高等学校教材

数学分析讲义

（第四版）

下册

刘玉琏　傅沛仁
林　玎　苑德馨　刘　宁　编

高等教育出版社

ISBN 7-04-011881-5
9 787040 118810 >
定价 19.50 元

数学分析讲义

（第四版）

下　　册

刘玉琏　傅沛仁
林　玎　苑德馨　刘　宁　编

高等教育出版社

内容简介

本书分上、下两册，是在第三版的基础上修订而成的。在内容和体例上，未作较大变动。因为使用本书的多为高等师范院校，为了加强基础，在第十章讲多元函数微分学时，首先把函数概念提高一步，给出比较严格的函数定义，并对高中“数学”没有严格定义的基本初等函数用分析的工具给以定义，对其性质予以证明。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范院校本科教材，也可作为高等理科院校函授教材及高等教育自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义．下/刘玉琏等编．—4版．—北京：高等教育出版社，2003.6
ISBN 7-04-011881-5

Ⅰ.数...Ⅱ.刘...Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013755 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2003年6月第4版
印　　张	14.125	印　　次	2003年9月第2次印刷
字　　数	360 000	定　　价	19.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

目　录

第九章 级 数

级数分为数值级数与函数级数.函数级数是表示函数,特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具.例如,有的微分方程的解不是初等函数,但其解却可表为函数级数.函数级数又是研究函数(初等函数与非初等函数)性质的一个重要手段.因此,函数级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用.数值级数是函数级数的特殊情况,它又是函数级数的基础.本章首先讨论数值级数的基本理论.

§9.1. 数值级数

一、收敛与发散概念

设有数列$\{u_n\}$,即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

称为**数值级数**,简称**级数**,其中 u_n 称为级数(2)的**第 n 项**或**通项**.

级数(2)是无限多个数的和.我们只会计算有限个数的和,不仅不会计算无限多个数的和,甚至都不知道何谓无限多个数的和.因此,无限多个数的和是一个未知的新概念.这个新概念也不是孤立的,它与我们已知的有限个数的和联系着.不难想到,由有限个

数的和转化到“无限多个数的和”应借助极限这个工具来实现.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n,即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{或} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**.显然,对给定级数(2),其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的.于是,级数(2)对应着一个已知的部分和数列 $\{S_n\}$.

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

则称级数(2)**收敛**,S 是级数(2)的**和**,表为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ **发散**,则称级数(2)**发散**,此时级数(2)没有和.

定义 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和是 S,而 $S - S_n$ 表为 r_n,即

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 ***n* 项余和**,简称**余和**.显然,级数收敛,总有

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

由此可见,级数的敛散性(收敛与发散)是借助于它的部分和数列的敛散性定义的.反之,数列的敛散性也可归结为级数的敛散性.事实上,设有数列 $\{S_n\}$.令

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \cdots, a_n = S_n - S_{n-1}, n = 2, 3, \cdots.$$

显然,

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \end{aligned}$$

即数列$\{S_n\}$的敛散性可归结为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性.

因此,研究收敛级数及其和数只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式.因为级数是有限和的推广,有鲜明的直观性,所以,这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复,它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性,并提供了新的数学工具.

例 1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性,其中$a \neq 0$,r是公比.

解 1) 当$|r| \neq 1$时,已知几何级数的n项部分和

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

(i) 当$|r| < 1$时,存在极限,且

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$ ①

因此,当$|r| < 1$时,几何级数收敛,其和是$\frac{a}{1-r}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

(ii) 当$|r| > 1$时,不存在极限,且

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \infty.$$

因此,当$|r| > 1$时,几何级数发散.

2) 当$|r| = 1$时,有两种情况:

(i) 当$r = 1$时,几何级数是($a \neq 0$)

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{个}} = na.$$

---

① 见§2.1例4,当$|r| < 1$时,$\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty,$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

(ⅱ) 当 $r=-1$ 时,几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{ 是偶数},\\ a, & n\text{ 是奇数},\end{cases}$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

于是,当$|r|=1$时,几何级数发散.

综上所述,几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$,当$|r|<1$时收敛,其和是 $\dfrac{a}{1-r}$;当$|r|\geqslant 1$时发散.

例 2. 证明,级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right)\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是$\dfrac{1}{5}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3. 证明，调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证明 设调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的 n 项部分和是 S_n，即

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由§2.2 例 11，已知数列$\{S_n\}$发散，从而，调和级数发散.

