全国硕士研究生入学统一考试历届考题

名家解析及预测

理工数学一

刘斌 编

2003

世界图书出版公司

全国硕士研究生入学统一考试历届考题

名家解析及预测

理工数学一

刘 斌 编

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析及预测.理工数学一/刘斌编.
—西安:世界图书出版西安公司,2002.3
ISBN 7-5062-5325-9

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009146 号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析及预测——理工数学一

编　著　刘　斌
责任编辑　焦毓本
总 策 划　谭隆全
封面设计　东　方

世界图书出版西安公司 出版发行
(西安市南大街 17 号　邮编 710001)
北京市后沙峪印刷厂印刷
各地新华书店经销
开本:787×1092(毫米)　1/16　印张:86(总)　字数:2146.56 千字(总)
2002 年 3 月第 1 版　　2002 年 3 月第 1 次印刷
印数:1～3000 册

ISBN 7-5062-5325-9
H·373 共 7 册 定价:126.00 元

出版说明

本套丛书具有**资料完整、分析详细、解剖透彻、技巧灵活和预测准确**的特点。首先，汇集了 1987～2002 年数学，1992～2002 年政治、英语的历届研究生入学考试试题，包括理科政治、文科政治、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四，共七册；其次，真正做到了逐题解析，透彻详细，论证严密，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，还对命题思路、解题的重点、难点进行了深入解析，并注重解题思路和规律的分析——总结与方法——技巧的提炼；最后对命题趋势作出预测，切题率高。

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，至今已有 16 年，共命制试卷 100 余份，数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治方面知识、能力和水平的要求，展示出统考以来三门基础课考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过 10 届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如，2002 年数学一的第一大题第(4)小题与 1993 年数学一的第七大题，2002 年数学一的第五大题与 1995 年数学三的第六大题，2002 年数学一的第一大题第(5)小题与 1996 年数学三的第十二大题，2002 年数学一的第十一大题与 1994 年数学四第十一大题，2002 年数学二第二大题第(2)小题与 1999 年数学四第二大题第(1)小题，2002 年数学二第八大题与 1996 年数学一第三大题，2002 年数学二第十一大题与 1997 年数学二第三大题，2002 年数学三第二大题第(3)小题与 2001 年数学三第二大题第(4)小题，2002 年数学三第十一大题与 1999 年数学三第十一大题，2002 年数学三、四第十二大题与 1999 年数学四第二大题第(4)小题，2002 年数学四第六大题与 1999 年数学三、四第二大题第(2)小题，2002 年数学四第七大题与 1995 年数学四第六大题，2002 年数学四第九大题与 1994 年数学二第八大题，2001 年数学一的第一大题第(1)小题与 2000 年数学二第二大题第(5)小题，2001 年数学一的第六大题与 1997 年数学一的第三大题第(2)小题；2001 年数学一的第九大题与 1996 年数学三的第十大题，2001 年数学二的第一大题第(5)小题与 2000 年数学一的第一大题第(4)小题，2001 年数学三、四的第二大题第(1)小题与 1996 年数学一第二大题第(2)小题，2001 年数学三、四第二大题第(3)小题与 1995 年数学一第二大题第(5)小题，2001 年数学一第三大题与 1992 年数学三第四

大题，2001 年数学三、四第七大题与 1996 年数学三第六大题等等都是相同或非常相似的，且解题思路几乎完全一样，可见仅在**最近两年**的数学考题中就有**多达 20 余道题**是与往届考题雷同的，考生若把这些历年试题全部消化巩固，将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此，广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历年考试资料作为参考，共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作，现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本丛书的考点预测部分是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶，具有极高的切题率。比如，从去年版本来看，准确预测到 2002 年数学试题中的有关方向导数、多元函数的极值、压力以及弹性等方面的试题；英语试题预测，由于题型的变化，取消了词汇和语法结构这一考试项目，就变得更难以确定，但编者预测到了阅读理解第 3 篇和第 4 篇的有关内容。完形填空也预测到是科普性文章。

