

實用
土木工程計算圖表

楊文淵編

改版本

龍門聯合書局出版

實用

土木工程計算圖表

江苏工业学院图书馆

楊文淵編

藏書章

改版本

聯門聯合書局出版

本書取材注重實用，內容包括數學公式、數表、單位換算、應用力學、水力学、測量、工程材料、土工及爆破、混凝土及鋼筋混凝土工、基礎工、道路工、土木機械等十二編，均為土建工程中的重要部分。

全書以簡明手冊的方式編排，計有實用公式、數據、圖表、圖解等六百餘種，除採用祖國最新資料外，並將蘇聯的先進經驗儘量列入，俾在設計施工時，藉以獲得參考與檢查上的便利。

本書初版於1948年，至1953年共印行兩萬六千冊，其間雖經數次修訂，但均屬局部增刪，為適應國家大規模經濟建設的迅速發展，經編者將原書予以改編，內容較前為充實，它使我們在工程實際工作中能廣泛地被應用。

本書可作為土建工程從業人員的實用手冊，亦適用於教學時的一般參考。

實 用 土木工程計算圖表

楊 文 淵 編

★ 版權所有 ★

龍門聯合書局出版

上海市書刊出版業營業許可證出 029 號

上海茂名北路 300 弄 3 號

新 華 書 店 總 經 售

信 大 印 刷 所 印 刷

上 海 淮 安 路 1 弄 14 號

開本：787×1092 1/32 印數：26,001—29,000 冊

印張：23¹⁰/₃₂

1948 年 6 月 第一版

字數：466,000

1954 年 12 月 第二版

定價：40,000 元

1954 年 12 月 第十次印刷

常用數便覽

圓周率 $\pi = 3.141\,592\,653$
 $\pi^2 = 9.869\,604\,401$
 $\frac{1}{\pi} = 0.318\,309\,886$
 $\frac{1}{\pi^2} = 0.101\,321\,184$
 $\frac{\pi}{4} = 0.785\,398\,163$
 $\frac{4}{3}\pi = 4.188\,790\,205$
 $\sqrt{\pi} = 1.772\,453\,851$
 $\sqrt{2}\pi = 2.506\,828\,575$
 $\sqrt[3]{\pi} = 1.464\,591\,888$
 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.564\,189\,584$
 $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0.682\,784\,063$

1 弧度 (Radian) = $\frac{180^\circ}{\pi}$
 $= 57.29578^\circ$
 $= 57^\circ 17' 44'' 81$
 $= 3437.75'$
 $= 206\,264.81''$

1 度 (degree) = $\frac{\pi}{180}$ 弧度
 $1^\circ = 0.017\,453$ 弧度
 $1' = 0.000\,291$ "
 $1'' = 0.000\,0048$ "

重力加速度 $g = 9.81$ 公尺/秒/秒
 $g^2 = 98.2361$

$\frac{1}{2g} = 0.050\,668$

$\sqrt{g} = 3.132\,092$

$\sqrt{2g} = 4.429\,447$

($g = 9.81$ 公尺/秒/秒 = 32.2 呎/秒/秒)

自然對數之根 $e = 2.718\,281\,828\,4$
 $e^2 = 7.389\,056\,098\,9$

常用對數之係數 $M = \log 10^e$
 $= 0.434\,294\,482$

$\frac{1}{M} = \log_e 10$
 $= 2.302\,585\,093$

1 度華氏 (F°) = $\frac{9}{5}(C^\circ + 32^\circ)$

1 度攝氏 (C°) = $\frac{5}{9}(F^\circ - 32^\circ)$

1 馬力 (Horse Power) = 550 磅·呎/秒
 $= 1.0139$ 馬力 (公制)
 $= 76.04$ 公斤·公尺/秒
 $= 0.7457$ 瓩

1 馬力 (公制) = 0.9863 馬力 (英制)
 $= 542.47$ 磅·呎/秒
 $= 0.7351$ 瓩

1 瓩 (Kilowatt) = 1.3405 馬力

1 大氣壓力 (Atmospheric pressure)
 $= 14.697$ 磅/平方吋
 $= 1.033$ 公斤/平方公分
 $= 29.921$ 吋水銀柱
 $= 760$ 公厘水銀柱

