

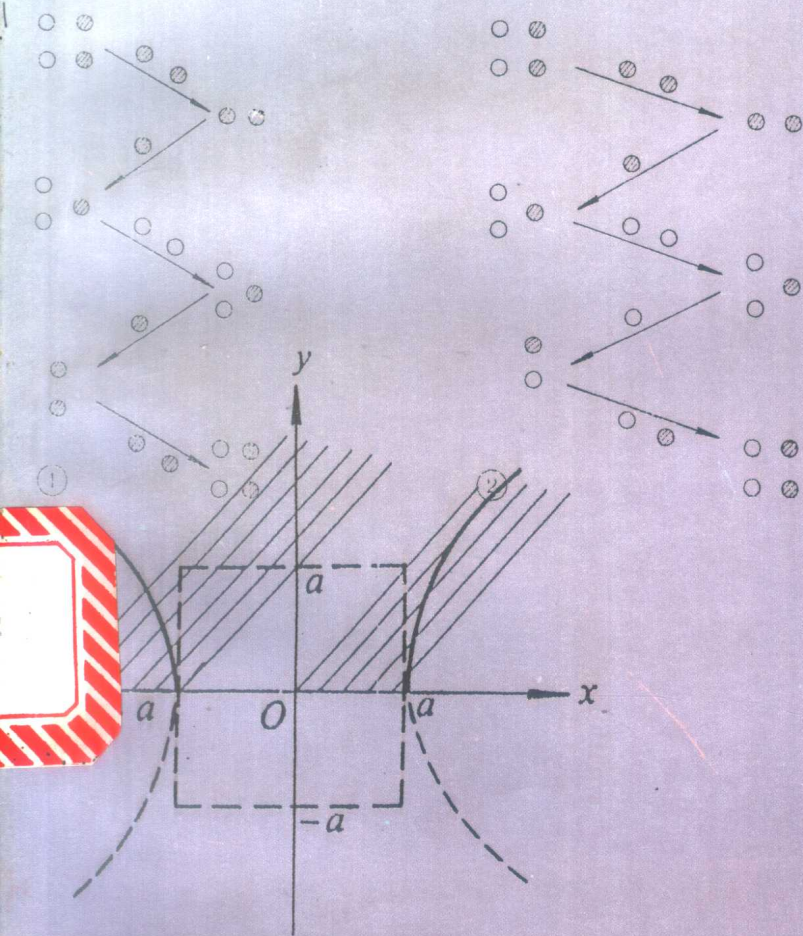
# 数学解题中的 动态思维

徐本顺

河南科学技术出版社



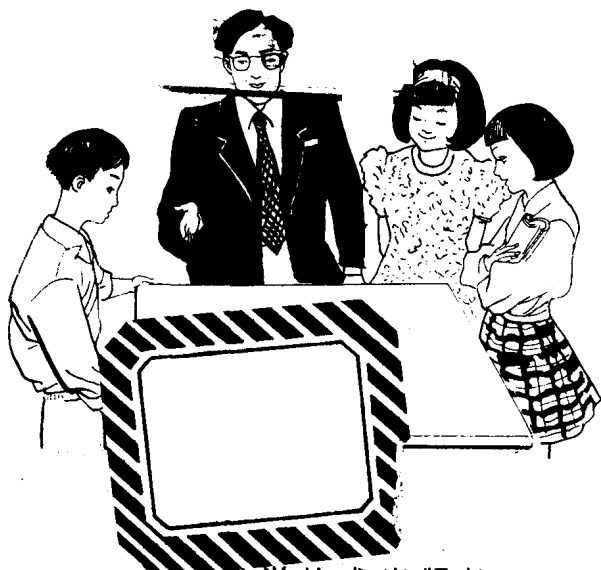
让你开窍的数学



让你开窍的数学

# 数学解题中的动态思维

徐本顺



河南科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书以中学数学中的典型问题和一些趣味数学题为例,具体而生动地展现了数学解题中的动态思维过程,使读者很自然地从问题的一种解法联想到另一种乃至一串新解法,使一个问题演变为另一个乃至一串新问题.这种写法非常新颖,极富启发性,有助于培养读者的数学兴趣和创造性思维能力.

