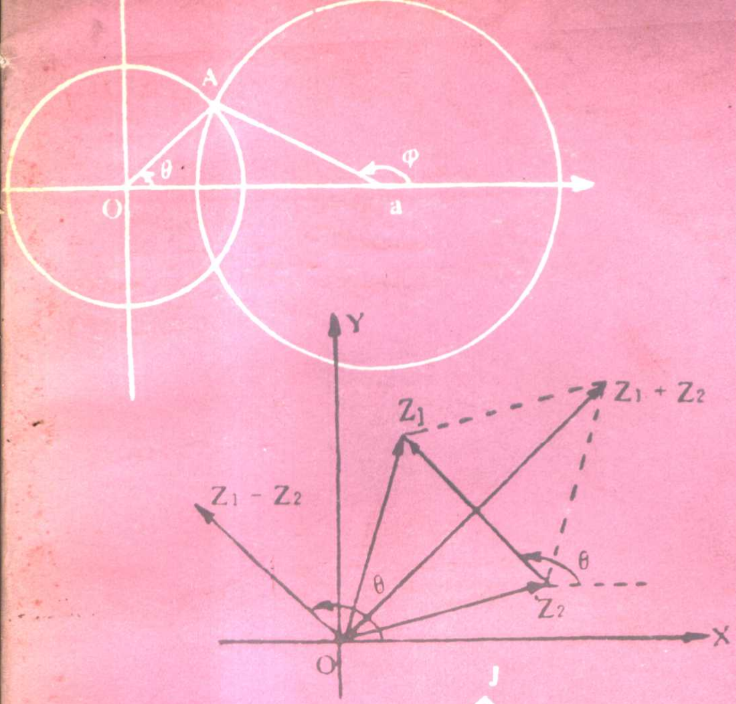
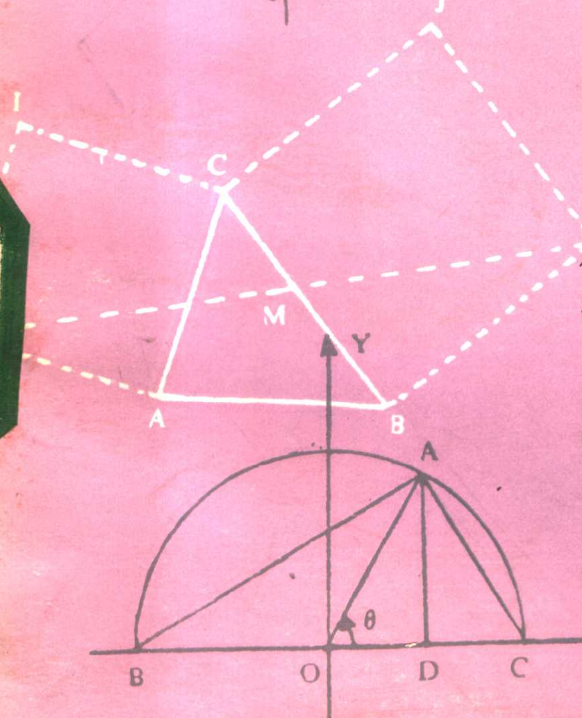
怎样用复数法解中学数学题

高仕安　杜仁光





怎样用复数法解中学数学题

高仕安　杜仁光

广 东 人 民 出 版 社

怎样用复数法解中学数学题

高仕安　杜仁光

•

广东人民出版社出版

广东省新华书店发行

韶关新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　7.25印张　157，000字

1984年10月第1版　1984年10月第1次印刷

印数1—48，280册

书号7111·1403　定价 0.87元

前　　言

方便、快捷、准确的数学解题方法是数学爱好者所追求的.在一定范围内，可以说复数方法就是这样的一种方法.复数本身是中学数学的一个内容，怎么会变成一种解题方法呢？本书将争取给读者一个比较系统的答案.

