21世纪计算机专业重点课程辅导丛书

离散数学
习题与解析

第2版

胡新启　编著

Exercise & Analysis

清华大学出版社

▶ 21世纪计算机专业重点课程辅导丛书

离散数学习题与解析

（第2版）

胡新启　编著

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书遵从最新教学大纲的要求，在第1版的基础上根据读者的反馈意见进行了二次修订，增加了大量具有代表性的习题和近年研究生入学考试试题，以帮助读者深化对集合论、代数系统、图论和数理逻辑等内容的理解，达到提高分析和解决问题能力的目的。

全书共分9章，每章包含以下内容：基本知识点，对每章的知识点进行详细的归纳总结，并注重各章节前后的融会贯通；习题与解析，精选并解答了大量的相关知识点的习题，包括选择题、填空题、简答题3种题型，难度由浅入深，既有对基本知识点的考核，也有各大高等院校的考研题，并对典型习题从不同角度、用多种解法进行讲解，注重对基本概念的理解和综合解题能力的培养。

本书适合高等院校计算机及相关专业的学生作为学习辅导书，对备考计算机专业的研究生也是必备的复习资料，还适用于自学考试和计算机等级（三级或四级）考试的应试者研习。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学习题与解析/ 胡新启编著. —2版. —北京：清华大学出版社，2004
（21世纪计算机专业重点课程辅导丛书）
ISBN 7-302-08106-9

I. 离… II. 胡… III. 离散数学—高等学校—解题
IV.TP0158-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第011202号

出 版 者：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社总机：010-62770175
地　　址：北京清华大学学研大厦
邮　　编：100084
客户服务：010-62776969
组稿编辑：科海
文稿编辑：陈轶
封面设计：科海
版式设计：科海
印 刷 者：北京科普瑞印刷有限责任公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：23.5　**字数**：572千字
版　　次：2004年3月第2版　2004年3月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08106-9/TP・5861
印　　数：1～6000
定　　价：30.00元

丛 书 序

“计算机专业教学辅导丛书——习题与解析系列”自1999年推出以来，一直被许多院校采用并受到普遍好评，广大师生也给我们反馈了不少中肯的改进建议。这些都是我们修订、扩充该丛书的动力之源。同时，计算机科学与技术的持续发展和不断演化，使得传统的计算机专业教学模式也随之扩充与革新。随着计算机教学教材改革不断深化，如何促进学生将理论用于实践，提高分析与动手能力，以及通过实践加深对理论的理解程度，都是我们21世纪计算机教学亟待解决的问题。正是基于这样的需求，经过对原有丛书的使用情况的深入调研，并组织专家和一线教师对自身教学经验进行认真总结提炼之后，我们重新修订了这套“21世纪计算机专业重点课程辅导丛书”。本丛书根据计算机专业普遍采用的课程体系，在原有丛书的基础上新增了“高等数学”、“线性代数”、“概率统计”、“计算机系统结构”等专项分册，同时，依据各门课程的最新教学大纲，对原有图书内容进行了全面的修订和扩充，使其更加完备、充实。修订之后的新版丛书几乎囊括了计算机专业的各个科目，与现行计算机专业课程体系更加吻合。

“21世纪计算机专业重点课程辅导丛书”包括：

- 《高等数学习题与解析》
- 《线性代数习题与解析》
- 《概率统计习题与解析》
- 《汇编语言习题与解析》
- 《软件工程习题与解析》
- 《离散数学习题与解析》（第2版）
- 《C语言习题与解析》（第2版）
- 《C++语言习题与解析》（第2版）
- 《数据结构习题与解析》（第2版）
- 《数据库原理习题与解析》（第2版）
- 《操作系统习题与解析》（第2版）
- 《编译原理习题与解析》（第2版）
- 《计算机网络习题与解析》（第2版）
- 《计算机组成原理习题与解析》（第2版）
- 《计算机系统结构习题与解析》

本套丛书除保留原有丛书的体例风格外，还强化了如下特点：

☑ **以典型题目分析带动能力培养**

本丛书注重以典型题目的分析为突破口，点拨解题思路，强化各知识点的灵活运用，启发解题灵感。所有例题不仅给出了参考答案，还给出了详细透彻的分析过程，便于读者在解题过程中举一反三，触类旁通，从而提高分析问题和解决问题的能力。