海福特 (Hayford) 橢圓體

地球長半徑 = $6\,378\,388$ 公尺

地球短半徑 = $6\,356\,612$ 公尺

克拉索夫斯基 (Красовский) 橢圓體

地球長半徑 = $6\,378\,745$ 公尺

地球短半徑 = $6\,356\,863$ 公尺

音速：公尺/秒 = $331 + 0.609 \times \text{溫度 } C^\circ$

光速：空氣中 = $300\,000$ 公里

$= 186\,000$ 哩

水中 = 空氣中的 $\frac{3}{4}$

366.2422 恒星日 = 365.2422 太陽日

1 恒星日 = $0.997\,269\,57$ 太陽日

1 太陽日 = $1.002\,737\,91$ 恒星日

1 平方公厘 = 1973.5 圓單位 (Circular mils)

1 滄尺 = 33.90 公分 = 0.34 公尺

$= 1.02$ 市尺 = 1.1155 呎

1 闊尺 (台灣尺) = 30.16 公分 = 0.90 市尺

1 沪用闊尺 = 29.75 公分

1000 板尺 = $2.359\,731$ 立方公尺

1 立方公尺 = 423.78 板尺

1 板尺 = 144 平方吋 $\times 1$ 吋

總 目

第 1 編	數學公式	1.01~ 1.31
第 2 編	數表	2.01~ 2.49
第 3 編	單位換算	3.01~ 3.40
第 4 編	應用力學	4.01~ 4.24
第 5 編	水力學	5.01~ 5.52
第 6 編	測量	6.01~ 6.84
第 7 編	工程材料	7.01~ 7.117
第 8 編	土工及爆破	8.01~ 8.48
第 9 編	混凝土及鋼筋混凝土工	9.01~ 9.89
第 10 編	基礎工	10.01~ 10.51
第 11 編	道路工	11.01~ 11.103
第 12 編	土木機械	12.01~ 12.52

第 1 編 數學公式

1-1 代數..... 1.01	1-5 雙曲線函數..... 1.17
I. 乘冪及根..... 1.01	1-6 解析幾何..... 1.18
II. 恆等式及因數分 解..... 1.01	I. 直線..... 1.18
III. 對數..... 1.01	II. 圓錐曲線..... 1.18
IV. 方程式..... 1.02	III. 平面..... 1.18
V. 級數之和..... 1.03	IV. 二次面..... 1.18
VI. 無限級數及函數 之展式..... 1.03	1-7 微分..... 1.19
1-2 平面三角法..... 1.05	I. 微分之基本定理 1.19
I. 同一角之三角函 數間之關係... 1.05	II. 基本函數之微分 係數..... 1.19
II. 倍角之三角函數 及三角函數之 冪..... 1.05	III. 高次微分係數... 1.20
III. 兩角之和或差之 函數..... 1.05	1-8 積分..... 1.20
IV. 二函數之和差及 積..... 1.06	I. 基本定理..... 1.20
V. 三角形之性質... 1.06	II. 代數函數之積分 1.20
VI. 三角形公式..... 1.07	III. 三角函數之積分 1.22
1-3 平面圖形之求積... 1.08	IV. 逆三角函數之積 分..... 1.23
1-4 立體之容積及其面 1.13	V. 雙曲線函數之積 分..... 1.23
	VI. 指數函數之積分 1.24

VII. 對數函數之積分
..... 1.24

VIII. 代數函數之定積
..... 分..... 1.25

IX. 三角函數之定積
..... 分..... 1.25

X. 指數及對數函數

之定積分..... 1.26

XI. 定積分之近似值
(Simpson's Rule)
..... 1.27

1-9 桿件交叉之圖形及
公式..... 1.28

1—1 代數

I. 乘方及根

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

4. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

5. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$

6. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{m+n}}$

7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

8. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

II. 恒等式及因數分解

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

2. $a^2 + b^2 = (a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$

3. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

4. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

5. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$

6. $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1})$ (n —偶數)

7. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$ (n —奇數)

8. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

9. $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x + abc$

10. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

11. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

12. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

13. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

14. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

15. $a^4 - a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)$

16. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$

17. $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b^2c + bc^2 + c^2a + Ca^2 + a^2b + ab^2) + 6abc$

18. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$

III. 對數

1. 設 a 為異於 1 之有限正數, 且 $a^x = N$, 則 x 是以 a 為底的 N 之對數。或 $\log_a N = x$. 設 $\log_a N = x$, 則 $a^x = N$.

2. $\log_a a = 1$.

3. $\log_a 1 = 0$.

