英国中学数学综合题选

张枫森　编译

地质出版社

英国中学数学综合题选

张枫森　编译

地质出版社

英国中学数学综合题选

张枫森　编译

*　　*　　*

责任编辑：沈之慧
地质出版社出版
（北京西四）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：$787 \times 1092^{1}/_{32}$印张：$16^{5}/_{8}$字数：354,000
1987年12月北京第1版·1987年12月北京第一次印刷
印数：1—5500册　定价：3.75元
ISBN 7-116-00098-1/G·012
统一书号：7038·新188

编译者的话

三年前，当我读到英国出版的一些中学数学教材和习题、试题汇编等书籍时，就深深地被书中例题和习题所体现的内容的多样性、题型的新颖性以及解法的灵活性吸引了，萌发了将各书中的综合题选译出来供国内中学数学教学作参考和借鉴的愿望。在许多同事的鼓励和支持下，现在这一愿望终于实现了。

编译本书时，在内容的选择上，主要依据我国中学数学教学大纲所规定的内容，尽可能地保持原书题目新颖、类型多样、解法灵活、技巧性强等特色。写法上，与英国的习题、试题汇编一样，每章分提要、例题和习题三部分。提要主要写出该章所涉及的重要概念、公式、法则及重要结果。例题的选择注意了在加强基础知识和基本技能运用基础上的综合，注意了对一些体现新内容、新方法的例题的逐步展开和深入，注意了尽可能地避免与其他书籍内容上的重复。习题的配置尽量做到与例题相应，书末附有全部计算题的答案，为读者自学和练习提供方便。

本书编译过程中，北京师范大学钟善基教授审阅了全部编译稿，提出了宝贵的修改意见并热情为本书撰写了前言；苏州大学沈树民副教授、北京四十四中学汤伯禹老师也对本书提出了宝贵的看法和建议；我的同事章学礼老师为本书绘制了全部插图；北京159中学的沈之慧老师认真地进行了本书的编辑工作，及时订正了稿中的疏漏之处。在此对以上各

位同志一并致以诚挚的感谢。

限于笔者水平，书中的不足之处恳请读者批评指正。本书如果能对中学数学教学工作者及中学生有所助益，将给笔者带来无限的快慰。

张枫森
于江苏省常熟中学
1987年5月

前　言

如所周知，在数学教学中使学生解答数学习题，虽然不是数学教学的最终目的，但确是要达到教学目的所不可缺少的重要的教学手段．通过解题，可使学生对所学的理论知识体会得更加深刻，从而得以牢固地掌握．通过解题，才能使学生熟练数学的应用基本技能，并更多地认识抽象理论的用途和用法．同时，通过解题也才能使学生的数学能力得到更为充分的培养．

诚然，为学生选配的习题如果过简、过易、过少，是不能起到上述解题作用的．但遗憾的是，有时也常出现一种误解，认为想要发挥解题的作用，则为学生选配的习题越繁、越难和越多便越好．实际上这也是没有必要的．而且这样为学生选配习题，还将导致学生作业负担过重的不良后果．

一般地说，为学生选配习题，应以达到教学目的为前提，以教学大纲提出的教学要求为依据；按照学生的知识、技能和能力的实际水平来进行．特别是从学生解题所用的时间上来考虑，务使学生在解题时，能取得事半功倍的效果．作为数学课本的编者，在为课本配备习题时，一般也就是按照这种精神进行的．但限于课本的通用性，所配备的习题很难切合某一具体班级学生的实际水平．这样，在教学中就需要教师以参照课本中的习题为主，针对所教学生的实际水平，有所选择、有所增删地为学生选配适当的习题了．

长期以来，国内、外的数学教育工作者一直都把习题的

配备作为一项课题来进行研究．所编写的课本和习题集中，很多都反映出这项研究的成果．张枫森同志在多年的数学教学中，参考了一些国内外较新的数学课本和习题集，深感其中的一些综合性较强的习题颇有一些新意；而英国的数学教育的资料在国内的译本还不多，倘能把这些习题译出供广大数学教师参考，并供中学生作习题选用，当然有所受益．经过翻译、整理，更结合我国数学教育实际选择编译而成这本习题集，并定名为《英国中学数学综合题选》．

本书按数学分支划分为三部分，即“代数与分析”“平面三角”“平面解析几何”．每一部分都是按照由简到繁、由易到难的顺序编辑的．因此，便于教师针对自己所教学生的实际水平进行选择、配备作习题之用．每部分所辑习题的数量虽不多，但有一定的代表性．因此，教师们可从中得到启发，并进而丰富其内容．

本书除可供广大的中学数学教师和中学生参考外，还可供具有高中以上数学水平的数学爱好者于研究数学时的参考．

正当本书即将付印之际，愿作数语如上，聊表对出版本书的祝贺之意．

钟善基

1987年5月

目　录

I．代数与分析

第一章 代数方程

一、提要

1．一元二次方程

一元二次方程的一般形式为 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，它的根为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

