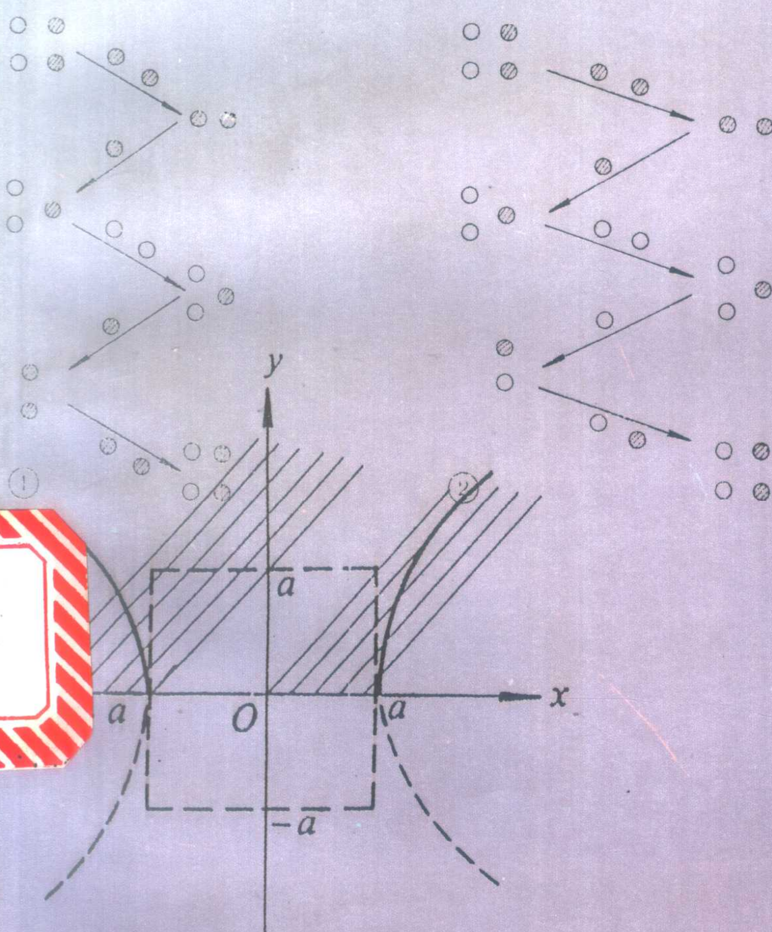
# 数学解题中的
# 动态思维

徐本顺

河南科学技术出版社

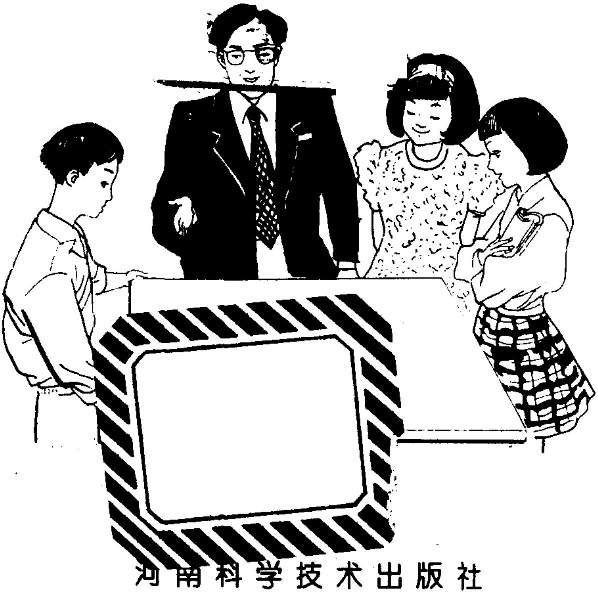
让你开窍的数学



让你开窍的数学

# 数学解题中的动态思维

徐本顺



河南科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书以中学数学中的典型问题和一些趣味数学题为例,具体而生动地展现了数学解题中的动态思维过程,使读者很自然地从问题的一种解法联想到另一种乃至一串新解法,使一个问题演变为另一个乃至一串新问题.这种写法非常新颖,极富启发性,有助于培养读者的数学兴趣和创造性思维能力.

本书适于中学生阅读(大部分内容初中生就能看懂),也可作为中学教师开展数学课外活动的材料,对关心中学数学课程改革的同志也有参考价值.

让你开窍的数学

**数学解题中的动态思维**

徐本顺

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版

(郑州市农业路73号)

河南第一新华印刷厂印刷

全 国 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米 32开本 7.625印张 149千字

1997年1月第1版 1998年4月第2次印刷

印数:4 001—7 000册

ISBN 7-5349-1933-9/G·504

定 价:8.50元

# 序

如果我们打开科学史，研究一些卓越人物成功的经验，就会发现一个重要的事实：他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳，但热爱生物，结果他成为最伟大的生物学家.反之，如果强迫他研究数学，他未必能如此成功.由此可见，兴趣与工作一致，二者形成良性循环，是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢？这固然与天赋有关，但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣，这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘，就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣，但这远远不够.如果在传授知识的同时，分析重要的数学思想，阐明发展概况，指出各种应用，使学生