4. $\log_a 0 = -\infty$

5. $\log_a (A \times B) = \log_a A + \log_a B$

6. $\log_a (A \div B) = \log_a A - \log_a B$
 7. $\log_a A^n = n \log_a A$ 8. $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$
 9. $\log_a A = \log_b A \times \log_a b$ 10. $\log_a b \times \log_b a = 1$
 11. 普通对数(布立格兹 Briggsian)——以 10 为底.
 12. 自然对数(纳瓦尔或双曲线, Napierian or hyperbolic)——以 2.7183 为底——(用 e 或 ϵ 表示).

(本编普通对数以 Log 表之, 自然对数均以 $\log$ 表之)

13. $\text{Log } N = \log N \times \text{Log } e$ 14. $\text{Log } e = 0.43429448$
 15. $\log N = \text{Log } N \times \log 10$ 16. $\log 10 = 2.30258509$
 17. $\text{Log } e \times \log 10 = 1$ 18. $\log 10 = 1$
 19. $\text{Log } 10^n = n$

IV. 方程式

1. 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 三次方程式 $aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$ 設 $Z = X - \frac{b}{3a}$ 可化為
 $x^3 + 3px + 2q = 0$

3. 三次方程式 $x^3 + 3px + 2q = 0$ 之根

$$x_1 = u + v, \quad x_2 = \omega_1 u + \omega_2 v, \quad x_3 = \omega_2 u + \omega_1 v$$

$$\text{設 } \omega_1 = \omega_2^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \quad \omega_2 = \omega_1^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$$

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

4. 四次方程式 $aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e = 0$ $Z = x - \frac{b}{4a}$ 可化為

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \text{ 其四次方程式之根.}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \quad x_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})$$

設 y 為二次方程式 $y^2 - 2py^2 - (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$ 之 3 根, 以 $\sqrt{y}$ 表之.

$$\text{則 } \sqrt{y_1} \times \sqrt{y_2} \times \sqrt{y_3} = -q$$

V. 級數之和

1. 等差級數 $a + (a+d) + (a+2d) + \dots + a + (n-1)d = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
2. 等比級數 $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r} = a \frac{r^n-1}{r-1}$
3. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$
4. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
6. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$
7. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n$
8. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$
9. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$
10. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
11. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \dots + n(n+1)(n+2)$
 $= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$
12. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$

VI. 無限級數及函數之展式

1. $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \dots$, 設 n 為任意值,
 $|x| < 1$
2. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \dots$
3. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \frac{231}{1024}x^6 + \dots$
4. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \frac{154}{6561}x^6 + \dots$
5. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 - \frac{91}{729}x^5 + \frac{728}{6561}x^6 + \dots$
6. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ (設 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$)

7. $a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + \dots$
8. $\log x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right], \quad (x > 0)$
9. $\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots, \quad (|x| < 1)$
10. $\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad (|x| < 1)$
11. $\log \frac{x+1}{x-1} = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \right), \quad (|x| > 1)$
12. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
13. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
14. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots, \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right)$
15. $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots, \quad (|x| < \pi)$
16. $\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2 \times 3} x^3 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 5} x^5 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6 \times 7} x^7 + \dots, \quad (|x| < 1)$
17. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (|x| < 1)$
18. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$
19. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

1-2 平面三角法

I. 同一角之三角函數間之關係

	$\sin \alpha = x$	$\cos \alpha = x$	$\tan \alpha = x$	$\cot \alpha = x$	$\sec \alpha = x$	$\operatorname{cosec} \alpha = x$
$\sin \alpha =$	x	$\pm \sqrt{1-x^2}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1-x^2}$	x	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
$\tan \alpha =$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\pm \sqrt{x^2-1}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\cot \alpha =$	$\pm \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm \sqrt{x^2-1}$
$\sec \alpha =$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm \sqrt{1+x^2}$	$\pm \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\pm \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cosec} \alpha =$	$\frac{1}{x}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\pm \sqrt{1+x^2}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

II. 倍角之三角函數及三角函數之幕

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
3. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
4. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
5. $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$
6. $\cos 4\alpha = 1 - 8 \cos^2 \alpha + 8 \cos^4 \alpha$
7. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$
8. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$
9. $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
10. $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
11. $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
12. $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
13. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
14. $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

III. 兩角之和或差之函數

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
4. $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$

IV. 二函數之和差及積

1. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
2. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
3. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
4. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
5. $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
6. $\cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$
7. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
8. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
9. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

V. 三角形之性質 a, b, c 一邊, A, B, C 一角. R 外切圓之半徑,

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

1. 正弦法則 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

2. 餘弦法則 $c = a \cos B + b \cos A$ 等.