☑ **全面复习，形成知识体系**

本丛书以权威教材为依托，对各知识点进行了全面、深入的剖析和提炼，构成了一个完备的知识体系。往往在各类考试中，一个微小的知识漏洞，就可能造成无法弥补的损失，因此复习必须全面扎实。

☑ **把握知识间的内在联系，拓展创新思维**

把握知识点之间的关系，这样，掌握的知识就能变“活”。本丛书通过对知识点的分解，找出贯穿于各知识之间的内在联系，并配上相关的例题，阐明如何利用这些内在联系解决问题，从而做到不仅授人以“鱼”，更注重授人以“渔”。

本套丛书由长期坚持在教学第一线的教授和副教授编写，他（她）们结合自己的教学经验和见解，把多年的教学实践成果无私奉献给读者，希望能够提高学生素质、培养学生的综合分析能力。

如果说科学技术的飞速发展是 21 世纪的一个重要特征的话，那么，教学改革将是 21 世纪教育工作不变的主题，也是需要我们不断探索的课题。要紧跟教学改革，不断更新，真正满足新形势下的教学需求，还需要我们不断地努力实践和完善。本套教材虽然经过细致的编写与校订，仍然难免有疏漏和不足之处，需要不断地补充、修订和完善。我们热情欢迎使用本套丛书的教师、学生和读者朋友提出宝贵意见和建议，使之更臻成熟。

本丛书作者的电子邮件：licb@public.wh.hb.cn
本丛书出版者的电子邮件：info@khp.com.cn

2004 年元月

前 言

离散数学属现代数学的范畴，不论是计算机的软件还是硬件，本质上均是一个离散系统。因此几乎所有的计算机专业都把离散数学作为一门重要的专业基础课。

本书是根据课程的基本要求、面对广大学生编写的一本辅导参考书，与教材同步，力求使读者学懂、学透、学精。希望本书能帮助读者加深对离散数学基本内容的理解，进而掌握解题的方法、技巧，以达到复习和巩固教学内容、提高分析问题和解决问题的能力。

本书共包含4个部分：集合论、代数系统、图论和数理逻辑。按教学大纲，从内容上分为9章。第1章为集合论，讨论了集合的定义、运算及相关运算性质、幂集、笛卡儿积、基本计数原理等；第2章为二元关系，讨论了关系的定义及表示、关系的运算（复合与求逆）、关系的基本类型、关系的闭包、等价关系、相容关系、偏序关系等；第3章为函数，讨论了函数的定义、复合函数、反函数及集合的基数；第4章为代数系统，主要给出了代数系统的定义和性质，半群、群及子群、陪集等的定义和性质及其判定；第5章为格，讨论了格的两种等价定义、几种特殊的格、布尔代数等；第6章为图论，讨论了图的基本定义、图的连通性及图的矩阵表示、最短路径、欧拉图和哈密顿图、二分图、图的着色等；第7章为树，讨论了树的几种等价定义、根树、最小生成树、最优二元树等；第8章为命题逻辑，讨论了命题及其符号化、命题公式及其真值、范式、重言式与自然推理；第9章为谓词逻辑，讨论了谓词逻辑命题的符号化、谓词公式及其真值、前束范式、重言蕴含式与推理规则等。每一章按如下部分展开：基本知识点，对每章的知识点进行详细的归纳总结，注重各章节前后的融会贯通；习题与解析，列举了相关知识点的大量较为全面的例题和题型，难度由浅入深，有较简单的基本知识点，也有较难的考研模拟题，对典型习题从不同角度、用多种解法进行讲解，注重对基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养。

本书适用于理工科高等院校计算机及相关专业的学生作为学习辅导书，对备考计算机专业的研究生也不失为一本好的复习资料，还适用于自学考试和计算机等级（三级或四级）考试的应试者研习。

作者在编写本书时，参考了众多的教材和考研辅导书，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在这里向有关的作者表示衷心感谢。

作者是在多年讲授“离散数学”课程的教学积累基础上编写本书的，由于水平有限，虽竭尽全力，书中难免有不妥之处，恳请广大读者提出宝贵意见。书中错误之处，敬请读者与同仁不吝指教。读者若有疑问和建议，欢迎与作者联系，E-mail地址为：huxinqifox@163.com。