本丛书的文科政治和理科政治的四位作者中，有三位曾是教育部原政治命题组组长或命题组成员，一位是长期阅卷，并一直担任政治阅卷组组长。他们现在都是北京市和全国各大城市举办的大型考研辅导班和串讲班的主讲教授。所以，他们对历届考题的解析及预测的权威性强，可信度高。

本丛书对 2003 年的命题趋势作了科学的预测，相信对即将参加研究生入学考试的广大同学具有重要的参考价值。

由于时间比较仓促，难免还有不当之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本系列丛书能不断完善。

全国硕士研究生入学考试试题研究组

本书特点

1.全国考研辅导名家主笔。具有标准的解题示范及指导作用。

2.解析详尽、透彻，权威性强。

3.掌握命题规律，预测准确，命中率高。

责任编辑:焦毓本
总 策 划:谭隆全
封面设计:东　方

目　　次

第一篇　全国硕士研究生入学统一考试 历届理工数学一试题、答案及解析

2002年全国硕士研究生入学统一考试 理工数学一试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2x}=$ ________.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$ ________.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1,y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是________.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$,则 $a=$ ________.

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu=$ ________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面4条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则有

(A)②⇒③⇒①

(B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①

(D)③⇒①⇒④　　【　】

(2) 设 $u_n\neq0(n=1,2,3,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$

(A) 发散

(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛

(D) 收敛性根据所给条件不能判定 【　】

(3) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，则

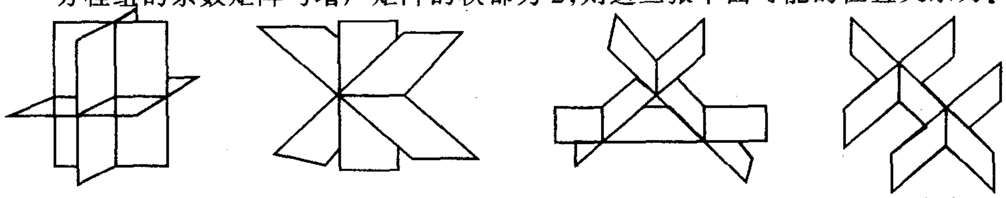
(A) 当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

(B) 当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

(C) 当 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$

(D) 当 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ 【　】

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1,2,3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为2，则这三张平面可能的位置关系为【　】



(A)　(B)　(C)　(D)

(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则

(A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数 【　】

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$，若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a, b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dxdy$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数,L 是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲线,其起点为 (a,b),终点为 (c,d).

记
$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面,其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$,小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点.也就是说,要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,

(1) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似,试证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3) 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时,试证(1)的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y^2 的数学期望.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数,利用总体 X 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

2002年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题答案及解析

一、填空题

(1) $\underline{\ 1\ }$.

[解析]

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}d\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1$$

(2) $\underline{\ -2\ }$.

[解析]

由 $x=0$ 代入方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 得 $y=0$,等式 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边同时对 x 求导得

$$e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0, \tag{1}$$

将 $x=0,y=0$ 代入上式得 $y'(0)=0$

式(1)两边同时再对 x 求导,得

$$e^y\cdot(y')^2+e^y y''+6y'+6y'+6xy''+2=0, \tag{2}$$

再将 $x=0,y=0,y'(0)=0$ 代入上式得 $y''(0)=-2$.

(3) $\underline{\ y=\sqrt{x+1} 或 y^2=x+1\ }$.

[解析]

令 $y'=p$,则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$,

原方程化为 $yp\frac{dp}{dy}+p^2=0$,即$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}$,

积分得 $\ln p=-\ln y+C_1$,即 $p\cdot y=e^{C_1}=C$. 由 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2},y|_{x=0}=1$ 得 $C=\frac{1}{2}$,即 $py=\frac{1}{2}$,再由 $p=\frac{dy}{dx}$,有$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$,即 $2ydy=dx$.

积分得 $y^2=x+C_2$,再利用 $y(0)=1$ 有 $C_2=1$. 故所求特解为 $y=\sqrt{x+1}$ 或 $y^2=x+1$

(4) $\underline{\ 2\ }$.

