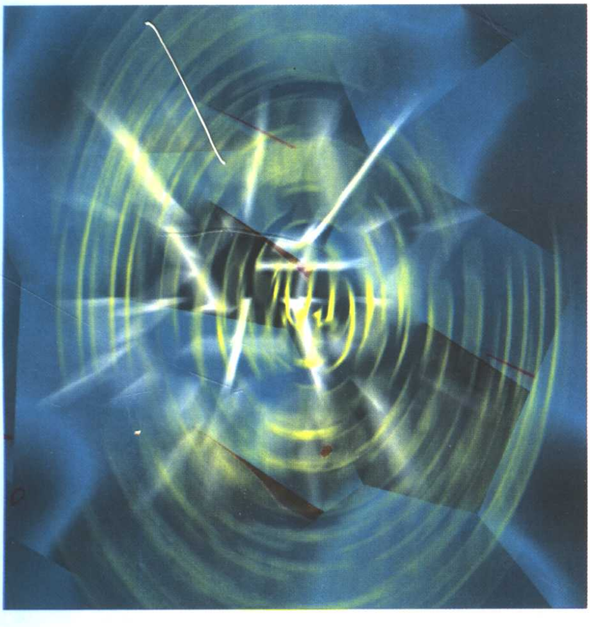
中学生数学视野丛书

ZHONGXUESHENGSHUXUESHIYECONGSHU

# 猜想，一道绕不过的湾

CAIXIANG, YIDAO RAOBUGUO DE WAN

张楚廷 编著



湖南教育出版社

中 学 生 [illegible] 书

ZHONGXUESHENGSHUXUESHIYECONGSHU

# 猜想，一道绕不过的湾

CAIXIANG, YIDAO RAOBUGUO DE WAN

张楚廷 编著

湖 南 教 育 出 版 社

中学生数学视野丛书

**猜想，一道绕不过的湾**

张楚廷　编著

责任编辑：胡　坚　郑绍辉

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南望城湘江印刷厂印刷

787×1092毫米　32开　印张：6　字数：140000

1999年6月第1版　1999年6月第1次印刷

印数：1—1000

ISBN7—5355—2851—1/G·2846

定价：7.80元

# 《中学生数学视野》丛书编委会

# 序　言

我们有一个数学世界，它为现实世界（科学）提供大量有力的工具，它还为精神世界（哲学）贡献丰富深刻的思想.

人们创造数去记载物件的个数、长度、速度等，运用多项式去表述物理定律，用矩阵去作多种商品的价目表，去刻画几何中的变换. 人们创造微积分，使得在研究几何图形和物理现象时有了强有力的工具. 例如，根据物理定律数学工作者通过计算能判定某一从未发现的星体必将在某天某时在某方向上出现，而后天文观测者确在该天该时该方向观测到它. 数学世界在爱因斯坦的相对论出现之前已准备好一种几何空间，刚好满足它的需要，我们日常生活中离不开的计算机也是先在数学世界中酝酿，而后由数学工作者设计出来的. 只要想一下：装进一个特殊软件，计算机就能帮你证明平面几何定理，就能和国际象棋冠军对阵，就能在平稳对接宇宙飞船中起重要作用，只要想一下数学和计算机科学的手足关系，谁都会赞赏数学世界提供解决问题能力的神奇和伟大. 今日数学世界仍在继续为我们创造和贡献新工具、新方法、新理论.

数学世界中的确还有另外一面. 按照数学自身发展的规律提出和研究的一些问题，它们是数学世界中特有的现象，例如大家都听说过的哥德巴赫问题，当你接触、研究它

们时，你会感到一种棋艺味、艺术味、哲学味，它们本身看来不像是研究现实世界可以用得上的工具，然而它们却和数学世界中的工具性质部分相互呼应、相互影响、紧密联系而共同组成一个绚丽多彩的统一世界.

中学数学是数学世界的基石，是进入数学世界的必经之路，是数学教育工作者精心为全体中学生设计的多层台阶.然而他(她)们中的一些数学爱好者一定会希望向周围看一看，或者爬到一个山头，或者钻入小林的深处，领略一下数学世界中的风采，体验一下数学世界的气氛，从而获得一些数学兴致和数学修养.我们这套丛书就是为这些中学生编写的.如果说英语给我们打开一个通向境外世界的窗口，那么中学数学给我们打开了通向数学世界的大门，而这套丛书将引导我们去欣赏它的一些景点，扩大我们的数学视野.