作者

2004年元月

目　　录

第1章 集合论

本章学习要点

☑ 理解划分与覆盖的定义，清楚两者之间的差异。

☑ 掌握集合、子集、全集、空集等概念；熟悉常用的表示集合的方法以及用文氏图表示集合的方法；能判定元素与集合、集合与集合之间的关系；懂得两个集合之间的相等关系和包含关系的定义及性质，能够利用定义证明两个集合相等。

☑ 掌握集合的五种基本运算：并、交、补、差和对称差，并熟记集合运算的基本等式，能够利用它们来证明更复杂的集合等式。

☑ 掌握幂集的定义，及计算有限集的幂集所含元素个数所使用的方法和思想。

☑ 掌握序偶和笛卡儿积的概念。

☑ 了解抽屉原理，熟记简单情形的容斥原理。

1.1 基本知识点

1.1.1 集合的基本概念

集合是一个不能精确定义的基本概念，通常用大写英文字母表示集合的名称，如A，B，X等。组成一个集合的不再细分的个体，称为元素，用小写英文字母表示集合的元素，如a,b,x等。若a是集合A中的元素（或成员、或元），则称a属于集合A，记作$a\in A$；若a不是集合A中的元素，则a不属于集合A，记作$a\notin A$。当$a_1\in A,a_2\in A,\cdots,a_n\in A$时，常简写为$a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$。集合的元素与集合之间是属于或者不属于的关系，两者有且仅有一种关系成立。

集合也可以简称为集，由它的元素所决定。集合中的元素具有如下几个性质：

- 确定性。对一个具体的集合来说，其元素是确定的，一个元素或者在此集合中，或者不在此集合中，两者必居其一，这与模糊集合不同。不清晰对象构成的模糊集合不在本书讨论范围之内。
- 无重复性。集合中的元素彼此不同，没有重复的元素，这与后面图论中涉及的多重集合不同。
- 无序性。集合中的元素无顺序之分，如$\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$。
- 抽象性。集合中的元素是抽象的，也可以是集合，如$A=\{1,\alpha,\{1\}\}$。

我们经常用到的集合有自然数集N、整数集Z、有理数集Q、实数集R和复数集C。

不含任何元素的集合称为**空集**，用$\varnothing$（或$\{\}$）表示。在具体讨论的问题中，所涉及到的全体对象构成的集合称为**全集**（也称为论域），通常用U（或E）表示。由于全集随着讨论问题的不同而不同，因此全集是相对惟一的，而非绝对惟一的。

集合中元素的个数可以是有限的，也可以是无限的，前者所对应的集合称为**有限集**，后者所对应的集合称为**无限集**。若 A 是有限集，用 $|A|$ 表示集合 A 中元素的数目，称为集合的基数，记为 $\#(A)$ 或 $\mathrm{card}(A)$ 或 $\kappa(A)$ 。无限集的基数将在第3章中讨论。显然有 $|\varnothing|=0$ 。

常用的表示集合的方法有两种。一种是列出集合中的所有元素，元素间用逗号分隔，称作**列举法**。例如：$A=\{1,2,3\}$ ，$B=\{\{a\},b,$ 春，夏，秋，冬$\}$ ，$N_m=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$ ，$Z_m=\{1,2,\cdots,m\}$ 。有限集都可用列举法表示。

另一种是将集合中元素应当满足的条件描述出来，称作**描述法**。例如：$B=\{n^2\mid n\in N\}$ ，$C=\{x\mid x\in R,$ 且 $-1<x<1\}$ 等。

上面两种表示法中，列举法适用于元素不太多或元素的规律比较明显、简单的情况，而描述法侧重刻画集合中元素的共同特征。

对于某些有规律的无限集，如其元素与自然数可建立一一对应关系的集合，也可以使用列举法表示。例如：$C=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$ 。

1.1.2 子集、集合的相等

集合的包含与相等是集合间的两种基本关系，也是集合论中的两个基本概念。

定义1.1 设有 A ，B 两个集合，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，称 B 是 A 的**子集**，也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B ，记为 $B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$ 。若 B 是 A 的子集，且 A 中至少有一个元素不属于 B ，则称 B 为 A 的**真子集**，记为 $B\subset A$ 或 $A\supset B$ ，称为 B 真包含于 A 。