复数的发生和发展经历过一个漫长的历史时期．早在十六世纪后期，数学中就出现了复数，当时是被有胆识的数学家首次引用来成功地求解三次方程的根的．但是在它出现后的一个相当长的历史时期里，一直被某些数学家当作“虚玄”的怪物来反对和抵制.其实，这也难怪.就拿虚数单位i来说，它就是这么样的一个“数”，其平方等于-1，即$i^2=-1$，这是与我们的经验和习惯相违背的．在我们的现实生活中，不管怎样也找不到一个平方等于-1的数，怎么不令人感到“虚玄”呢？但是，随着时间的推移与实践的检验，复数的实质逐渐被人们所认识和接受，并显示出它的巨大生命力．至今，复数及复变函数论的概念和方法已渗透到数学的其它分支以及其它科学技术的各个领域，如运动学、力学，甚至量子力学、相对论等近代科学理论都可以找到它们的踪迹．因此，复数及复变函数论已成为数学宝库中的珍宝之一.

本书只是在初等数学知识范围内，来说明怎样应用复数方法解中学数学问题，即代数、三角、几何中的问题等．这

里所指的代数问题包括组合数求和、一类多项式的整除、因式分解以及一些关于根的问题；三角问题是指三角恒等式的推导，其中还包括很奇妙的三角级数求和；几何问题主要是指平面几何证明题的证明，其次是有关几何的极值问题以及一类轨迹问题的求解．学过数学的同志大概都有这样的体会，在解一道数学难题的时候，我们的思考往往要走过一段迂回曲折的道路，试了一种又一种方法，画了一条又一条辅助线，有时会尝到成功的愉快，有时也会陷入束手无策的苦恼．复数方法可以在一定范围内使我们的思考走过的道路变直变短，从而排除苦恼，尝到成功的愉快．书中着重列举大量例题(其中有不少国内和国际的数学竞赛题)，说明应用复数的解题方法，以利于读者理解、模仿和应用．每章之末附有练习题，目的是为读者在学习复数解题方法后提供一个实践的机会．书末还附有这些习题的解答，以便读者自学时查对．

本书可作为高中学生的课外读物，也可供中学数学教师在教学时参考．

目　　录

第一章　复　　数

1.1　复数的概念及复数的表示法

在中学数学课本中，我们知道，由于解方程的需要，人们在实数之外引进一个新数i，使它适合

$$i^2=-1,$$

称它为虚数单位．并且规定，i可以与实数在一起按照与实数同样的运算定律、法则进行四则运算．在这种规定下，i就是-1的一个平方根．又因为$(-i)^2=[(-1)i]^2=(-1)^2i^2=i^2=-1$，所以，$-i$是$-1$的另一个平方根，即$\sqrt{-1}=\pm i$．同时，引入这个新数后，方程$x^2=-1$，就有两个解$x=\pm i$．在这种规定下，$i$与实数$y$相乘，再同实数$x$相加，从而得到$x+iy$．

形如$Z=x+iy$的数称为复数，其中x和y是任意的实数，而i是虚数单位．实数x和y分别称为复数Z的实部和虚部，且记为：

$$x=R_eZ\text{或}R(Z),\qquad y=I_mZ\text{或}I(Z)$$

如果两个复数的实部和虚部分别相等，就认为它们是相等的，即

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$

相当于

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2.$$

因为被平面上直角坐标系中的坐标所确定的两个点，当且仅当它们具有相等的横坐标及相等的纵坐标时才会重合，于是能够建立平面上全部的点和所有的复数间的一一对应关系。换句话说，我们将借助于横坐标为x、纵坐标为y的点来表示复数$Z=x+iy$；这时任何复数为平面上完全确定的点所表示，反之，平面任何的点(x, y)将对应着完全确定的复数$Z=x+iy$(图1.1)。代替"表示数Z的点"通常简称为"点Z"。可以使复数的实部和虚部不与点的坐标对应，而与向量的坐标对应，即对应于向量在坐标轴上的（具有适当符号的）投影．例如，取向量的起点在坐标原点上，因而，就借助于向量表示了复数(图1.1)．