一元二次方程的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$，当 $\Delta>0$ 时，原方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，原方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，原方程有两个复数根。

2．二元一次方程组

二元一次方程组的一般形式为

$$\begin{cases}Ax+By+C=0\\A'x+B'y+C'=0,\end{cases}$$

它的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{BC'-B'C}{AB'-A'B}\\[2ex]y=\dfrac{CA'-C'A}{AB'-A'B},\end{cases}\quad(AB'-A'B\neq0)$$

3．两个一元二次方程存在公根的充要条件

两个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$和$Ax^2+Bx+C=0$ 有

公根的充要条件是 $(aB-Ab)(bC-Bc)=(cA-Ca)^2$.

4. 二元二次方程组

二元二次方程组的一般形式为

$$\begin{cases}Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0\\ ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,\end{cases}$$

它的解法可根据方程系数的特点，分别使用因式分解，消去含有 x（或y）的项，消去所有的二次项，消去所有的不是二次项的项及消去常数项等特殊方法来解. 一般地，可利用两个一元二次方程有公根的充要条件消去y（或x）来求解，（见例9）.

5. 一元 n 次方程

一元 n 次方程的一般形式为

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\quad(a_0\neq0)$,

它的某些根可利用余数定理和综合除法求出.

若 $f(\alpha)=0$，则 α 是原方程的一个解，且

$$f(x)=(x-\alpha)g(x),$$

此处$g(x)$为$n-1$次多项式.

进一步地，若$f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)=0,\cdots,f^{(k-1)}(\alpha)=0$，则 α 是原方程$f(x)=0$ 的一个 k 重根，且

$$f(x)=(x-\alpha)^kg(x),$$

此处 $g(x)$为 $n-k$ 次多项式.

6. 一元 n 次方程的根与系数之间的关系

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一元 n 次方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\,(a_0\neq0)$$

的 n 个根，用Σ_r表示从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任取 r 个根相乘所得的所有乘积的和，那么

$$\Sigma_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$\Sigma_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_2}{a_0},$$

……

$$\Sigma_n=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

特别地，若 α，β 是方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根，那么

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}.$$

常用到

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta,$$
$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta,$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\text{等}.$$

又若α,β,γ是方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$（$a\neq0$）的三个根，那么

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$

常用到

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma),$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha+\beta+\gamma)^2-$$
$$-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]+3\alpha\beta\gamma\text{等}.$$

二、例题

例1 解下列关于 x 的方程：

（1）$(x-a)^3+(b-x)^3=(b-a)^3$，$(a\neq b)$，

（2）$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)+abc=0$.

解：（1）原方程可化为

$$(x-a)^3+(b-x)^3=[(x-a)+(b-x)]^3,$$

即 $$(x-a)^3+(b-x)^3=(x-a)^3+(b-x)^3+$$
$$+3(x-a)(b-x)[(x-a)+(b-x)],$$
$$3(x-a)(b-x)(b-a)=0,$$

$\because$ $a\neq b$,

$\therefore$ 原方程的根是 $x=a$ 和 $x=b$.

（2）设 $y=x+a+b+c$，则

$x+b+c=y-a$，$x+c+a=y-b, x+a+b=y-c$,

原方程可化为

$$(y-a)(y-b)(y-c)+abc=0,$$

即 $$y^3-(a+b+c)y^2+(ab+bc+ca)y=0,$$
$$y[y^2-(a+b+c)y+(ab+bc+ca)]=0,$$

解之，得

$$y=0,\ \frac{1}{2}[(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca}],$$

所以原方程的根为

$$x=-(a+b+c),$$

$$-\frac{1}{2}(a+b+c)\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca}.$$

例 2 解下列关于 x 的方程：

（1） $$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}\cdot\frac{1-ax}{1+ax}=1,$$

（2） $$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

解：（1）原方程可化为

$$\frac{1+bx}{1-bx}=\left(\frac{1+ax}{1-ax}\right)^2,$$

即
$$\frac{(1+bx)-(1-bx)}{(1+bx)+(1-bx)}=$$

$$=\frac{(1+2ax+a^2x^2)-(1-2ax+a^2x^2)}{(1+2ax+a^2x^2)+(1-2ax+a^2x^2)},$$

$$\frac{bx}{1}=\frac{2ax}{1+a^2x^2},$$

由此，得

$$x=0 \quad 或 \quad b(1+a^2x^2)=2a,$$

解之，得

$$x=0, \ \pm\sqrt{\frac{2}{ab}-\frac{1}{a^2}}.$$

（2）设 $y=\sqrt{a+x}$，则

$$\begin{cases} a+x=y^2 & ① \\ a-y=x^2 & ② \end{cases}$$

①－②，得

$$x+y=y^2-x^2,$$

即
$$(x+y)(x-y+1)=0,$$

当 $x+y=0$ 时，即

$$x+\sqrt{a+x}=0,$$

∴ $x^2-x-a=0,$

解之，得

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}};$$

当 $x-y+1=0$ 时，即

$$x-\sqrt{a+x}+1=0,$$

∴ $x^2+x+1-a=0,$

解之，得

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a-\frac{3}{4}};$$

所以原方程的根是

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}},\quad -\frac{1}{2}\pm\sqrt{a-\frac{3}{4}}.$$