由定义可知，$\varnothing\subseteq A$ ，$A\subseteq A$ ，特别是，有 $\varnothing\subseteq\varnothing$ 。

根据定义有：

$$B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x\in B,\text{有}x\in A$$
$$B\subset A\Leftrightarrow \forall x\in B,\text{有}x\in A;\text{且}\exists x_0\in A,x_0\notin B$$

由此可得出：

$$B\not\subseteq A\Leftrightarrow \exists x_0\in B,x_0\notin A$$

若两个集合 A 和 B 没有公共元素，称 A 和 B 是**不相交**的。

我们要注意符号 $\in$ 和 $\subseteq$ 的区别。$\in$ 表示元素与集合之间的关系，而 $\subseteq$ 则表示集合与集合之间的关系。但是由于集合的抽象性，集合中的元素可以是集合，故可以发生如 $A\in B$ 且 $A\subseteq B$ 的情形。$A\in B$ 表示集合 A 是集合 B 的一个元素；$A\subseteq B$ 表示集合 A 中的每个元素都是集合 B 中的元素。$\in$ 是一个最基本的符号，$\subseteq$ 是由 $\in$ 定义而得。例如：

$$\{a\}\not\subseteq\{\{a\},b\},\quad \{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a\}\}$$

但

$$\{a\}\in\{\{a\},b\},\quad \{a,b\}\notin\{a,b,\{a\}\}$$

另外，集合中无重复元素，我们认为 $\{a,a,b\}=\{a,b\}$ 。

定义1.2 若两个集合 A 与 B 包含的元素相同，称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$ 。也可以理解为：若 A 是 B 的子集且 B 是 A 的子集，称 A 与 B 相等，即

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{且}B\subseteq A$$

这是一个很重要的定义，若要证明两个集合相等，只需证明两个集合互为子集或互相包含即可。这是证明集合相等的基本思路和依据。从这个定义可以推证，两个集合相等当且仅当它们有完全相同的元素。第2章“二元关系”中，有很多地方涉及到证明两个关系相等，因为关系实际上是一种特殊的集合，因此也可用上述思路来证明。

若 A 与 B 不相等，则 $B \not\subseteq A$ 和 $A \not\subseteq B$ 至少有一个发生。

由定义1.1可知，空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集（当然也是空集 $\varnothing$ 的子集），且是惟一的；任一集合 A 是它自身的子集；集合 A 的子集 $\varnothing$ 和 A 称为 A 的平凡子集；任何集合是全集的子集。

注意： $\{a\} \neq \{\{a\}\}$，因为两个集合中元素不同，一个是 a，另一个是 $\{a\}$。

1.1.3 集合的运算及其性质

1. 集合的运算

给定集合 A 和 B，可以通过集合的并“$\cup$”、交“$\cap$”、相对补“$-$”、绝对补“$\bar{\ }$”、对称差“$\oplus$”等运算产生新的集合，这也是表示集合的一种方法。

定义1.3 任意两个集合 A 与 B 的**并**是一个集合，它由所有至少属于 A 或 B 之一的元素所构成，记为 $A \cup B$。

任意两个集合 A 与 B 的**交**是一个集合，它由所有属于 A 且属于 B 的元素所构成，记为 $A \cap B$。

任意两个集合 A 与 B 的**差**是一个集合，它由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成，记为 $A-B$（或 $A \setminus B$），也称为 B 相对 A 的补集。

任意两个集合 A 与 B 的**对称差**（也称为环和）是一个集合，它由所有属于 A 不属于 B 和属于 B 不属于 A 的元素所构成。记为 $A \oplus B$（有些教材记为 $A \Delta B$）。

集合 A 的**补集**是一个集合，它由所有不属于 A 的元素所构成，记为 $\overline{A}$（或 $\sim A$、A^c、A' 等），也称为 A 的绝对补集。

对任意两个集合 A 与 B，若 $A \cap B = \varnothing$，即 A 与 B 没有公共的元素，则称 A 与 B 是**不相交**的。

由以上定义，有：

① $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$

② $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$

③ $A - B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}$

④ $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

⑤ $\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{且} x \notin A\}$

集合的并和交可以推广到 n 个集合的并和交：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

其中，若 $n=1$，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1$，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$。