3. 由二邊及夾角求他邊

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ 等.}$$

4. $\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

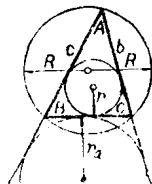
$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

5. 面積 $= \frac{bc}{2} \sin A = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

6. 外切圓半徑 $R = \frac{abc}{4 \times \text{面積}} = \frac{a}{2 \sin A}$

7. 內切圓半徑 $r = \frac{\text{面積}}{s} = (s-a) \tan \frac{A}{2}$

8. 傍切圓半徑 $r_a = \frac{\text{面積}}{s-a} = s \tan \frac{A}{2}$

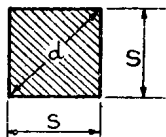


VI 三角形公式

圖形	已知	求	公 式	備 考
 S-面積	a, c	A, B	$\sin A = \frac{a}{c}, \cos B = \frac{b}{c}$	普通三角函数表 度 分 秒 斜边 对边 邻边 b a c
		b, S	$b = \sqrt{c^2 - a^2}, S = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2}$	
	a, b	A, B	$\tan A = \frac{a}{b}, \tan B = \frac{b}{a}$	1/2 1 85° 44' 10028
		c, S	$c = \sqrt{a^2 + b^2}, S = \frac{ab}{2}$	
	A, a	B, b	$B = 90^\circ - A, b = a \cdot \cot A$	1/11 1 84° 50' 10061
		c, S	$c = \frac{a}{\sin A}, S = \frac{a^2 \cot A}{2}$	
	A, b	B, a	$B = 90^\circ - A, a = b \cdot \tan A = c \cdot \cos B$	1/9 1 83° 40' 10081
		c, S	$c = \frac{b}{\cos A}, S = \frac{b^2 \tan A}{2}$	
	A, c	B, a	$B = 90^\circ - A, a = c \sin A$	1/7 1 81° 52' 10102
		b, S	$b = c \cdot \cos A, S = \frac{c^2 \sin A \cos A}{2} = \frac{c^2 \sin 2A}{4}$	
	C, c	A, B	$\cos A = \frac{b}{c}, B = 90^\circ - A$	1/5 1 78° 41' 10192
		a, S	$a = \sqrt{c^2 - b^2}, S = \frac{ab}{2}$	
 P = $\frac{a+b+c}{2}$	A, b, c	A	$\sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}, \cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{P(P-a)}{bc}}$	1/2 1 63° 26' 11180
			$\tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{P(P-a)}{(P-b)(P-c)}}, \sin \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{P(P-b)}{ac}}$	
		B	$\cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{P(P-b)}{ac}}, \tan \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{P(P-b)}}$	
		C	$\sin \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{P(P-c)}{ab}}, \cos \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{P(P-a)}{ab}}$	
		S	$\tan \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{P(P-a)(P-b)}{(P-c)^2}}, S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$	
	a, A, B	b, c	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin(A+B)}{\sin A}$	1/34 1 29° 44' 20160
		S	$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$	
	a, b, A	B	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$	2/12 1 21° 50' 26800
		c	$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$	
	a, b, C	S	$S = \frac{1}{2}ab \sin C$	3/12 1 15° 00' 36000
		A	$\tan A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$	
			$\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C$	
		c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \frac{a \sin C}{\sin A}$	
		S	$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A$	
	$A+B+C = 180^\circ, \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$			6 1 9° 25' 61121
	$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$			6 1/2 1 8° 45' 65733
	$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$			7 1 8° 05' 70800
	$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$			7 1/2 1 7° 36' 75601
	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$			8 1 7° 07' 80717
	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$			

1—3 平面圖形之求積

正方形



A=面積

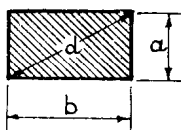
$$A = s^2$$

$$A = \frac{1}{2} d^2$$

$$s = 0.7071 d = \sqrt{A}$$

$$d = 1.414 s = 1.414 \sqrt{A}$$

矩形



A=面積

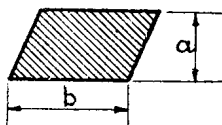
$$A = a \cdot b \quad A = a \sqrt{d^2 - a^2} = b \sqrt{d^2 - b^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{d^2 - b^2} = A \div b$$