例 3 解下列方程：

（1） $6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6=0$，

（2） $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$。

解：（1）根据综合除法，得

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
6 & 41 & 97 & 97 & 41 & 6 & -1 \\
 & -6 & -35 & -62 & -35 & -6 & \\
\hline
6 & 35 & 62 & 35 & 6 & 0 &
\end{array}$$

所以原方程可化为

$$(x+1)(6x^4+35x^3+62x^2+35x+6)=0,$$

即 $x+1=0$ 或 $6x^4+35x^3+62x^2+35x+6=0$。

解 $x+1=0$，得

$x=-1$；

由 $6x^4+35x^3+62x^2+35x+6=0$，得

$$6x^2+35x+62+\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0,$$

设 $y=x+\frac{1}{x}$，则上方程即为

$$6(y^2-2)+35y+62=0,$$

解之，得

$$y=-\frac{5}{2},\quad -\frac{10}{3},$$

若 $$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}, \text{ 则}$$

$$2x^2+5x+2=0,$$

解之，得

$$x=-2, \quad -\frac{1}{2};$$

若 $$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}, \text{ 则}$$

$$3x^2+10x+3=0,$$

解之，得

$$x=-3, \quad -\frac{1}{3};$$

所以原方程的根为

$$x=-1, -2, -\frac{1}{2}, \quad -3, -\frac{1}{3}.$$

（2）原方程可化为

$$6x^2+7x-36-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36=0,$$

设 $y=x-\frac{1}{x}$，则上方程为

$$6y^2+7y-24=0,$$

解之，得

$$y=-\frac{8}{3}, \quad \frac{3}{2},$$

若 $$x-\frac{1}{x}=-\frac{8}{3}, \text{ 则}$$

$$3x^2+8x-3=0,$$

解之，得

$$x=-3,\ \frac{1}{3};$$

若 $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$，则

$$2x^2-3x-2=0,$$

解之，得

$$x=2,\ -\frac{1}{2};$$

所以原方程的根为

$$x=-3,\ \frac{1}{3},\quad 2,\ -\frac{1}{2}.$$

例 4 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x^3-x^2y-2xy^2+y^3=0, & ①\\ x^2-3xy+4x+1=0, & ②\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x^2-2xy-y^2=14, & ①\\ 2x^2+3xy+y^2=-2. & ②\end{cases}$

解 （1）设 $y=tx$，则方程①可化为

$$2x^3-tx^3-2t^2x^3+t^3x^3=0,$$

即

$$(2-t-2t^2+t^3)x^3=0,$$

由于 $x=0$ 不适合方程②，所以必有 $2-t-2t^2+t^3=0$，

即

$$(t-2)(t+1)(t-1)=0,$$

$\therefore\ t=\pm1, 2.$

当 $t=1$ 时，$y=x$，代入方程②，得

$$-2x^2+4x+1=0,$$

解之，得

$$x=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}，此时 y=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{6};$$

当 $t=-1$ 时，$y=-x$，代入方程②，得

$$4x^2+4x+1=0,$$

解之，得

$$x=-\frac{1}{2}，\ -\frac{1}{2}，\ 此时\ y=\frac{1}{2}，\ \frac{1}{2};$$

当 $t=2$ 时，$y=2x$，代入方程②，得

$$-5x^2+4x+1=0,$$

解之，得

$$x=1，\ -\frac{1}{5}，\ 此时\ y=2,-\frac{2}{5};$$

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}\sqrt{6},1-\frac{1}{2}\sqrt{6}，\ -\frac{1}{2}，\ 1,-\frac{1}{5}, \\ y=1+\frac{1}{2}\sqrt{6},1-\frac{1}{2}\sqrt{6}，\ \frac{1}{2}，\ 2,-\frac{2}{5}. \end{cases}$$

（2）设 $y=vx$，则原方程组可化为

$$x^2(1-2v-v^2)=14, \qquad ③$$

$$x^2(2+3v+v^2)=-2, \qquad ④$$

③÷④，得

$$\frac{1-2v-v^2}{2+3v+v^2}=-7,$$

即
$$6v^2+19v+15=0,$$

解之，得

$$v=-\frac{5}{3}，\ -\frac{3}{2}.$$

当 $v=-\frac{5}{3}$时，$y=-\frac{5}{3}x$，代入方程①，得