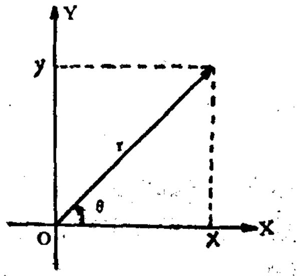


图1.1

我们将虚部等于零的复数$x+i0$和它的实部看作是一样的：$x+i0=x$，且认为实数是复数的特殊情况．用在ox轴上的点表示实数；ox轴称为实轴．类似地，实部等于零的复数(纯虚数)将写为$0+iy=iy$，它借助于oy轴上的点表示；oy轴称为虚轴．由于用平面的点可以表示全部的复数，故称此平面为复平面，或Z平面．

表示复数Z的点的位置，也可以借助于极坐标r和θ来确定(图1.1)，也就是借助对应于复数的向量的长度，和这个向量与实轴的正向所构成的角度来确定．数r和θ将相应地称为复数Z的模和幅角，且使用符号：

$$r=|Z|,\quad \theta=\mathrm{Arg}Z$$

在这里所引进的模的概念和对于实数的绝对值的概念是一致的．纯虚数的模就是它的虚部的绝对值

由模和幅角的定义推出，若$Z=x+iy$，则

$$x=r\cos\theta=|Z|\cos(\mathrm{Arg}Z) \tag{1.1}$$
$$y=r\sin\theta=|Z|\sin(\mathrm{Arg}Z),$$

和 $$|Z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}Z)=\mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

量$\mathrm{Arg}Z$是多值的，它们之间可以相差2π的整数倍，通常把由不等式

$$-\pi<\mathrm{Arg}Z\leqslant\pi$$

所确定的值称为$\mathrm{Arg}Z$的主值，Z的幅角的主值记为$\arg Z$．若Z是正实数，则$\arg Z=0$；若Z为负实数，则$\arg Z=\pi$；若Z是具有正虚部的纯虚数，则$\arg Z=\frac{\pi}{2}$；若Z是具有负虚部的纯虚数，则$\arg Z=-\frac{\pi}{2}$；当$Z=0$时，量$\mathrm{Arg}Z$没有意义．

利用公式(1.1)，可以把任何异于零的复数表达为所谓复数Z的三角式：

$$Z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{1.2}$$

特别，当$r=1$时，有

$Z=\cos\theta+i\sin\theta$，这种复数称为单位复数．例如，

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$i=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$1=1(\cos o+i\sin o)$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$-3i=3[\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})].$$

引用欧拉公式（参看书后面附录）

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, \tag{1.3}$$

可以把复数Z的三角式（1.2）化为指数式：

$$Z=re^{i\theta}. \tag{1.4}$$

例如，$1+i=\sqrt{2}\;e^{i\frac{\pi}{4}}$，$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$，$-1=e^{i\pi}$.

具有同样的实部，而虚部的绝对值相等，但符号相反的复数称为彼此共轭的复数．与数Z共轭的数表示为$\bar{Z}$．若$Z=x+iy$，则$\bar{Z}=x-iy$．由这定义推出，若$W=\bar{Z}$，则$Z=\bar{W}$，因而$\bar{\bar{Z}}=Z$．

设$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$，则

$\bar{Z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]=re^{i(-\theta)}$.

于是

$$|\bar{Z}|=|Z|=r;\quad \mathrm{Arg}\bar{Z}=-\mathrm{Arg}Z=-\theta.$$

即彼此共轭的复数的模是相同的，而幅角只是符号不同．但因为函数$\mathrm{Arg}Z$是多值的，所以等式$\mathrm{Arg}\bar{Z}=-\mathrm{Arg}Z$应该这样地理解：左端所确定的值的集合和右端所确定的值的集合

