线性代数(2)学习指导

许甫华 编著

清华大学出版社

线性代数(2)
学习指导

许甫华　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是学习和使用线性代数(高等代数)较深内容的辅导书,与《理工科代数基础》(俞正光等著,1998年清华大学出版社出版)相配套.包括代数系统、多项式、线性空间、线性变换、欧几里得空间、酉空间及二次型共7章内容.每章安排:理论脉络、典型题详解讲评、考试题详解评析3部分内容.书中的内容融入了作者在中国科学技术大学和清华大学长期任教的经验和心得.适用于各类高校学生学习线性代数、高等代数、矩阵论等课程时复习参考,也可供使用代数知识的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(2)学习指导/许甫华编著. —北京:清华大学出版社,2003
ISBN 7-302-06562-4

Ⅰ.线… Ⅱ.许… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第027644号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编100084)
http:// www.tup.com.cn
责任编辑:刘 颖
封面设计:郑 晶
版式设计:韩爱君
印 刷 者:北京顺义振华印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开 本:850×1168 1/32 **印张**:8 **字数**:200千字
版 次:2003年7月第1版 2003年7月第1次印刷
书 号:ISBN 7-302-06562-4/O·295
印 数:0001~5000
定 价:14.00元

引　言

目前，清华大学理工科（非数学系）的线性代数课程安排为两学期.第一学期为基础内容，课程名称为“几何与代数(1)”；第二学期为进一步的内容，课程名称为“几何与代数(2)”.本书就是针对第二学期的内容而编写的辅导参考书，所以书的名字取为《线性代数(2)学习指导》.书中章节的顺序是按《理工科代数基础》(俞正光等编著，清华大学出版社1998年出版)一书组织的.

本书内容包括：二次型、代数系统、多项式形式、线性空间、线性变换、欧几里得空间、酉空间共7章.每章首先总结理论脉络；然后给出典型题的详尽解答和分析与讲评；最后对往期的期末考试题作详细分析解答.本书对例题的选择，主要是考虑问题的典型性和代表性，力图使每道题说明一个或几个问题和方法.读者会发现，有的问题的解答，需要融会理解定理和定义；有的解题方法，需要有巧妙的构思.本书不少问题(包括一些难题)的解答有独特的思路和方法，融入了作者在中国科学技术大学数学系、少年班、非数学系和清华大学全校性实验班，理工科各系的长期的教学经验和积累.期望能通过本书，启发学生更好理解代数的理论，掌握解决问题的思路和方法，克服在代数的学习、复习、迎考和应用中遇到的困难.也希望由此更能培养学习代数的兴趣，增进对代数理论的深入理解.

每章均设计如下3个板块.

理论脉络　华罗庚教授特别提倡“由薄到厚，由厚变薄”的读书方法.浅尝即止的“薄”固不可取，食而不化的“厚”也非佳境.薄—厚—薄是一个辩证的过程，是否定之否定的过程.最后的“薄”是要融会贯通.知识要自然联系.本版块就是力图体现这一“读书

法则”，帮助读者理出各章节主干，进而从知识的总体联系上把握理论脉络，理解概念和定理结论. 同时结合各章内容，也总结了解决某类问题的方法.

典型题讲评 选取了《理工科代数基础》中的部分问题，也从各类代数参考书中选取一些典型问题，作者也自行设计一些典型问题. 对这些问题给出详细解答并分析解题思路和进行讲评. 可以说这些题的选取都是为了说明一个或几个理论问题，强调有关知识和方法. 读者会发现许多新奇的，不同于以往的解题方法和思路. 期望能启发读者掌握解决问题的思路和方法，体会到代数课学习和解题的乐趣.

考试题评析 精心挑选能涵盖本章基本理论、基本概念及解题技巧的以往期末考试题，给出标准解答；同时分析所用的知识点、联想方法、思考方向等. 并适当指出以往考生易出错的地方，提醒读者正确理解和掌握代数的基础理论，提高抽象思维的能力和严谨的逻辑推理能力.

