数列与数学归纳法

惠仰淑　刘彭芝　编

黑龙江教育出版社

数列与数学归纳法

惪仰淑　刘彭芝　编

黑 龙 江 教 育 出 版 社

1990年·哈尔滨

数列与数学归纳法

慈柳淑　刘彭芝　编

责任编辑：孙怀川

封面设计：冯春兰

黑龙江教育出版社出版（哈尔滨市道里九站街1号）

黑龙江新华附属印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32 ·印张9.25·字数 189 千

1990年12月第1版·1990年12月第1次印刷

印数：1—2,017

ISBN 7-5316-1153-8/G·824 定价： 3.00元

前言

数列和数学归纳法是高中数学的重要内容，也是高等数学的一个组成部分，它是解决数学和科学问题的强有力的工具。数学归纳法是在数学的各个领域中经常采用的推理证明方法，因此，在高考、各种测试和各级数学竞赛试题中常常出现这类问题。近几年的高考和竞赛题中有不少递推公式给定的数列题，对于这种题，很多同学感到新颖和相当棘手。

为了帮助同学们提高解题能力，迎接高考和参加各种数学竞赛、提高数学水平，也为了向任教老师们提供一些有关数列、递推公式和数学归纳法的教学补充资料，我们将多年来在正规教学、各类教学培训和数学竞赛班的教学经验，做了归纳、整理，由浅入深、系统地写出这本课外读物。

本书§1对已知数列的前几项，如何求它的通项公式问题作了一般的探讨；§2介绍了等差数列、调和数列及高阶等差数列；§3叙述了等比数列，给出了富有代表性的等比和等差数列的综合题；§4着重研究第二数学归纳法，给出了一些用归纳法解几何、代数和三角的习题；§5集中讲述了几种特殊数列的求和问题，§6介绍了求递推数列通项公式的有普遍意义的方法和几种特殊类型的递推数列。

本书各部分除了列举足够的典型例题之外，还精选了相当数量的有意义的练习题。书后均给出练习题的答案或解

答，以便帮助读者深入理解正文并且掌握和运用灵活多样的解题方法和技巧。

编　者

北京一五七中惪仰淑

北京人大附中刘彭芝

1990年5月

目　　录

§1 数　　列

一、数列的概念

先看下面的例子：

把不超过12的正偶数从小到大依次排列起来得到一列数：

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12. \tag{1}$$

把自然数从小到大依次排列起来得到一列数：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n,\ \cdots. \tag{2}$$

把自然数的倒数，依次排列起来得到一列数：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots. \tag{3}$$

把$\sqrt{2}$的不足近似值，按照精确度，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，$\cdots$，的顺序排列起来得到一列数：

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\cdots. \tag{4}$$

把$-\frac{1}{3}$的1次幂，2次幂，3次幂，…顺次排列起来得到一列数：

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \cdots. \tag{5}$$

把$f(n)=10-3n$在自变量n取自然数1,2,3,…时所得的函数值排列起来得到一列数：

$$7,\ 4,\ 1,\ -2,\cdots. \tag{6}$$

把$f(n)=n^2-(n+2)(n-2)$在自变量n取自然数1，2,3，…时所得的函数值排列起来得到一列数：

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \cdots, \tag{7}$$

象上面例子中按某种规律排列着的一列数叫做数列。数列中的每一个数都叫做这个数列的项。各项依次叫做这个数列的第1项（或首项），第2项，第3项，…，对于数列（1）每一项与它的序号（或项数）有下面的对应关系：

$$\begin{array}{lcccccc} \text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{项} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{array}$$

这就是说，数列可以看作一个定义域为自然数集N（或它的有限子集$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$）的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值。

数列的一般形式可写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

简记为$\{a_n\}$，其中a_n是数列的第n项，例如，数列（3）可简记为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$。如果数列$\{a_n\}$的第$n$项$a_n$与$n$间的函数关系可以用一个公式表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式，例如，数列（1）的通项公式是$a_n=2n(n\leqslant 6,\ n\in N)$。

如果已知数列的通项公式，那么依次用1，2，3，…代替公式中的n，就可以得到数列的各项。例如，已知数列的通项公式是$a_n=n^3$，则它的前4项是1，8，27，64，这是自然数的立方数列，即

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \cdots,\ n^3,\ \cdots.$$

可简记为数列$\{n^3\}$。

又如已知一数列的通项公式为$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$，当自变量$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$时，就得数列$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right\}$的前8项：

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{14}, -\frac{1}{16}.$$

要注意，数列和函数一样，它的通项公式有时可以由几个式子构成，例如：

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n} & \text{当 } n \text{ 为奇数时，}\\ 2, & \text{当 } n \text{ 为偶数时。}\end{cases}$$

这个数列的前6项为

$$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{8}, 2, \frac{1}{32}, 2.$$

由此可见，数列的通项公式就是函数的解析式子，而这个函数的定义域是自然数集N或它的一个有限子集$\{1, 2, \cdots, n\}$。正象函数的表达不是都能用解析法给出一样，数列的通项也不是都可以用公式表出。如质数数列

