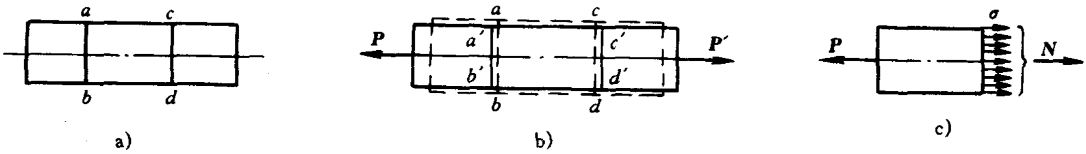


图 1－17

例 1－6 三角支架如图 1－18a 所示，杆 AB 为圆钢杆，直径 $d = 16mm$；杆 BC 为正方形截面木杆，边长 $a = 100mm$。已知荷载 $P = 30kN$，求各杆横截面上正应力。

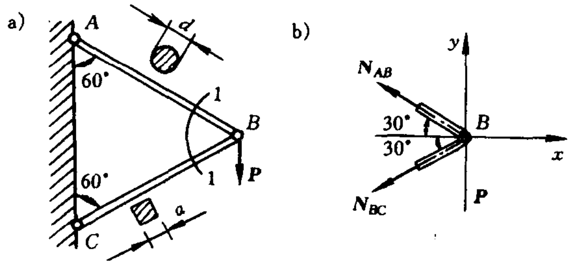


图 1－18

解：由于支架在 A、B、C 处为铰链，杆中间不受外力作用，故杆 AB、BC 均为二力杆，即为轴向拉（压）杆。

（1）求出各杆轴力

用截面 1－1 截取节点 B 为研究对象，并假设各杆受拉如图 1－18b 所示，列出平衡方程：

$$\Sigma F_x = 0, -N_{AB}\cos30° - N_{BC}\cos30° = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, N_{AB}\sin30° - N_{BC}\sin30° - P = 0$$

联立解得

$$N_{AB} = P = 30kN \text{（拉）}$$

$$N_{BC} = -P = -30kN \text{（压）}$$

（2）求各杆正应力

AB 杆：

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{30 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 16^2} = 149.3N/mm^2 = 149.3MPa\text{(拉)}$$

BC 杆：

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{-30 \times 10^3}{100 \times 100} = -3N/mm^2 = -3MPa\text{(压)}$$

二、圆轴扭转时横截面上应力

1. 圆轴扭转时的变形现象

为了分析圆轴扭转时横截面上的应力，现取一根橡胶制成的等直圆轴，在其圆柱表面上任意画两条平行于轴线的纵向线和垂直于轴线的圆周线，然后在其两端分别作用一力偶矩 M，使圆轴发生扭转变形如图 1－19 所示。观察其变形现象可以发现：

1）圆周线的形状、大小及两圆周线间的距离均保持不变，但绕轴线旋转了不同角度。

2）纵向线近似地为直线，只是倾斜了同一角度 γ，原来的小矩形变成了平行四边形。

上述变形现象表明，圆周扭转时，轴的直径和长度均未改变。其各横截面像刚性圆盘一样，绕轴线发生了不同角度转动。由此可得出平面假设：圆轴扭转前的横截面变形后仍为平面，且形状和大小及间距不变，仅横截面间发生相对转动。

2. 圆轴扭转时的应力

根据实验现象及平面假设可得出三点结论：

1）由于横截面间距不变，纵向线沿轴线方向无变形，所以横截面上没有正应力。

2）由于横截面间绕轴线的相对转动，使小矩形沿圆周方向的两侧发生相对错动，出现剪切变形。故横截面上必有切应力存在。又因圆截面半径长度不变，切应力方向必与半径垂直。

3）在横截面绕轴线转动过程中，截面上各条半径都转过了同一转角 φ。如 OA 移到了 OA_1。圆周处移动最大、圆心处为零，其余各点越接近圆心，位移越小。即圆周上各点位移量的大小与该点到圆心距离成正比。所以各点的切应力与各点到圆心的距离成正比。