[解析]

变换前后二次型所对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

由题设知 $A \sim B$,从而 A、B 有相同特征值,于是 $a+a+a=6+0+0$,得 $a=2$.

(5) $\underline{\quad 4 \quad}$.

[解析]

二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的条件为

$$4^2-4X<0, \text{即 } X>4$$

由题设有 $P(X>4)=\frac{1}{2}$,且 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,由正态分布的性质知 $\mu=4$.

二、选择题

(1) 应选(A).

[解析]

四个性质中,② 结论最强,由 ② 可推出 ③,而由 ③ 可推导出 ①,因此应选(A).

但反过来,③ 不能导出 ②,所以(B) 不成立;④ 不能导出 ①,因此(C) 不正确;① 不能导出 ④(特殊情形是一元函数,显然不成立),因此(D) 也不正确.

(2) 应选(C).

[解析]

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ 的部分和数列

$S_{2n}=(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2})-(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3})+\cdots-(\frac{1}{u_{2n}}+\frac{1}{u_{2n+1}})=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{2n+1}}$,

$S_{2n+1}=(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2})-(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3})+\cdots+(\frac{1}{u_{2n+1}}+\frac{1}{u_{2n+2}})=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_{2n+1}}$,

由题设 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,知 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,故 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\frac{1}{u_1}$,可见 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$ 存在,因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ 收敛.

但取 $u_n=n$ 时,满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,但此时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ 非绝对收敛. 可见(B) 不成立,因此应选(C).

(3) 应选(B).

[解析]

本题可用排除法. 例如 $f(x)=\sin x$,在$(0,+\infty)$ 内有界且可导,有 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$,且 $f'(x)=\cos x$,此时 $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=1\neq 0$,可排除(C)、(D);

又如 $f(x)=xe^{-x}$ 在$(0,+\infty)$ 内有界且可导,有 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$,但 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}-xe^{-x})=1\neq 0$,可排除(A).故正确选项为(B).

[注]本题也可用拉格朗日中值定理直接证明(B)为正确选项.

(4) 应选(B).

[解析]

由题设知,方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

有无穷多组解.(A)只有惟一解;(C)、(D)无解,故正确选项为(B).

(5) 应选(D).

[解析]

本题考查概率密度和分布函数的性质.

由$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)dx=1+1=2$知,可排除(A);

比如取 $f_1(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$, $f_2(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$,

但 $f_1(x)f_2(x)=\begin{cases}2e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$,不能作为某一随机变量的概率密度,可排除(B);

$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=1+1=2\neq 1$,可排除(C),故(D)为正确选项.

[注]取 $Y=\max\{X_1,X_2\}$,则 Y 的分布函数为$F_1(x)\cdot F_2(x)$,可直接得(D)为正确选项.

三、[解析]

(方法一) 由题设条件知

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$$

由于 $f(0)\neq 0$,故必有 $a+b-1=0$

又由洛必达法则,有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0),$$

因 $f'(0)\neq 0$,故 $a+2b=0$

于是得 $a=2,b=-1$.

(方法二) 由条件得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h),$$
$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o(h),$$

所以 $af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h)$

因此当 $a=2,b=-1$ 时,有

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)$$

四、[解析]

由已知条件得

$$f(0)=0$$

$$f'(0)=\left.\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1$$

故所求切线方程为 $y=x$

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$$

五、[解析]

设 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\}$

则
$$\begin{aligned}\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx\,dy&=\iint_{D_1}e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx\,dy+\iint_{D_2}e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx\,dy\\&=\iint_{D_1}e^{x^2}\,dx\,dy+\iint_{D_2}e^{y^2}\,dx\,dy\\&=\int_0^1dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1dy\int_0^y e^{y^2}dx\\&=\int_0^1xe^{x^2}dx+\int_0^1ye^{y^2}dy\\&=e-1\end{aligned}$$

六、[解析]

(1) 证　因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 I 与路径无关．

(2)(方法一)　由于 I 与路径无关，故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 (c,d) 的折线段，所以

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)dx+\int_b^d cf(cy)dy+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)dt+\int_{bc}^{cd}f(t)dt\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)dt\end{aligned}$$