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots$$

的通项公式就是不知道的。但这个数列的所有各项都可借助于检验质数法而算出。又如$\sqrt{2}$的不足近似值按精确度为$10^{-n}(n=1, 2, 3, \cdots)$排列的一列数：

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$$

也是没有给出它的通项公式，但对任何一项都可借助于开平

方的方法而算出。因而，不论一个数列的通项公式是否可以求得，只要我们能写出这个数列的任意一项，这个数列就是已知的。

已知一数列的通项公式或构成规律，可以写出这个数列的前几项以及任意一项，但是只知道一个数列的前几项，这个数列的通项是未定的。例如，已知数列的前 3 项为1，3，5，它的通项公式可以是

$$a_n=2n-1, \tag{1}$$

$$a_n=2n-1+(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$=n^3-6n^2+13n-7, \tag{2}$$

$$a_n=2n-1+2(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$=2n^3-12n^2+24n-13, \tag{3}$$

$$a_n=2n-1+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$=n^4-10n^3+35n^2-48n+23, \tag{4}$$

并且我们还可以写出它的很多通项公式。

由通项公式（1），（2），（3），（4）得出的数列的前 5 项分别是

1，3，5，7，9；

1，3，5，13，33；

1，3，5，19，57；

1，3，5，7，33。

它们的前 3 项都是1，3，5，但以后的项确不都相同。

由前 3 项1，3，5，容易看出存在一个简单规律：

$1=1+0\times2$，$3=1+1\times2$，$5=1+2\times2$。

由这个规律自然得出数列的通项公式 $a_n=1+(n-1)\times2=$

$2n-1$.

在理论上，只知道一个数列的前几项是可以随便把它延续下去的，例如，前3项为1，3，5而以后各项都是2，则可得数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots.$$

它的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}2n-1, & n=1,\ 2,\ 3,\\ 2, & n\geqslant 4,\ n\in N.\end{cases}$$

看起来这个数列也很简单，然而它失去了前3项所具有的简单规律。所以以后当已知一个数列的前几项而求它的通项公式时，总是假定组成数列前几项的规律始终不变而求一个比较简单又比较自然的通项公式。

由于数列是以自然数为自变量的函数，自然数列可用图象表出。我们把直角坐标系的横轴的正方向作为表示数列的项数n的轴，把纵轴作为表示数列各项的值a_n（当a_n为实数时）的轴。

例如，数列2，4，6，8，10，12可以用下面的图象表示（图1）。

注意，因为n是一个个分散开来的数，所以数列的图象是一个个分散的点。但是为了容易看出数列的变化情况，可以把这些点顺次用虚的折线连接起来，把各点的纵坐标用虚线作出来。

又如，数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$的图象为图2：

由图象可直观地看出，这个数列各项的值逐渐下降且向

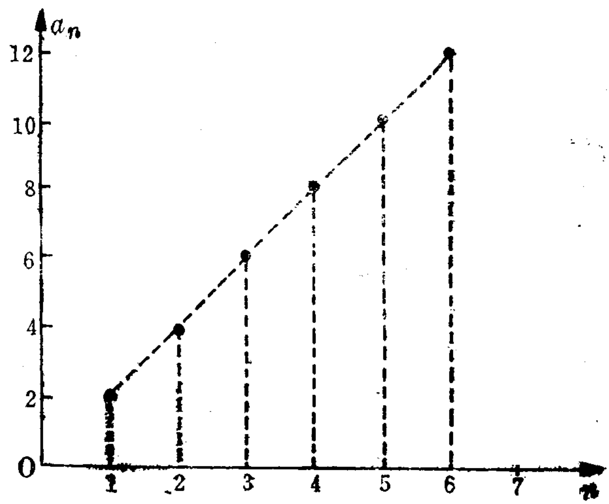

图 1

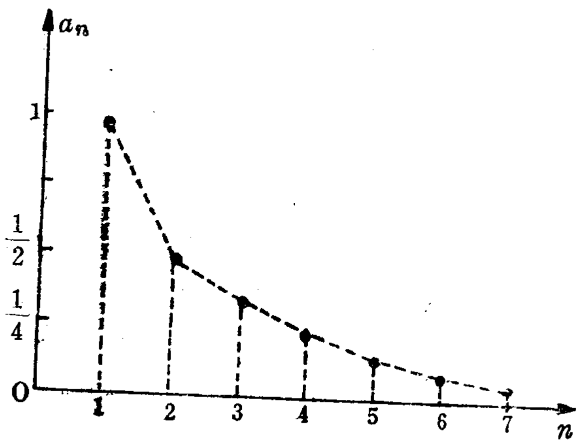

图 2

0接近，最大的项是$a_1=1$。

又如，数列$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$-\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$，…，$\left(-\frac{1}{3}\right)^n$…的图象为图3：