不仅知其然，而且知其所以然，不仅看到定理的结论，而且了解它的演变过程，不仅看到逻辑之美，而且欣赏到形象之美、直观之美，这才是难能可贵的．在许多情况下，直观走在逻辑思维的前面，起了领路作用．直觉思维大都是顿悟的，很难把握，却极富兴趣，正是精华所在．M．克莱因写了一部大书《古今数学思想》，对数学发展的主导思想有精彩的论述，可惜篇幅太大，内容过深，不易为中学生所接受．

真正要对数学入迷，必须深入数学本身：不仅是学者，而且是作者；不仅是观众，而且是演员．他必须克服一个又一个的困难，不断地有新的发现、新的创造．其入也愈深，所见也愈奇，观前人所未观，发前人所未发，这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界．为此，他应具备很强的研究能力；而这种能力，必须从中学时代起便开始锻炼，经过长期积累，方可成为巨匠．

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用．近年来我国出版了多种数学课外读物，包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解．这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同，其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”，风格近似于美国数学教育家G．Polya（波利亚）的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，但更切合我国的实际．本丛书共8本，可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广．作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平，而且大都出版过多种数学著作．因此，他们必能得心应手，写得趣味盎然，富于启发性．这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学，我们希望它能收到宗旨中确定的效果，为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996.7.

# 前言

解题是数学学习过程中一个重要组成部分.面对一个题目,如何进行思考?在解题过程中思维是怎样活动的?获得一个解法之后,又是怎样联想到其他解法的?同一个问题的不同解法之间有什么联系?能否上升到一般性的思想方法?在此基础上,还可以提出其他的问题吗?本书就上述几个方面,选择了较具典型意义的数学题目,对其思维的动态过程作了比较深入的剖析,以便使读者开拓思路,培养能力,特别是创造性思维能力.

书中所选的几个问题,都是经过笔者,或是笔者的学生与小孩实践过的.这里特别要提到的是爱女雪山,她对解题的思维过程的探索很有兴趣,不仅自己实践,还利用业余时间在小学生、中学生中进行试验,并取得了一定成绩.当她即将于北京师范大学毕业,并以优异的成绩

被录取为中国科学院硕士研究生，准备全身心地投入到对精彩的数学世界的遨游时，不幸于1994年5月6日5时，在外出进行社会教育实践途中，遇车祸夭折.

我失去了心爱的女儿，国家失去了一位未来的建设人才. 数月晨昏，爱女音容笑貌时现，几番梦回，难挽温婉敏淑的女儿！原来应诺的书稿任务不得不暂时中断，还是本丛书的责任编辑袁元先生，给我以极大的安慰与鼓励，使我振作精神，才得以完成本书的撰写工作. 读者阅读本书后如果有所启发，并以此为契机，把自己造就为国家建设的出色人才，将是笔者得到的最大慰藉.

我谨以此书，作为悼念女儿的花环.

在写作过程中，我参考和引述了国内外许多书刊，在此不能一一列出，谨向这些书刊的作者表示感谢，并表示歉意.

王建军、宋举英、乔秀梅等同志参加了本书的部分撰稿工作，在此一并致谢.

本书的错误和不足之处在所难免，恳望读者批评指正.

**徐本顺**

1995年1月

# 目 录

# 1

# 从用火柴摆正方形说起

小小的火柴盒里面也有大学问，比如用火柴摆图形，就是一件非常有趣的事.

一天，张老师拿了一些火柴分给陈思、郭思惠和王兆敏三位同学，然后提出了一系列问题.三位同学边动手边思考，在思维的王国里尽情地遨游，真正尝到数学美的甘甜.

## 1.1 8根火柴能摆成几个正方形？

张老师把火柴分给学生，然后提出如下问题.

张老师(以下简称师)："8根火柴能摆成几个正方形？"

陈思(以下简称陈)："可以摆成1个或两个."[图1.2(a),(b)]

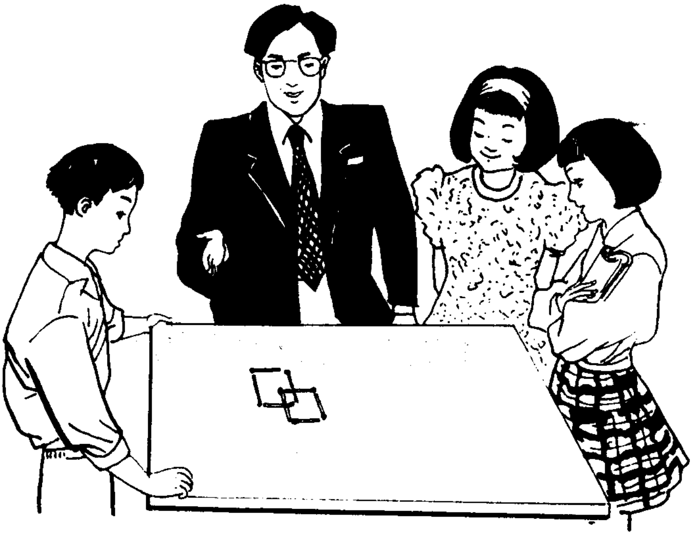


图 1.1

郭思惠(以下简称郭):“可以摆成 9 个.”[图 1.2(c)]