我们常谈论数学的力量(这是大家都同意的)，的确，搞经济理论的人，常是数学出身的人得到大奖，搞计算机科学的人，也常是数学出身的人有出色表现.人们还谈论数学的美(或许有人不同意)，的确，在形式符号掩盖下，数学中完美的结构、深刻的和谐、意外的联系都给人一种美的享受，美是有力量的.无疑，在青少年时期给自己建立一个好的数学基础和数学修养，那将是一笔终身享受、终身受益的资本.

但愿这套丛书在这方面能对有数学兴趣的中学生们有所帮助.

**刘绍学**

1997 年 11 月写于北京师范大学

# 前　言

深入浅出是很难的,没有深入就不可能浅出。我对数学没有深入的理解,对数学猜想没有深入的体会,因此要把猜想讲得通俗易懂十分困难。

当然,我觉得猜想很有意思,很起作用,无论对学习还是对研究都很重要,这个感觉还是有,所以对讨论这个问题也还有兴趣。因此也在一个十分矛盾的心境下写了这本书。

这个前言实际上是在写完此书后再写的,是后话。这本书的前两章都是很容易读懂的,如果某些有经验的中学数学教师来写这两章,相信会写得更好,更有趣。

从第三章起,可能有些内容是中学所没有的了。但我们总是力图叙述得使中学生也能看懂。如果讲到猜想而不讲到数学中一些经典的猜想、一些著名的猜想,似乎是到了北京而没有去故宫、颐和园,似乎不能充分说明猜想是一道绕不过的湾。这样,我们就面对一个棘手的问题:这些著名的猜想大多是中学生不易弄明白的,于是要想办法使他们大体弄明白。现在只能这样说,我们是作了这种努力的。

这本书中也提到了数十个猜想,也有了一定数量的

猜想。但好在这不是一本教科书,更不必去为了迎接某项考试而读它,因此遇到某些具体内容一时难以弄懂时,暂且搁下来甚至暂且绕过它也无妨。毕竟绝大多数是可以弄明白的,而只要做到这一点也就够了。

能否弄明白是一个问题,但有兴趣的话可能容易弄明白的;而一旦比较明白了,兴趣也可能增大。希望喜欢数学的学生都能喜欢猜想,这会帮助去更喜欢数学,并把数学学得更好。

这本书的第九章是个结语,这一章与有些书的后记不是一回事,这一章不仅写了一些感受,也对许多问题作了概括。如果采取比较自由的方式,完全可以把第九章先看看,或者充其量在看过第一、二章后看第九章,回过头再去看别的章节,有机会在看过全书之后还看看第九章。

猜想确实可以“引导我们去欣赏它(数学)的一些景点,扩大我们的数学视野”,使我们“获得一些数学兴致和数学修养”(刘绍学语)。

**张楚廷**

1998年5月写于湖南师范大学

# 目　　录

# 第一章

# 日常生活中的猜想

从大连坐船到威海，要经过渤海湾；从海口到越南的海防，要经过北部湾；从缅甸到斯里兰卡，要经过孟加拉湾；从伊朗到沙特阿拉伯，要经过波斯湾；从新奥尔良到洪都拉斯，要经过墨西哥湾……一个个的港湾.

过了中午12点，才能进到下午；起码要认识一千多个字，才能慢慢开始看小说；不学乘法，没有办法学除法……也是一道道"港湾"，难以绕过的"港湾".

人的思维运动过程也要经过一些"港湾"吗？我们来看看一些日常生活的例子吧！

## 一、明天是什么天气？

没听气象台的预报，自己来估一下吧．即使听过了，总感到这一向气象台的预报也不太准确，还是自己来估估吧.

天气这么闷，从早到晚温差也不大，一层楼地面似乎起潮了——看来，明天可能会有雨．妈妈却说："不一定，这种潮闷天气有时候要持续两三天才有雨来，可能后天才有雨."我又说："这

种闷热天气没有一场雨来,天气就很难清爽起来."妈妈则说:"一场雨不是想来就来得了的,现在我们都只是猜猜而已."

## 二、这支曲子是什么乐器演奏的?

这不是钢琴弹出来的,好像钢琴的声音比这个曲调更铿锵有力些,节奏还明快些;也不像是管乐奏出来的,管乐奏出的曲调比这个曲子似乎稍粗犷些,嘹亮些;大概是弦乐奏出的,小提琴?高音部分,小提琴似更尖细些,也不像;这不是二胡奏出的吗?只有二胡才拉得出这样悠扬、舒展、优美的曲调,而且,这不就是《二泉映月》吗?我猜:这是二胡奏出的《二泉映月》!猜对了吗?妈妈告诉我:猜对了.

妈妈把这支曲子只放了两句,然后就要我猜,我把自己熟悉的一些乐器都想了想,又比了比,终于觉得这更像是二胡演奏出来的,差一点猜成是小提琴演奏的了.妈妈把这支曲子继续放下去,再多几句之后,我更确信是二胡演奏的了,似乎还穿插着其它乐器的配调,但主乐器是二胡.