本书适于中学生阅读(大部分内容初中生就能看懂),也可作为中学教师开展数学课外活动的材料,对关心中学数学课程改革的同志也有参考价值.

### 让你开窍的数学 数学解题中的动态思维

徐本顺

责任编辑:袁 元

河南科学技术出版社出版

(郑州市农业路73号)

河南第一新华印刷厂印刷

全国新华书店发行

787×1092毫米 32开本 7.625印张 149千字

1997年1月第1版 1998年4月第2次印刷

印数:4 001—7 000册

ISBN 7-5349-1933-9/G·504

定 价:8.50元

# 序

如果我们打开科学史,研究一些卓越人物成功的经验,就会发现一个重要的事实:他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳,但热爱生物,结果他成为最伟大的生物学家.反之,如果强迫他研究数学,他未必能如此成功.由此可见,兴趣与工作一致,二者形成良性循环,是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢?这固然与天赋有关,但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣,这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘,就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣,但这远远不够.如果在传授知识的同时,分析重要的数学思想,阐明发展概况,指出各种应用,使学生

不仅知其然,而且知其所以然,不仅看到定理的结论,而且了解它的演变过程,不仅看到逻辑之美,而且欣赏到形象之美、直观之美,这才是难能可贵的.在许多情况下,直观走在逻辑思维的前面,起了领路作用.直觉思维大都是顿悟的,很难把握,却极富兴趣,正是精华所在.M. 克莱因写了一部大书《古今数学思想》,对数学发展的主导思想有精彩的论述,可惜篇幅太大,内容过深,不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷,必须深入数学本身:不仅是学者,而且是作者;不仅是观众,而且是演员.他必须克服一个又一个的困难,不断地有新的发现、新的创造.其入也愈深,所见也愈奇,观前人所未观,发前人所未发,这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界.为此,他应具备很强的研究能力;而这种能力,必须从中学时代起便开始锻炼,经过长期积累,方可成为巨匠.

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用.近年来我国出版了多种数学课外读物,包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解.这套《让你开窍的数学》丛书与众不同,其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”,风格近似于美国数学教育家 G. Polya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》,但更切合我国的实际.本丛书共 8 本,可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广.作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平,而且大都出版过多种数学著作.因此,他们必能得心应手,写得趣味盎然,富于启发性.这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学,我们希望它能收到宗旨中确定的效果,为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996.7.

# 前言

解题是数学学习过程中一个重要组成部分. 面对一个题目, 如何进行思考? 在解题过程中思维是怎样活动的? 获得一个解法之后, 又是怎样联想到其他解法的? 同一个问题的不同解法之间有什么联系? 能否上升到一般性的思想方法? 在此基础上, 还可以提出其他的问题吗? 本书就上述几个方面, 选择了较具典型意义的数学题目, 对其思维的动态过程作了比较深入的剖析, 以便使读者开拓思路, 培养能力, 特别是创造性思维能力.

书中所选的几个问题, 都是经过笔者, 或是笔者的学生与小孩实践过的. 这里特别要提到的是爱女雪山, 她对解题的思维过程的探索很有兴趣, 不仅自己实践, 还利用业余时间在小学生、中学生中进行试验, 并取得了一定成绩. 当她即将于北京师范大学毕业, 并以优异的成绩

被录取为中国科学院硕士研究生,准备全身心地投入到对精彩的数学世界的遨游时,不幸于1994年5月6日5时,在外出进行社会教育实践途中,遇车祸夭折。

我失去了心爱的女儿,国家失去了一位未来的建设人才。数月晨昏,爱女音容笑貌时现,几番梦回,难挽温婉敏淑的女儿!原来应诺的书稿任务不得不暂时中断,还是本丛书责任编辑袁元先生,给我以极大的安慰与鼓励,使我振作精神,才得以完成本书的撰写工作。读者阅读本书后如果有所启发,并以此为契机,把自己造就为国家建设的出色人才,将是笔者得到的最大慰藉。