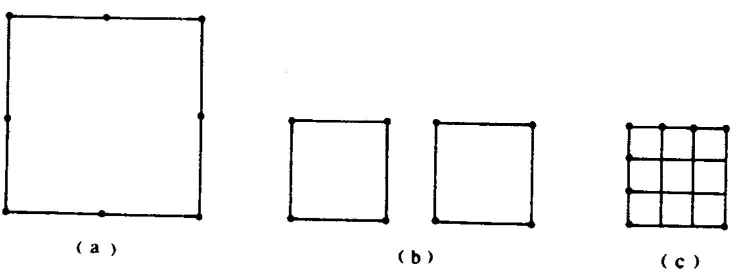


图 1.2

师:“还有不同的看法吗?”

同学们沉默.

师:“好,我再问一个问题,4 根火柴能摆成几个正方形?”

郭:“4 根火柴能摆成一个正方形.”

师:“如果在这个正方形上再加上两根火柴,能摆成几个正方形?”

王兆敏(以下简称王):“又增加了 4 个小正方形,再加上原来那个大正方形,一共是 5 个正方形.”

师:“那么 8 根火柴就只能摆成 9 个正方形吗?”

郭:“噢!我想起来了,再加上外框那个大正方形,共有 10 个正方形.”

师:“1 个大正方形,9 个小正方形,看看还有没有遗漏的?”

郭:“没有了.”

师:“再想想看,还有没有比大的小、比小的大的正方形?”

郭:“对了,还有 4 个不大不小的正方形.这样,像图 1.2(c)这样的摆法,一共有 14 个正方形.”

师:“对了,这就是 1+4+9=14.除了上面三种摆法外,还有其他的摆法吗?不妨在图 1.2(b)的基础上,再试试看.”

同学们一边摆着火柴,一边思考着怎么在图 1.2(b)的基础上再摆出新的花样出来.

师:“如果一个正方形不动,动另一个,看有什么结果?”

陈思同学恍然大悟,一种喜悦油然而生:“能摆出 3 个正方形.”(图 1.3)

郭思惠、王兆敏同学都感到,这个问题真有意思.原来还

能组合成这一个小正方形，真是太妙了！

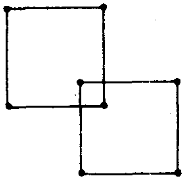


图 1.3

师："这样一来，得到几个答案？"

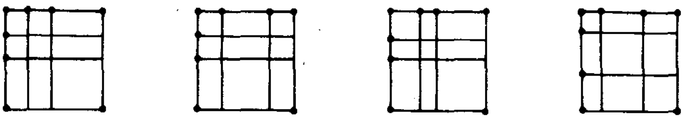
王："1，2，3，14，得到 4 个答案."

师："是否还有其他的答案？大家可在图 1.2(c)的基础上再试试看."

这时三位同学将目标集中在图 1.2(c)上，思考着怎样才能摆出新花样来.

师："如果外框那 4 根火柴不动，动框内 4 根火柴，看有什么结果？"

三位同学移动着火柴，一会儿又摆出新的花样出来. 在图 1.4 中，(a)有 10 个正方形，(b)有 9 个正方形，(c)有 8 个正方形，(d)有 6 个正方形.



(a) (b) (c) (d)

图 1.4

## 1.2　100 根火柴最多能摆成多少个正方形？

师："如果问题变为 8 根火柴最多能摆成多少个正方形，应该怎样回答？"

郭："最多能摆成 14 个正方形."

师："如果火柴不是 8 根，而是 100 根，那么最多能摆成多

少个正方形呢?”

三位同学默然无语.

师:“为了回答这个问题,我们可以先将问题一般化,考虑 $2n$ 根火柴最多能摆成多少个正方形.对于这个一般问题,又需要退一步去考虑,我们可先看一些特殊的例子,然后再进行归纳,找出一般规律.为此先考虑 $n=2,3,4,5$ 的情况.”

陈:“当 $n=2$ 时,有 4 根火柴,这时只能摆 1 个正方形.”

郭:“当 $n=3$ 时,有 6 根火柴,这时最多能摆成 5 个正方形.”

王:“当 $n=4$ 时,有 8 根火柴,刚才已说过,最多能摆成 14 个正方形.”

陈:“当 $n=5$ 时,有 10 根火柴,这时最多能摆成的正方形数为:1 个最大的正方形,4 个次大的正方形,9 个次小的正方形,16 个最小的正方形.一共有 $1+4+9+16=30$ 个正方形.”

师:“那么,让我们分析一下所得到的结果,上述结果可列成表 1.1.”

**表 1.1**

| $n$ | $2n$ | 最多能摆成的正方形数 | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | $1$ | $=1$ |
| 3 | 6 | $1+4$ | $=5$ |
| 4 | 8 | $1+4+9$ | $=14$ |
| 5 | 10 | $1+4+9+16$ | $=30$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

师:“表 1.1 又可以写成表 1.2.”