多年来，在教学中，一直有许多学生反映，希望有相应的学习辅导书. 特别是近年教改以后，课内学时（和讲课内容）压缩较大，学生课外自己支配的自学时间增多. 学生对学习辅导书的要求更强烈. 这促使我们下决心编写本书.

为了学好线性代数这样比较抽象的课程，理解理论和演练习题二者缺一不可. 抽象的理论和方法在具体的例题中，在不断的解题实践中，会变得生动直观，印象深刻. 而只有深入系统地学习和理解基本理论，并在典型问题的解决中不断分析、思考、总结，才能不断提高分析和解决问题的能力. 建议读者在使用本书时，先自己动手独立寻找解题思路和方法，再看解答，最后看讲评（或评析）. 这样既可考查读者对知识的掌握程度和解题能力，增强自信心和学习兴趣，又可对一些方法印象深刻，感悟更深.

本书适用于各类高校本科生或研究生学习“线性代数”、“高等代数”、“矩阵论”等课程时作为参考书;也可供使用代数知识的科学技术人员参考.不足之处,请读者指正.

作　者

2003年春于清华园

目　录

第 1 章　二次型和实对称矩阵的相合

1.1　理论脉络

本章内容可概括为以下 4 个问题：

1　二次型的定义，二次型和实对称矩阵的 1-1 对应关系

定义 1　一个系数在数域 F 中的 n 个变数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+\\ a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\\ \cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为数域 F 上的一个 n 元二次型.

令 $a_{ij}=a_{ji}$，因为 $x_ix_j=x_jx_i$，故可以把上述定义中的上三角形式写成矩阵形式（即把非平方项分一半到左下角）. 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则可用矩阵乘法把二次齐次多项式表示出来，即有

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+\\ &\quad a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\\ &\quad \cdots+\\ &\quad a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\ &=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.\qquad(1)\end{aligned}$$

由 $a_{ij}=a_{ji}$，知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵. 当 $F=\mathbb{R}$ 时，$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是实二次型，此时 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，我们主要讨论实二次型. $\boldsymbol{A}$ 称为二次型的矩阵，它是由二次型中所有系数排成的，显然它是由

二次型惟一决定的.

2 二次型化平方和的方法

从本质上说,二次型是 n 维线性空间 V 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 把 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 看成是 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在某组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标,则有 $Q(\boldsymbol{\alpha})=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 于是,与空间解析几何中求有心二次曲面的标准方程类似,要再选一组基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$,使二次型在此基下的表示为平方和. 设从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$,则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵,且可形式地写为

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P}.$$

记 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$,则它们之间有关系

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}. \tag{2}$$

把可逆线性代换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 代入(1)式中,得

$$\begin{aligned}Q(\boldsymbol{\alpha})&=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})\\&=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\\&=Q_1(y_1,y_2,\cdots,y_n).\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,它是二次型在新基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵,它与二次型在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是相合的. 于是,二次型在可逆线性代换下化为平方和的问题,就等价于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相合于对角矩阵的问题. 即寻找可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}.$$

既然这两个问题等价,故在以下介绍的3个方法中,有的用“矩阵的语言”叙述,有的用“二次型的语言”叙述.

方法1 主轴化方法

定理1 对任意 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,总存在实正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 是对角矩阵.

这里由 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,所以是正交相合对角矩阵,记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n)$,及

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则 t_i 满足：$At_i=\lambda_i t_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 Q 的列都是 A 的特征向量(相互正交). 由此方法化平方和，先写出二次型 $Q(\boldsymbol{\alpha})$ 的矩阵 A，然后：(1) 求 A 的特征值；(2)求 A 的属于每个特征值 λ_i 的特征向量；(3)属于同一特征值的特征向量要施密特(Schmidt)正交化.

注 主轴化方法是大块配方法和初等变换法不能替代的，比如在二次曲面方程的化简中只能用主轴化方法. 因为是从直角坐标系到直角坐标系的过渡矩阵，它一定是正交矩阵，见 1.3 节例 3.