我谨以此书,作为悼念女儿的花环。

在写作过程中,我参考和引述了国内外许多书刊,在此不能一一列出,谨向这些书刊的作者表示感谢,并表示歉意。

王建军、宋举英、乔秀梅等同志参加了本书的部分撰稿工作,在此一并致谢。

本书的错误和不足之处在所难免,恳望读者批评指正。

**徐本顺**

1995年1月



# 目 录

|     |                             |      |
|-----|-----------------------------|------|
| 1   | 从用火柴摆正方形说起·····             | (1)  |
| 1.1 | 8根火柴能摆成几个正<br>方形?·····      | (1)  |
| 1.2 | 100根火柴最多能摆成<br>多少个正方形?····· | (4)  |
| 1.3 | 数列求和·····                   | (8)  |
| 1.4 | 正方形的面积·····                 | (11) |
| 1.5 | 问题成串·····                   | (13) |
| 2   | 一堂生动的复习课·····               | (19) |
| 2.1 | 类比·····                     | (20) |
| 2.2 | 抽象概括·····                   | (21) |
| 2.3 | 逆向思维·····                   | (22) |
| 2.4 | 整体转化法·····                  | (26) |
| 2.5 | 等积变换法·····                  | (27) |
| 2.6 | 特殊化·····                    | (30) |
| 2.7 | 移动辅助线法·····                 | (31) |

|     |                  |      |
|-----|------------------|------|
| 2.8 | 一般化              | (33) |
| 2.9 | 组合               | (36) |
| 3   | 局部与整体            | (40) |
| 3.1 | 回顾               | (40) |
| 3.2 | 定理与思路分析          | (42) |
| 3.3 | 矩形法              | (43) |
| 3.4 | 拼补法              | (46) |
| 3.5 | V形法              | (48) |
| 3.6 | 平移法              | (50) |
| 3.7 | 逆向倍增线段法          | (53) |
| 3.8 | 局部转化法            | (55) |
| 4   | 三角形内角平分线性质的证明与演变 | (57) |
| 4.1 | 定理与思路分析          | (58) |
| 4.2 | 等量代换法            | (59) |
| 4.3 | 线段旋转法            | (61) |
| 4.4 | 平行线法             | (64) |
| 4.5 | 等比代换法            | (65) |
| 4.6 | 演变出的新问题          | (67) |
| 5   | 比例线段问题与面积法       | (76) |
| 5.1 | 一道竞赛题            | (76) |
| 5.2 | 等量代换法            | (78) |
| 5.3 | 倍折法              | (78) |
| 5.4 | 等比代换法            | (79) |
| 5.5 | 比值算法             | (82) |

|          |                   |       |
|----------|-------------------|-------|
| 5.6      | 平行线法              | (85)  |
| 5.7      | 面积法               | (88)  |
| 5.8      | 关于面积法的思考          | (89)  |
| 5.9      | 命题的演变             | (91)  |
| <b>6</b> | <b>几何动态</b>       | (104) |
| 6.1      | 什么叫几何动态?          | (104) |
| 6.2      | 统一在圆幂定理之中         | (105) |
| 6.3      | 勾股定理的一种推广         | (109) |
| 6.4      | 动静结合              | (114) |
| 6.5      | 极端情况              | (118) |
| 6.6      | 整体审视              | (120) |
| <b>7</b> | <b>由变动图形位置想开来</b> | (124) |
| 7.1      | 变动直线的位置           | (124) |
| 7.2      | 广义角               | (133) |
| 7.3      | 变动圆的位置            | (137) |
| 7.4      | 换一个角度看问题          | (143) |
| 7.5      | 变中的不变量            | (148) |
| <b>8</b> | <b>变动点的位置</b>     | (153) |
| 8.1      | 关于等腰三角形的一个命题      | (153) |
| 8.2      | 关于三角形中线长的命题       | (160) |
| 8.3      | 关于两个三角形面积之比       | (164) |
| <b>9</b> | <b>从不等式到排序问题</b>  | (175) |
| 9.1      | 一个不等式             | (175) |
| 9.2      | 排序原理              | (178) |