集合的并和交运算还可以推广到无穷集合的情形，设J为一非空指标集，则有

$$\bigcup_{j\in J} A_j=\{x\mid \exists j_0\in J, x\in A_{j_0}\},\qquad \bigcap_{j\in J} A_j=\{x\mid \forall j\in J, x\in A_j\}$$

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图（John Venn）形象地描述，这有助于我们理解相关问题，且有时对解题也很有帮助。文氏图的优点是形象直观、易于理解，缺点是理论基础不够严谨，因此只能用于说明，不能用于证明。

在文氏图中，用矩形代表全集U，矩形内部的点表示全集中的全体元素，用（椭）圆或封闭曲线代表U的子集，其内部的点表示不同集合的元素，并将运算后得到的结果用阴影部分表示。图1-1所示为集合之间的各种关系，表示了5种基本运算，阴影（斜线）部分表示经过相应运算得到的集合。

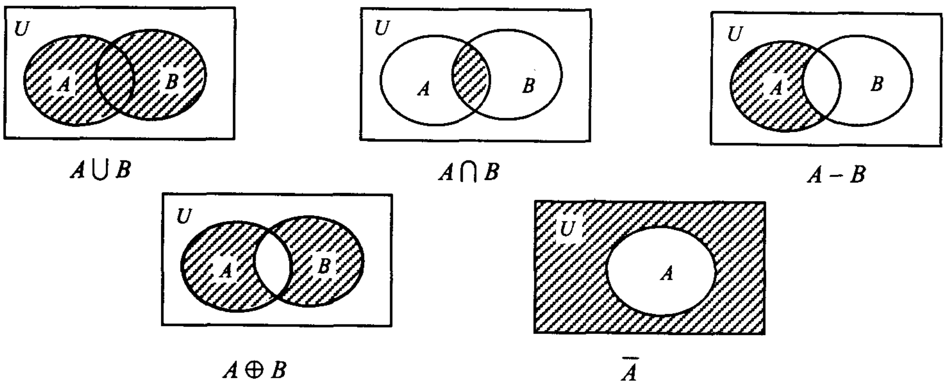

图 1-1

2. 集合的性质

定理1.1 对于全集U的任意子集A，B，C，有如表1-1所示的一些基本性质。

表1-1 集合运算的一些基本性质

性质	表达式	
幂等律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
交换律	$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap U=A$
零律	$A\cup U=U$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
双补律	$A\cup\overline{A}=U$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
德摩根律	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
(De Morgan)	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
对合律	$\overline{\overline{A}}=A$	

除了表1-1所示的基本性质外，集合的差与对称差还具有下面一些性质。

定理1.2 设A，B，C为任意集合，则有：

（1）$A-B=A\cap\overline{B}$
（2）$A-B=A-(A\cap B)$
（3）$A\cup(B-A)=A\cup B$
（4）$A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$
（5）$(B-A)\cap A=\varnothing$
（6）$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$
（7）$A\oplus B=B\oplus A$
（8）$A\oplus\varnothing=A$，$A\oplus A=\varnothing$，$A\oplus U=\overline{A}$，$A\oplus\overline{A}=U$
（9）$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$
（10）$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

我们通常用（1）式将差运算转化为其他的集合运算

注意： $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$不一定成立。例如：$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b\}$，则等式右边为空集，但等式左边为非空集。

说明一个集合为另一个集合的子集是我们经常遇到的问题。借助于已知的结论，可以证明下面结论等价，有时我们可以直接使用这些结论。

① $A\subseteq B$
② $A\cup B=B$
③ $A\cap B=A$
④ $\overline{B}\subseteq\overline{A}$
⑤ $A-B=\varnothing$
⑥ $A\cap\overline{B}=\varnothing$
⑦ $\overline{A}\cup B=U$

定义1.4 设A是一集合，由A的所有子集构成的集合称为A的**幂集**，记为$P(A)$（或$\rho(A)$、2^A）。即$P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$。