方法 2 大块配方法

定理 2 每个二次型恒可通过可逆线性代换 $x=Py$ 化为平方和，即

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{x=Py}=\mu_1 y_1^2+\cdots+\mu_r y_r^2-\mu_{r+1}y_{r+1}^2\cdots-\mu_{r+s}y_{r+s}^2,$$

其中 $\mu_i>0(i=1,2,\cdots,r+s)$. 这种表示称为二次型的标准形.

这个定理的证明是对变量的个数作归纳法. 讨论 n 个变数的二次型时要分 4 种情况讨论，而其中最主要的有两种：

(1) 若 $a_{11}\neq 0$，则第一次把含 x_1 的全配方进去，余下的是 $n-1$个变量的二次型，再继续做下去，即有

$$Q(\boldsymbol{\alpha})=a_{11}\left[x_1+\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\right]^2-$$

$$\frac{1}{a_{11}}\Big(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\Big)^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,\\ y_i=x_i, \qquad i=2,\cdots,n.\end{cases}$$

也就是做可逆线性代换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} y_n, \\ x_i = y_i, \qquad\qquad i = 2, \cdots, n. \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{y}$,则有

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n-1}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且有

$$\boldsymbol{P}_1{}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(2) 若 $a_{11}=0$,但 $a_{12}\neq 0$,则利用中学讲的平方差公式的原理使之出现 y_1^2 项.即令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_i = y_i, \qquad i = 3, \cdots, n. \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\alpha}) \Big|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{y}} &= 2a_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + \cdots \\ &= 2a_{12} y_1^2 - 2a_{12} y_2^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$=Q_1(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

且 y_1 的系数非零,归结为(1)的情形.

但对某些二次型,由于其系数的特殊性当 $a_{11}=0,a_{12}\neq0$ 且同时 $a_{22}\neq0$ 时,可能经如上线性代换后不能保证 y_1^2 的系数不为 0.如遇到这种情况,则要先做 1,2 行(和列)的对换,使(1,1)位的元素不为 0,见 1.2 节例 3.

读者很容易把 $a_{11}=0,a_{12}\neq0$ 推广为 $a_{11}=0,a_{1j}\neq0(j=3,\cdots,n)$的情况,见 1.3 节例 2.

方法 3 初等变换法

定理 3 对每个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,存在一系列初等方阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s$,使得

$$\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s=\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{D}.$$

由于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘一个初等矩阵,相当对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换,在其右边乘初等矩阵相当对 $\boldsymbol{A}$ 做初等列变换.于是得到

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})\xrightarrow[\text{换时把列做相应的变换}]{\text{在对}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})\text{做每个行变}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{D},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}),$$

或用

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\\\boldsymbol{P}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{时把行做相应的变换}]{\text{在对}\binom{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}}\text{做每个列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\\\boldsymbol{P}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{P}\end{pmatrix}.$$

注意 因矩阵乘法有结合律,故可连续做几个行变换,再连续做几个列变换,但行、列变换是一对,一对的不能漏掉某个列(或行)变换,见 1.3 节例 4.

3 实对称矩阵的相合,相合关系把 n 阶实对称矩阵分成 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类

关于如何判断两个实对称矩阵相合,有如下的一个定义和两

个充分必要条件.

两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 相合

$\overset{\text{def}}{=}$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$

$\Leftrightarrow r_1=r_2$,且 $s_1=s_2$(正、负惯性指数分别相等)

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}, r_1-s_1=r_2-s_2$(秩和符号差分别相等).

其中 r_i 和 $s_i(i=1,2)$ 分别为实对称的正、负惯性指数,r_i-s_i 称为符号差.

由于"相合"是一种等价关系(具有自返性、对称性、传递性),所以 n 阶实对称矩阵的全体可以按"相合"进行等价分类,一共可以分成多少类呢? 只要看全体 n 阶实对称矩阵的"规范型"一共有多少种即可.