|           |                        |       |
|-----------|------------------------|-------|
| 9.3       | 排序原理的应用 .....          | (183) |
| 9.4       | 排序问题 .....             | (191) |
| <b>10</b> | <b>函数法</b> .....       | (198) |
| 10.1      | 函数观点和方法 .....          | (198) |
| 10.2      | 构造函数法 .....            | (200) |
| 10.3      | 建立变量等式 .....           | (208) |
| 10.4      | 参数法 .....              | (209) |
| <b>11</b> | <b>切西瓜中的数学问题</b> ..... | (214) |
| 11.1      | 理想化与一般化 .....          | (214) |
| 11.2      | 一组类似问题 .....           | (216) |
| 11.3      | 观察与猜想 .....            | (218) |
| 11.4      | 验证与分析 .....            | (219) |
| 11.5      | 由特殊到一般 .....           | (220) |
| 11.6      | 由平面到空间 .....           | (221) |
| <b>12</b> | <b>人、熊过河问题</b> .....   | (223) |
| 12.1      | 图形化 .....              | (223) |
| 12.2      | 数字化 .....              | (226) |
| 12.3      | 类似问题 .....             | (228) |
| 12.4      | 拓广 .....               | (231) |



## 从用火柴摆正方形说起

小小的火柴盒里面也有大学问,比如用火柴摆图形,就是一件非常有趣的事.

一天,张老师拿了一些火柴分给陈思、郭思惠和王兆敏三位同学,然后提出了一系列问题.三位同学边动手边思考,在思维的王国里尽情地遨游,真正尝到数学美的甘甜.

### 1.1 8根火柴能摆成几个正方形?

张老师把火柴分给学生,然后提出如下问题.

张老师(以下简称师):“8根火柴能摆成几个正方形?”

陈思(以下简称陈):“可以摆成1个或两个.”[图1.2(a),(b)]

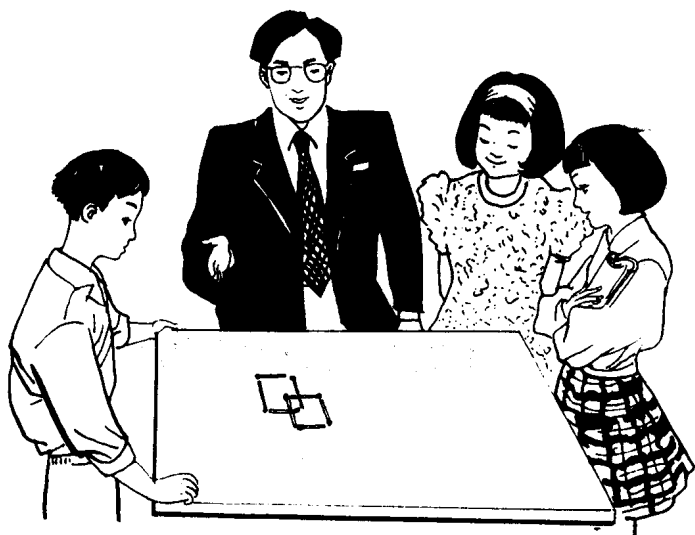
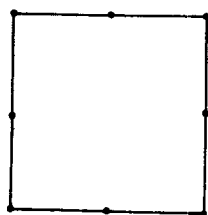
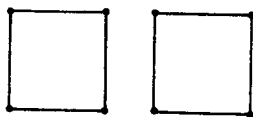


图 1.1

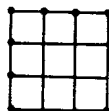
郭思惠(以下简称郭):“可以摆成 9 个.”[图 1.2(c)]



(a)



(b)



(c)

图 1.2

师:“还有不同的看法吗?”