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = A \div a$$

平行四邊形



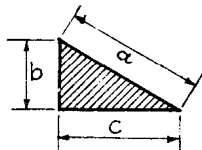
A=面積

$$A = a \cdot b$$

$$a = A \div b$$

$$b = A \div a$$

直角三角形



A=面積

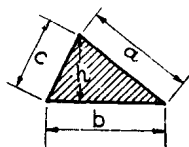
$$A = \frac{bc}{2}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

銳角三角形



A=面積

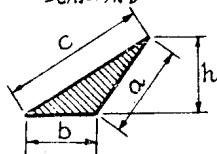
$$A = \frac{bh}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2b} \right)^2}$$

$$\text{如 } s = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ 則}$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

1—3 平面圖形之求積

鈍角三角形



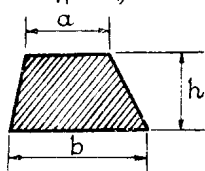
A=面積

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} \right)^2}$$

若 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 則

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

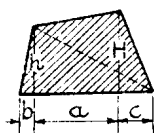
梯形



A=面積

$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

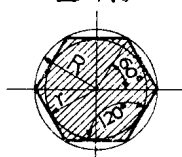
不平行四邊形



A=面積

$$A = \frac{(H+h)a + bh + cH}{2}$$

正六角形



A=面積

R=外切圓半徑

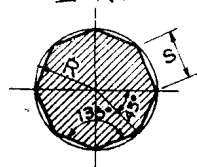
r=內切圓半徑

$$A = 2.598s^2 = 2.598R^2 = 3.464r^2$$

$$R = s = 1.155r$$

$$r = 0.866s = 0.866R$$

正八角形



A=面積

R=外切圓半徑

r=內切圓半徑

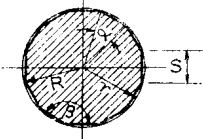
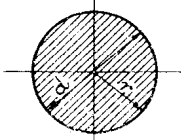
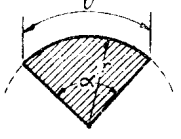
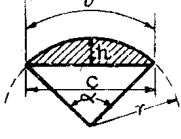
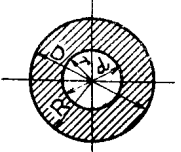
$$A = 4.828s^2 = 2.828R^2 = 3.314r^2$$

$$R = 13.07s = 1.082r$$

$$r = 1.207s = 0.924R$$

$$s = 0.765R = 0.828r$$

1—3 平面圖形之求積

正多角形 	A=面積, n=邊數. $\alpha = 360^\circ \div n \quad \beta = 180^\circ - \alpha$ $A = \frac{n \cdot s \cdot r}{2} = \frac{n \cdot s}{2} \sqrt{R^2 - \frac{s^2}{4}}$ $R = \sqrt{r^2 + \frac{s^2}{4}}, \quad r = \sqrt{R^2 - \frac{s^2}{4}}$ $s = 2\sqrt{R^2 - r^2}$
圓 	A=面積, c=圓周. $A = \pi r^2 = 3.1416 r^2 = 0.7854 d^2$ $c = 2\pi r = 6.2832 r = 3.1416 d$ $r = c \div 6.2832 = \sqrt{A \div 3.1416} = 0.564 \sqrt{A}$ $d = c \div 3.1416 = \sqrt{A \div 0.7854} = 1.128 \sqrt{A}$
分圓 	A=面積, l=弧長, alpha=角度. $l = \frac{r \times \alpha \times 3.1416}{180} = 0.01745 r \alpha = \frac{2A}{r}$ $A = \frac{1}{2} r l = 0.008727 \alpha r^2$ $\alpha = \frac{57.296}{r}, \quad r = \frac{2A}{l} = \frac{57.296 l}{\alpha}$
割圓 	A=面積, l=弧長, alpha=角度. $c = 2\sqrt{h(2r-h)}$ $A = \frac{1}{2} [r l - c(r-h)]$ $r = \frac{c^2 + 4h^2}{8h}, \quad l = 0.01745 \alpha$ $h = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - c^2}, \quad \alpha = \frac{57.296 l}{r}$
環形 	A=面積 $A = \pi(R^2 - r^2) = 3.1416(R^2 - r^2)$ $= 3.1416(R+r)(R-r)$ $= 0.7854(D^2 - d^2)$ $= 0.7854(D+d)(D-d)$