完全一样．后面遇到的类似的幅角等式也应这样理解．任何实数都与它的共轭数相同．

表示共轭数的点关于实轴是相互对称的．

1.2 复数的运算

复数的加法和乘法是按照代数多项式的加法和乘法规则来进行的．书写复数的运算结果时，要把实部和虚部分开，即分别归并不含有因子i的项及含有因子i的项：

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{1.5}$$

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

特别是，由(1.5)推出，两个彼此共轭的复数的乘积是实数，它等于这彼此共轭的复数的模的平方：

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2,$$

即 $$Z\bar{Z}=|Z|^2.$$

两个彼此共轭的复数的和也是实数：

$$(x+iy)+(x-iy)=2x,$$

即 $$Z+\bar{Z}=2R_eZ.$$

复数的减法是以加法的逆运算来定义的，由此得到

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

特别 $$(x+iy)-(x-iy)=i2y,$$

即 $$Z-\bar{Z}=i2I_mZ.$$

所以，复数相加或相减，就是把它们的实部和虚部分别相加或相减．若用向量表示复数，就象我们已经知道的那样，复数的实部和虚部就是向量的坐标，因为向量的相加或

相减就是它们的坐标对应地相加或相减，于是复数的相加或相减归结为表示这些数的向量的相加或相减（图1.2）。由于复数的模等于对应的向量的长度，所以，两个复数的和的模小于或等于这两个复数的模的和：

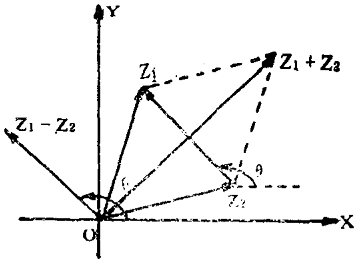


图1.2

$$|Z_1+Z_2|\leqslant|Z_1|+|Z_2|.$$

从上面的不等式可以得到：

$$|Z_1+Z_2+\cdots+Z_n|\leqslant|Z_1|+|Z_2|+\cdots+|Z_n|.$$

两个复数之差Z_1-Z_2的模$|Z_1-Z_2|$等于表示这两数的点之间的距离(图1.2)．因而，若Z_2是给定的复数(给定的点)，ρ是给定的正实数，则满足方程

$$|Z-Z_2|=\rho$$

的点Z的总体构成了以点Z_2为中心，以ρ为半径的圆周．不等式$|Z-Z_2|<\rho$确定在这圆周内的点集(圆内)，而不等式$|Z-Z_2|>\rho$确定在圆周外的点集(圆外)．其次，两复数之差Z_1-Z_2的幅角$\mathrm{Arg}(Z_1-Z_2)$等于由OX轴正向到向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$方向转过的角(图1.2)。

由两复数之差的幅角的几何意义知道，过点Z_1、Z_2的直线上的任一点Z应该满足(图1.3)：

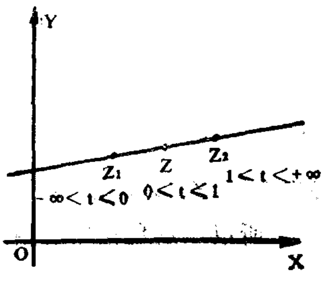


图1.3

$$\arg(Z-Z_1)=\arg(Z_2-Z_1)$$

或 $\arg(Z-Z_1)=\arg(Z_1-Z_2)$

即 $\arg(Z-Z_1)=\arg(Z_2-Z_1)+\pi$.

反之，若Z满足以上两式之一，则点Z必在过点Z_1、Z_2的直线上．因此

$$\arg\frac{Z-Z_1}{Z_2-Z_1}=0 \text{ 或 } \arg\frac{Z-Z_1}{Z_2-Z_1}=\pi.$$

由此得到 $\dfrac{Z-Z_1}{Z_2-Z_1}=t$(实数)。这就是经常会遇到的三点Z、Z_1、Z_2共线的充分且必要的条件。容易知道，关于点Z_1，如果Z与Z_2同侧，则t为正实数，如果Z与Z_2异侧，则t为负实数．当Z在直线上变动时，t也跟着变动．当$t=0$时，$Z=Z_1$；当$t=1$时，$Z=Z_2$，所以，当t在范围$0\leqslant t\leqslant 1$上变动时，Z刚好描出线段$\overline{Z_1Z_2}$．特别是，当$t=\dfrac{1}{2}$时，对应的Z刚好是线段$\overline{Z_1Z_2}$的中点．由$\dfrac{Z-Z_1}{Z_2-Z_1}=\dfrac{1}{2}$得两点$Z_1$、$Z_2$连线的中点是

$$Z=\frac{1}{2}(Z_2-Z_1)+Z_1=\frac{Z_1+Z_2}{2}.$$

同时，当t在范围$1\leqslant t<+\infty$变动时，Z描出从Z_2出发的射线，当t在范围$-\infty<t\leqslant 0$变动时，Z描出另一条与前射线方向相反的，从Z_1出发的射线(图1.3)．