## 三、这支笔丢到哪里去了?

一天晚上7点,开始做家庭作业了,拿出了课本,又拿练习本,再到书包里拿笔,可是这支笔却不在书包里了,将书包里里外外几个口袋都找遍了也未找着笔.丢了!丢到哪里去了呢?

很简单,第二天向妈妈要钱再买一支就是了.啊,可能不行,笔虽不贵,妈妈总可能问问:原来那支笔呢?所以,也得想想,总得有个交代.

那天一整天,我只到过三个地方:家里,教室里,乒乓球室

里.那支笔只可能丢在这三个地方——这是最初的猜测.这个猜测肯定不令人满意.

去乒乓球室打了20多分钟球,打热了还脱过外衣,是不是脱衣时笔从口袋里掉出去了?很可能——这是第二次猜测.去问问跟我同台打球的两位同学李小焕和王大发看,只有我们三人在那里,而且他们两人最后离开.结果李、王二位都说未见到笔;然后我又去那张球台边搁衣服的地方看了看,也未见.不太可能丢在乒乓球室了.

丢在家里的可能性几乎不存在,下午4点以前我还在教室用过笔哩.对了,4点以后,我到李小焕那里讨论过一个问题,并且带着笔去写写画画过,是不是讨论完毕之后把笔丢在小焕的桌子上了?问小焕,小焕说"未见过你的笔".我眼睛朝地上一望,笔就在小焕的课桌脚下哩.这一回,在排除丢在家里的可能性之后,终于又猜到教室里,而且猜到小焕的桌子上,这第三次算是猜对了.自然用不着向妈妈要钱再买了.

看来,不动脑子,图简单,丢了再去买,那就无需去猜了.要想找到笔,还真得猜猜哩!而且,似乎会动脑子就是要会猜,越会猜,成功的可能性还越大哩!这猜测,是否也是难以绕过的"港湾"呢?

现在,我们回想一下,我们曾经作过猜测没有?仔细回忆,各种各样的猜测、猜疑、推想还不少哩!

在大连主场,中国足球队打伊朗,我猜中国队会赢,果然,中国以2:0领先了,此时,我更感到自己猜对了;自从范志毅在禁区内犯规被罚一个点球后,我开始怀疑起自己的猜测,此后中国队紧缩自己的防线,越打越保守,越打越被动,我又开始了另一个猜测:糟了,不太可能赢了.

在天津打乒乓球"大满贯",男单决赛是孔令辉对沙姆索诺

夫,沙姆索诺夫和瓦尔德内尔是欧洲两位中国选手难以对付的大将,孔沙之战结果将如何,真还不好猜,似乎取胜的把握都是0.5,孔令辉是比较善于对付欧洲选手的,但对沙姆索诺夫的把握也就是0.5.战幕拉开,孔令辉的接发球不错,没有让沙姆索诺夫在前几板占便宜,这是关键,因为打起相持球来,沙并不占上风,就凭这几桩,我开始猜了:孔令辉会赢!虽然打得很艰苦,这是早就猜得到的,但结果真是孔令辉胜了.

有一次,我和李小焕讨论问题,讨论完了,我偶尔注意到他的面部表情:似笑非笑的.我猜疑:他可能是觉得我的看法好肤浅,这种表情大概是看不起我的意思.但我这猜疑还不很重,加之他确实学得比我好,所以此后我还是跟他讨论问题,发现他在讨论过程中总是很诚恳的,而且每遇到我的思路对头时,他都加以肯定,鼓励我.于是,我发觉我曾有过的猜疑不对.而且还很庆幸,幸好没有把那种猜疑很当真,不然,既会错怪了他,也会破坏我和他自小以来的友情,在学习上也少了一份可从他那里获得的帮助.

看来,这样那样的猜测、猜疑真是有过不少.并且猜起来多少都有一些依据,依据足不足,猜得对不对,好像都说不定,各种情形都有过.