注 由上册练习题 2.2 第 19 题知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c\text{（欧拉常数）}.$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

即当 $n\to\infty$时，调和级数的部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$与 $\ln n$ 是等价无穷大，即部分和 S_n 发散到正无穷大的速度十分缓慢. 与 $\ln n$ 相当. 欧拉曾计算过，

$$S_{1\,000}=7.48\cdots,\quad S_{1\,000\,000}=14.39\cdots\text{ 等等}.$$

二、收敛级数的性质

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛与它的部分和数列$\{S_n\}$的收敛是等价的，所以部分和数列$\{S_n\}$收敛的必要充分条件也就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要充分条件. 已知数列$\{S_n\}$的柯西收敛准则：

数列$\{S_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbf{N}_+,\forall\,n>N,\forall\,p\in\mathbf{N}_+$，有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

设 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和，有

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

于是，有下面级数的柯西收敛准则：

定理 1.（柯西收敛准则） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}_+$，$\forall n > N$，$\forall p \in \mathbf{N}_+$，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

柯西收敛准则在理论上十分重要，但用它来判别一个具体级数的敛散性，却往往很麻烦，甚至很困难.

根据定理 1 的必要性，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}_+$，$\forall n > N$，取 $p = 1$，有 $|u_{n+1}| < \varepsilon$. 于是，有

推论 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

推论 1 的等价命题是，若 $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如，级数

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \cdots + \frac{n}{100 \cdot n + 1} + \cdots.$$

因为 $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1} = \frac{1}{100} \neq 0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1}$ 发散.

注 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件，即 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散. 例如，调和级数（见例 3）

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

有$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却是发散的.

定理1指出,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛等价于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的充分远(即$n>N$)的任意片段(即$\forall\, p\in \mathbf{N}_+$,$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$)的绝对值可以任意小.由此可见,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关,而与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$前面有限项无关.于是,又有

推论2. 若去掉、增添或改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的有限项,则不改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

例如,去掉发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的前面100项,而新级数

$$\sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+m}+\cdots$$

仍是发散的.

根据数列极限运算定理可得级数运算定理:

定理2. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,其和是$S$,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛,其和是cS,其中c是常数($c\neq 0$).

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$的$n$项部分和分别是$S_n$与$\sigma_n$,有

$$\sigma_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)=cS_n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 收敛,其和是 cS. □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cS=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,其和是 S,则不改变级数每项的位置,按原有的顺序将某些项结合在一起,构成的新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots$$
$$+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots \text{①} \tag{3}$$

也收敛,其和也是 S.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的 n 项部分和是 S_n,新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k,有

$$\begin{aligned}\sigma_k&=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots\\&\quad+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})\\&=u_1+u_2+\cdots+u_{n_k}=S_{n_k},\end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列 $\{\sigma_k\}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 根据 §2.2 定理 9,已知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=S$. 于是,新级数(3)收敛,其和也是 S. □

定理 3 告诉我们,像有限和一样,对任何一个收敛级数项与项之间不改变次序任意加括号,不会改变级数的收敛性,也不改变它

---

① 每个括号内的和数作为新级数的一项,新级数的第 k 项是

$$(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}).$$

的和数，即收敛级数满足结合律.

注 对有限和来说，不但能随意加括号，而且可以随意去掉括号.但在级数中就不能随便去掉(无限多个)括号.例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于0，但去掉括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.通俗地说，收敛级数项与项之间可以任意加括号，但不能任意去掉括号.

定理4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其和分别是 A 与 B，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=(u_1 \pm v_1)+(u_2 \pm v_2)+\cdots+(u_n \pm v_n)+\cdots$$

也收敛，其和是 $A \pm B$.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$的 n 项部分和分别是A_n，B_n 与 C_n，有

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=(u_1 \pm v_1)+(u_2 \pm v_2)+\cdots+(u_n \pm v_n) \\ &=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$ 与$\lim\limits_{n\to\infty} B_n=B$，有

$$\lim_{n\to\infty} C_n=\lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n=A \pm B,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛，其和是 $A \pm B$. □

练 习 题 9.1(一)

1. 求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明:若 m 是固定的正整数,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

3. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a > 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

4. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_n \geqslant 0)$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.反之是否成立?

5. 证明:若 $\{a_n\}$ 是整数数列,且 $0 \leqslant a_n \leqslant 9$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 收敛,其和是 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

6. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,且

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \quad n=1,2,\cdots,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.(提示:应用级数的柯西收敛准则.)

7. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

8. 证明:若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 都收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

* * * *

9. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.(提示:证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 的两个子数列 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n-1}\}$ 有相同的极限.)

10. 证明:若数列 $\{na_n\}$ 收敛,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.