同学们沉默。

师：“好，我再问一个问题，4根火柴能摆成几个正方形？”

郭：“4根火柴能摆成一个正方形。”

师：“如果在这个正方形上再加上两根火柴，能摆成几个正方形？”

王兆敏(以下简称王)：“又增加了4个小正方形，再加上原来那个大正方形，一共是5个正方形。”

师：“那么8根火柴就只能摆成9个正方形吗？”

郭：“噢！我想起来了，再加上外框那个大正方形，共有10个正方形。”

师：“1个大正方形，9个小正方形，看看还有没有遗漏的？”

郭：“没有了。”

师：“再想想看，还有没有比大的小、比小的大的正方形？”

郭：“对了，还有4个不大不小的正方形。这样，像图1.2(c)这样的摆法，一共有14个正方形。”

师：“对了，这就是 $1+4+9=14$ 。除了上面三种摆法外，还有其他的摆法吗？不妨在图1.2(b)的基础上，再试试看。”

同学们一边摆着火柴，一边思考着怎么在图1.2(b)的基础上再摆出新的花样出来。

师：“如果一个正方形不动，动另一个，看有什么结果？”

陈思同学恍然大悟，一种喜悦油然而生：“能摆出3个正方形。”(图1.3)

郭思惠、王兆敏同学都感到，这个问题真有意思。原来还

能组合成这一个小正方形,真是太妙了!

师:“这样一来,得到几个答案?”

王:“1,2,3,14,得到4个答案。”

师:“是否还有其他的答案?大家可在图 1.2(c)的基础上再试试看。”

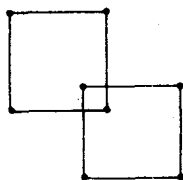


图 1.3

这时三位同学将目标集中在图 1.2(c)上,思考着怎样才能摆出新花样来。

师:“如果外框那 4 根火柴不动,动框内 4 根火柴,看有什么结果?”

三位同学移动着火柴,一会儿又摆出新的花样出来. 在图 1.4 中,(a)有 10 个正方形,(b)有 9 个正方形,(c)有 8 个正方形,(d)有 6 个正方形。

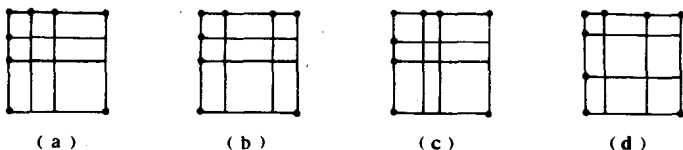


图 1.4

## 1.2 100 根火柴最多能摆成多少个正方形?

师:“如果问题变为 8 根火柴最多能摆成多少个正方形,应该怎样回答?”

郭:“最多能摆成 14 个正方形。”

师:“如果火柴不是 8 根,而是 100 根,那么最多能摆成多



少个正方形呢?”

三位同学默然无语.

师:“为了回答这个问题,我们可以先将问题一般化,考虑  $2n$  根火柴最多能摆成多少个正方形. 对于这个一般问题,又需要退一步去考虑,我们可先看一些特殊的例子,然后再进行归纳,找出一般规律. 为此先考虑  $n=2,3,4,5$  的情况.”

陈:“当  $n=2$  时,有 4 根火柴,这时只能摆 1 个正方形.”

郭:“当  $n=3$  时,有 6 根火柴,这时最多能摆成 5 个正方形.”

王:“当  $n=4$  时,有 8 根火柴,刚才已说过,最多能摆成 14 个正方形.”

陈:“当  $n=5$  时,有 10 根火柴,这时最多能摆成的正方形数为:1 个最大的正方形,4 个次大的正方形,9 个次小的正方形,16 个最小的正方形. 一共有  $1+4+9+16=30$  个正方形.”

师:“那么,让我们分析一下所得到的结果,上述结果可列成表 1.1.”

表 1.1

| $n$      | $2n$     | 最多能摆成的正方形数 |     |
|----------|----------|------------|-----|
| 2        | 4        | 1          | =1  |
| 3        | 6        | 1+4        | =5  |
| 4        | 8        | 1+4+9      | =14 |
| 5        | 10       | 1+4+9+16   | =30 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$   |     |

师:“表 1.1 又可以写成表 1.2.”