# 第二章

# 数学学习中的猜测

在数学学习过程中，你也曾有过猜测、猜想，也需要进行猜想．

## 2.1 代数练习中的猜想

$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$，谁大？当然是$\sqrt{3}$大，这用不着猜．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$与$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$谁大？$\sqrt{2}+\sqrt{3}$大．$\sqrt{5}+\sqrt{6}$与$\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$谁大？$\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$．这也只需稍小心一点，不容易弄错，也用不着猜．

$a+b$ 与 $ab$ 谁大（$a>0,b>0$）？$a+b$ 大，还是 $ab$ 大？上面已有例子提醒我们，$a+b$ 与 $ab$ 中哪个大还说不定．这就得先猜猜了．

上面的例子似乎提示我们去猜猜，当 $a$ 和 $b$ 越大时，可能 $ab$ 较大．反过来看，若 $a$ 和 $b$ 中有一个小于 1，例如 $a<1$，那么 $ab$ 就小于 $b$ 了，更会小于 $a+b$，即 $a+b>ab$．这进一步说明我们关于 $a$ 与 $b$ 都要大一些 $ab$ 才可能大于 $a+b$ 的猜想．$a=1$

时，$ab$ 也不会大于$a+b$，因为此时 $a+b>ab=b$. 可见，$a$ 与 $b$ 都要大于 1，$ab$ 才有可能大于$a+b$.

我们要回答的问题是：在何条件下 $ab>a+b$？并且我们已有了初步的猜测：$a$ 与 $b$ 都要大些. 现在不妨看看 $ab$ 与 $a+b$ 何时才相等，先令 $a=b$，则 $a+b=ab$ 即$a^2-2a=0$，得 $a=b=2$. 即当 $a$ 与 $b$ 都等于 2 时 $a+b$ 与 $ab$ 相等，故可猜想当 $a$ 与$b$ 都大于 2 时，$ab$ 大于$a+b$.

这比第一步猜想又进了一步：$a>2,b>2$ 时，$ab>a+b$. 能进而证实这一猜想吗？不妨设 $a=2+a',b=2+b',a',b'>0$，

$$\begin{aligned}ab&=(2+a')(2+b')=4+2(a'+b')+a'b'\\&=a+b+(a'+b')+a'b'>a+b\end{aligned}$$

这个猜想也是对的.

再考察一个例子：$a=4,b=1.5$，此时 $ab$ 大于$a+b$. 这说明，第二个猜想还不能令人满意：尽管 $a$ 与 $b$ 都大于 2 能保证 $ab$ 大于$a+b$，但这并非必要条件. $a$ 与 $b$ 都大于 1 是必要的却不是充分的，$a$ 与 $b$ 都大于 2 是充分的却不是必要的.

通过猜测得到了一个必要条件，又得到了一个充分条件，都算是认识进步了. 这是一个很简单的问题，可见，通过对很简单的问题的猜想，也能提高认识. 如果直接演算，

$$a+b<ab\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1\Leftrightarrow\frac{1}{a}<1-\frac{1}{b}$$

那么，当 $a>2$，且 $1<b<2$ 时，$a$ 与 $b$ 之间有一个“牵连”：$b$ 越靠近 1，$a$ 就要越远离 2；$b$ 越靠近 2(从小于 2 的方向)，$a$ 就也靠近 2(从大于 2 的方向).

当$1<b<2$ 时，只要 $a$ 充分地比 2 大. 如果 $a$ 太大也没意思，希望 $a$ 与 2 靠近一些，这样，$b$ 也需从小于 2 的方向靠近 2. 这时，我们自然想到，在 $a+b=4$ 的附加条件下来考虑 $ab>$

$a+b$的可能性.当 $a=2.5,b=1.5$ 时,$ab>a+b$ 就不成立了.于是,我们又推测,当 $a+b=4$ 时,$ab>a+b$ 恒不成立.推测得对吗?亦即 $a(4-a)>4$ 有可能成立吗?对这个不等式稍加整理就是

$$a^2-4a+4<0$$

但 $a^2-4a+4=(a-2)^2$ 是不小于 0 的.这说明我们的推测又对了.也说明,当 $b$ 和 $a$ 在 2 的左右时,$a$ 与 $b$ 距 2 的距离还不能是一样的,否则 $ab>a+b$ 不可能成立.至此,我们似乎对这个问题看得更清楚一点了.

当 $a+b=4$,$ab>4$ 看来是不可能的.但 $ab=4$ 是可能的,这只有在 $a=b=2$ 时能成立.可见,$a+b=4$ 时,在 $a=b$ 的条件下 $ab$ 取最大值.由此,我们马上又可推想,当两正数之和为一常数时,可能只有当两正数相等时,其积最大.这个推想对不对?记 $a>0,b>0,c$ 为常数,且 $a+b=c$.于是

$$ab=a(c-a)=-(a-\frac{c}{2})^2+\frac{c^2}{4}$$

显然,当 $a=\frac{c}{2}$从而 $b=\frac{c}{2}$时,$ab$ 最大.又推想对了.

以上是讨论不等式、条件不等式.现在我们来看看方程式的求根.一眼就能看出.

$$x^2+x-2=0$$

有根 $x=1$;同样能看出

$$x^3+x-2=0$$

有根 $x=1$.而且我们还知道,只要

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=0$$

$x=1$ 就是方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的一个根.