根据幂集的定义，因为$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$，显然有以下事实：

（1）$\varnothing\in P(A)$

（2）$A\in P(A)$

定理1.3 若A是有限集，则有$|P(A)|=2^{|A|}$。

给定一个集合，确定其幂集，注意$\varnothing$和集合本身一定是在幂集中，并且由于给定集合的不同，可能表现出来的幂集在形式上有一定差别。例如：$A=\{a\}$和$B=\{\{a\}\}$，则它们的幂集是不同的，$P(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$，而$P(B)=\{\varnothing,\{\{a\}\}\}$。

定理1.4 对任意集合A，B，有：

（1）若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\subseteq P(B)$；反之，若 $P(A)\subseteq P(B)$，则 $A\subseteq B$。

（2）若 $A=B$，则 $P(A)=P(B)$；反之，若 $P(A)=P(B)$，则 $A=B$。

（3）$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$。

（4）$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$。

（5）$P(A-B)\subseteq (P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$。

其中，（3）式和（5）式会发生真包含的情形。例如，对于（5）式，设$A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则$A-B=\{a\}$，$P(A-B)=\{\varnothing,\{a\}\}$，而$(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$，两者不等，故为真包含。

1.1.4 笛卡儿积

称$<a,b>$为由元素a和b组成的有序对（或序偶），其中a为第一元素，b为第二元素，a，b可以相同。有些教材也将此有序对表示为(a,b)。

有序对具有这样的性质：

$$<x,y>=<u,v>\Leftrightarrow x=u,y=v$$

定义1.5 设A，B为两个集合，取A中元素为第一元素，B中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称为A与B的笛卡儿积（也称为直积或叉积），记作$A\times B$，即$A\times B=\{<a,b>|\,a\in A,b\in B\}$。

由定义1.5可知：若A或B中有一个空集，则$A\times B=\varnothing$，且一般$A\times B\neq B\times A$。

我们推广上述定义，可以用n元组定义n阶笛卡儿积。

若$n>1$且为自然数，而$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个集合，则它们的n阶笛卡儿积记作$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，并定义为：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<x_1,x_2,\cdots,x_n>|\,x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

注意：根据定义，一般情况下，有$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

关于笛卡儿积，有下面几条性质。

定理1.5 对任意集合A，B，C，有：

（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3）$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

（4）$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

（5）$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

（6）$(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

（7）若$C\neq\varnothing$，则$A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$

（8）若A，B，C，D非空，则$A\times B\subseteq C\times D$的充要条件是$A\subseteq C$且$B\subseteq D$

注意：上面结论（7）在条件$C\neq\varnothing$不满足时，不一定成立。

关于有限集合的基数，有下面一些结论（假设下面出现的集合均为有限集合）：

（1）$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$

（2）$|A \cup B| \le |A| + |B|$

（3）$|A \cap B| \le \min\{|A|, |B|\}$

（4）$|A - B| \ge |A| - |B|$

（5）$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

1.1.5 集合的覆盖与划分

定义1.6 设A是非空集，称Π是集合A的划分，若Π是A的非空子集的集合，即$\Pi = \{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \ne \varnothing\}$，则满足：

① $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing, \alpha \ne \beta$

② $\bigcup_\alpha A_\alpha = A$

定义1.7 非空集A的一个覆盖C是A的非空子集的集合，即$C = \{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \ne \varnothing\}$，则满足：$\bigcup_\alpha A_\alpha = A$。

若$C = \{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \ne \varnothing\}$是集合$A$的一个覆盖，且$C$中的任意元素都不是其他元素的子集，则称$C$是$A$的完全覆盖。

集合的覆盖与划分的区别在于覆盖不要求各个子集两两之交为空集。

1.1.6 基本计数原理

1. 鸽巢原理（抽屉原理）

定理1.6 把$n+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里有两个或两个以上的物体。

推广定理 把n个物体放入m个盒子里，则至少有一个盒子里至少有$\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$个物体。

2. 容斥原理

有限个有限集合的并仍是有限集合，容斥原理刻画了有限个有限集合的并集与各有限集合之间在元素个数上的联系。容斥原理在实际中有着广泛应用。

（1）最简单的情形

若A，B均为有限集，则有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

当有三个集合时，容斥原理的表现形式为：

若A，B，C均为有限集，则有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$