复数的除法是以乘法的逆运算来定义的．利用共轭复数的性质，按下述方法进行复数的除法是方便的：首先把分子和分母乘以分母的共轭数，于是分母变为正实数，然后分别地用分母除实部和虚部，如

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

若利用复数的三角式：

$$Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则得到：

$$Z_1Z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)], \tag{1.6}$$

因而，复数相乘就是它们的模相乘，幅角相加：

$$|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|,\ \ \operatorname{Arg}(Z_1Z_2)=\operatorname{Arg}Z_1+\operatorname{Arg}Z_2.$$

表示乘积 Z_1Z_2 的向量可以用如下方法得到，把表示数 Z_1的向量旋转过由向量Z_2和实轴正向所构成的角度 θ_2，且把它的长度乘以向量 Z_2 的长度（图1.4）．例如，数 i 的模等于1，幅角等于$\frac{\pi}{2}$，所以乘以 i 归结为把向量不改变其长度地按正向旋转90°.

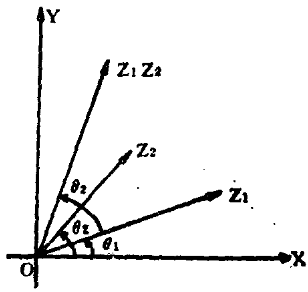


图1.4

模等于1的数具有 $\cos\theta+i\sin\theta$的形式，或者写成$e^{i\theta}$的形式．因而，向量 $Ze^{i\theta}$ 可以由向

量Z绕坐标原点旋转角度θ来得到.

给定为三角式的复数：

$$Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

其除法归结为公式：

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]. \qquad (1.7)$$

由此得

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\frac{Z_1}{Z_2}=\mathrm{Arg}Z_1-\mathrm{Arg}Z_2.$$

在公式(1.6) 及 (1.7)中，若用复数的指数式表示，则它们分别变为：

$$Z_1Z_2=r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

特别，当$r_1=r_2=1$时，有：

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

这就说明$e^{i\theta}$具有实指数函数 e^x所熟知的性质. 但是，由欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

得

$$e^{i(\theta+2\pi)}=e^{i\theta}.$$

即$e^{i\theta}$是以2π为周期的周期函数，而这是实指数函数e^x所不具备的.

两复数的和、差、积、商的共轭数与原来两复数的共轭

数间有什么关系？对于和、差，我们有

$$\begin{aligned}\overline{Z_1 \pm Z_2} &= \overline{(x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)}\\ &= (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2)\\ &= (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) = \overline{Z}_1 \pm \overline{Z}_2,\end{aligned}$$

即 $$\overline{Z_1 \pm Z_2} = \overline{Z}_1 \pm \overline{Z}_2.$$

为了得出积、商的结果，我们先来看 $re^{i\theta}$ 的共轭数．由复数的指数式与三角式的关系，得

$$\begin{aligned}\overline{re^{i\theta}} &= \overline{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = r(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = re^{i(-\theta)} = re^{-i\theta},\end{aligned}$$

即 $$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}. \tag{1.8}$$

特别是，当$r = 1$时，有

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

由(1.8)式，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{Z_1 Z_2} &= \overline{r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}} = r_1 r_2 e^{-i(\theta_2+\theta_1)}\\ &= r_1 r_2 e^{-i\theta_1} e^{-i\theta_2} = r_1 e^{-i\theta_1} r_2 e^{-i\theta_2} = \overline{Z}_1 \overline{Z}_2,\end{aligned}$$

即 $$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z}_1 \overline{Z}_2.$$

其次，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} &= \overline{\frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{-i\theta_1} e^{i\theta_2} = \frac{r_1 e^{-i\theta_1}}{r_2 e^{-i\theta_2}} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2},\end{aligned}$$

即

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}.$$