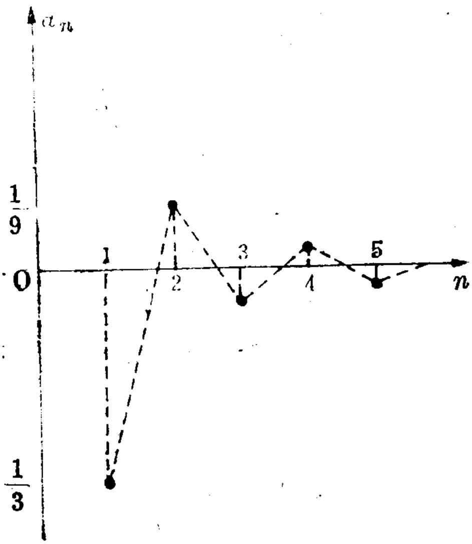

图 3

这个数列各项的值一负一正在0的上下摆动。各项的绝对值最大的是$|a_1|=\frac{1}{3}$，以后逐渐减小向0接近。

注意：作图时a_n轴上的长度单位不必与n轴的长度单位相同。

数列的分类：我们考察数列（1）—（7），可以看出它们具有不同的特点。

1．从项数上考察：数列(1)只有6个项，而其它数列都有无穷多个项。

一个数列如果在某一项的后面不再有其它的项，这个数列叫做有穷数列，如果在任何一项的后面都还有跟随着的项，这个数列就叫做无穷数列。

例如，数列（1）是有穷数列，数列（2）－（7）是无穷数列。

2．从前后两项的值的大小比较上考察：如函数中增函数减函数的概念，在数列中也有递增数列与递减数列，即在一个数列里，如果从第2项起每一项都比它的前一项大($a_{n+1}>a_n$)，这个数列叫做递增数列；如果从第2项起，每一项都小于它前一项($a_{n+1}<a_n$)，这个数列就叫做递减数列。

例如，数列(1)，(2)，(4)是递增数列。数列(3)，(6)是递减数列。

再看数列(5)，从第2项起，有些项大于它前一项，又有些项小于它前一项，我们把这类数列叫做摆动数列，在数列(7)中，它的各项都是相等的，我们把这类数列叫做常数列。

3．从各项的绝对值来考察：如函数中有界函数与无界函数的概念．在数列中，也有有界数列与无界数列，即任何一项的绝对值都小于某一个正数（即$|a_n|<M$，M是某一个正数）的数列叫做有界数列；没有这样的正数存在的数列叫做无界数列。

例如，数列(1)中各项的绝对值都小于13，即$|a_n|<13$，所以数列(1)是有界数列。

数列（2）的各项的绝对值随着n的增大而无限制地增大，不存在一个正数M能使$|a_n|<M$，对一切$n\in N$都成

立，所以它是无界数列。

数列(3)的各项都有$|a_n|=\frac{1}{n}\leqslant 1<2$，所以它是有界数列。

同理可以确定数列(4)，(5)，(7)为有界数列，而数列(6)为无界数列。

注意，凡是有穷数列都是有界数列，而无穷数列则有的是无界数列而有的是有界数列。

例1 写出下列无穷数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{8}$，…；

(2) 3，1，-1，-3，…。

并确定这两个数列是递增数列还是递减数列，是有界数列还是无界数列。

解 (1) 观察数列的前4项：$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{8}$，可得一个自然而简单的规律：各分母为项数的2倍，而分子比项数的2倍少1。因而，它的通项公式为

$$a_n=\frac{2n-1}{2n}，对一切n\in N。$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}=\frac{2n+1}{2(n+1)},$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=\frac{2n+1}{2(n+1)}-\frac{2n-1}{2n}$$

$$=\frac{(2n+1)n-(2n-1)(n+1)}{2n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2n(n+1)}>0,\ 对任何 n\in N,$$

所以，这个数列是递增数列。

又，$$|a_n|=\left|\frac{2n-1}{2n}\right|=1-\frac{1}{2n}<1,\ 对任何 n\in N,$$

所以，这个数列是有界数列。

(2) 观察数列的前4项：3，1，-1，-3，可得一个自然而简单的规律：$1=3-2$；$-1=1-2=3-2\times2$；$-3=-1-2=3-3\times2$；又$3=3-0\times2$。依此，它的通项公式为

$$a_n=3-2(n-1)=5-2n(n\in N),$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=5-2(n+1)=3-2n,$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=(3-2n)-(5-2n)=-2<0(n\in N),$$

所以，这个数列是递减数列。

又，$$|a_1|=3,\ |a_2|=1,$$

$$|a_n|=2n-5,\ 当 n\geqslant3,\ n\in N 时,$$

由此可见，当$n\geqslant3$时，$|a_n|$随n的增大而无限制地增大，不存在一个正数M，能使$|a_n|<M$，对一切$n\in N$都成立，所以这个数列是无界数列。

注意，由这个例子可见，递增数列不一定是无界数列，递减数列也不一定是有界数列。通常我们把既是递增（递减）又是有界的数列叫做递增有界（递减有界）数列。(1) 的数列就是递增有界数列。又如，数列

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$$

就是递减有界数列。