综上所述，圆轴扭转时，横截面上切应力分布规律如图 1－20 所示。即横截面上各点切应力的方向与半径垂直，指向与截面扭矩转向一致，大小与该点到圆心距离 ρ 成正比，圆心处切应力为零；圆周处切应力最大。

图 1－19

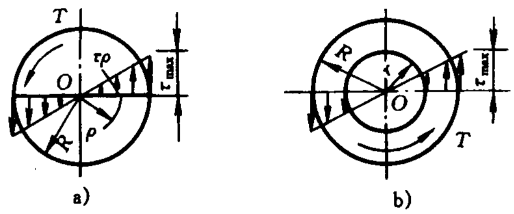


图 1－20

a）圆形截面 b）圆环形截面

弄清了切应力分布规律后，利用各点处切应力对圆心处的力矩之和等于扭矩这个等效条件，从而得出切应力和扭矩的关系式（推导从略），即圆轴扭转时，任一截面上任一点切应力计算公式：

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_\rho} \tag{1-11}$$

式中 τ——横截面上离圆心距离为 ρ 各点的切应力；

T——横截面上扭矩；

I_ρ——该截面对圆心的截面二次极矩，它与截面形状、尺寸有关，反映截面几何性质，单位是 m^4 或 mm^4。其计算公式见式（1－6a）、（1－6b）。

上式表明，切应力 τ 与横截面上的扭矩 T 及该点到圆心距离 ρ 成正比，与该截面对圆心的截面二次极矩 I_ρ 成反比。利用此公式计算时，T 和 ρ 均以绝对值代入，切应力 τ 的方向由扭矩 T 的转向确定。

3. 圆周扭转时，横截面上最大切应力

由圆轴扭转时横截面上切应力分布规律可知，最大切应力位于圆截面外边缘处，其大小计算公式为：

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot \rho_{\max}}{I_\rho} = \frac{T \cdot R}{I_\rho} = \frac{T}{I_\rho / R}$$

令
$$W_P = I_\rho / R \tag{1-12}$$

则
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_P} \tag{1-13}$$

式中 W_P 只与截面的形状和几何尺寸有关，称为抗扭截面系数，它反映圆轴抵抗扭转变形的能力。单位是 m^3 或 mm^3。

实心圆形截面的抗扭截面系数（假设直径为 D）。

$$W_P = I_\rho / R = \frac{\frac{\pi D^4}{32}}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} \tag{1-14a}$$

空心圆形截面的抗扭截面系数（假设外径为 D，内径为 d）。

$$W_P = \frac{I_\rho}{R} = \frac{\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) \tag{1-14b}$$

其中 $\alpha = d/D$

例 1－7 图 1－21 所示为一传动轴 AB，传递的功率 $P=7.5\text{kW}$，转速 $n=360\text{r/min}$，轴的 AC 段为实心圆截面，CB 段为空心圆截面。已知 $D=30\text{mm}$，$d=20\text{mm}$。试计算 AC 段横截面边缘处的切应力以及 CB 段横截面上外边缘和内边缘处的切应力。

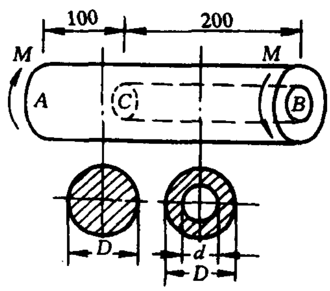


图 1－21

解：

（1）计算外力偶矩：

$$m = 9550\frac{P}{n} = 9550\frac{7.5}{360}\text{N}\cdot\text{m} = 199\text{N}\cdot\text{m}$$

（2）计算各段截面扭矩

AC 段和 CB 段各截面扭矩均为：

$$T = m = 199\text{N}\cdot\text{m}$$

（3）计算应力。

AC 段截面抗扭截面系数

$$W_{PAC} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3.14 \times 30^3}{16}\text{mm}^3 = 5.301 \times 10^3\text{mm}^3$$

CB 段截面二次极矩和抗扭截面系数

$$I_{PCB} = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) = \frac{3.14 \times 30^4}{32}\left[1-\left(\frac{20}{30}\right)^4\right]\text{mm}^4 = 6.381 \times 10^4\text{mm}^4$$