定理 4　对任意 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,总存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

此式称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的规范型,其中 r,s 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 的正、负项个数,即正、负惯性指数. 由此知:

当 $r=0$ 时,s 可以取 $0,1,\cdots,n$, 故共有 $n+1$ 类;

当 $r=1$ 时,s 可以取 $0,1,\cdots,n-1$, 共 n 类;

……

当 $r=n$ 时,$s=0$, 只 1 类.

所以相合分类共有

$$1+2+\cdots+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\text{(类)}.$$

在这些"类"中有 4 类是重要的,即

$$\begin{cases}r=n,\\ s=0;\end{cases}\quad \begin{cases}r<n,\\ s=0;\end{cases}\quad \begin{cases}r=0,\\ s=n;\end{cases}\quad \begin{cases}r=0,\\ s<n.\end{cases}$$

它们分别称为正定、半正定、负定、半负定矩阵. 其中以正定矩阵为重点.

4 正定二次型的定义及判断二次型是否正定的充分必要条件

定义 2 若对任意 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,都有 $Q(\boldsymbol{\alpha})>0$,则称二次型 $Q(\boldsymbol{\alpha})$ 是正定的.

定义 2′ 若二次型 $Q(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定,则称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定,记为 $\boldsymbol{A}>0$.

引理 设二次型经可逆线性代换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为平方和,即

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}}=c_1y_1^2+\cdots+c_ny_n^2,$$

则 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的充分必要条件是 $c_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,则:

$$\boldsymbol{A}\text{ 正定}\overset{\text{def}}{=\!=}Q(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\text{对任意 }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}\text{ 成立}$$

$\Leftrightarrow$正惯性指数是 n,负惯性指数是 0

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 0

$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$(等价于 $\boldsymbol{A}$ 相合于 $\boldsymbol{I}_n$)

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式>0

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的所有主子式>0.

实对称矩阵正定的定义和这 5 个充分必要条件在证明题中都各自发挥作用,而若要判断一个给定的二次型是否正定,通常用充要条件中的第 2 和第 4 条,特别是用第 4 条,即 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式>0是比较方便的.

关于半正定、负定、半负定实对称矩阵的相应定理读者可自行总结或见《高等代数学》.

定理 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 正定,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$P^{\mathrm T}AP=I_n,\quad P^{\mathrm T}BP=D(\text{对角矩阵}).$$

定理 6　设 A,B 均为 n 阶实对称矩阵，且 $AB=BA$，则存在正交矩阵 Q 和对角矩阵 D_1 和 D_2，使得

$$Q^{\mathrm T}AQ=D_1,\quad Q^{\mathrm T}BQ=D_2.$$

我们将在例题中给出这两个定理的证明，同时也对具体矩阵实践一下对角化的过程，即把证明题变成计算题. 这里我们要特别强调的是定理 5 和定理 6 的不同. 从本质上来说定理 5 说的是两个实对称矩阵同时相合于对角阵的问题，其条件是“A 正定”；定理 6 是两个实对称矩阵同时相似于对角阵的问题，其条件是“$AB=BA$”，即 A 与 B 乘法可交换，千万不要把它们混为一谈.

1.2　典型题讲评

例 1　写出二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n-2}(x_i-x_{i+2})^2$ 的矩阵.

解　**方法 1**　由 $(x_i-x_{i+2})^2=x_i^2+x_{i+2}^2-2x_ix_{i+2}$，知有

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\sum_{i=1}^{n-2}(x_i-x_{i+2})^2\\&=\sum_{i=1}^{n-2}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-2}x_{i+2}^2-2\sum_{i=1}^{n-2}x_ix_{i+2}\\&=x_1^2+x_2^2+\sum_{i=3}^{n-2}2x_i^2+x_{n-1}^2+\\&\qquad x_n^2-2\sum_{i=1}^{n-2}x_ix_{i+2}.\end{aligned}$$

故易得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&&&&\\0&1&0&\ddots&&&\\-1&0&2&\ddots&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&2&0&-1\\&&&\ddots&0&1&0\\&&&&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

方法 2 做可逆线性代换

$$\begin{cases}y_i=x_i-x_{i+2}, & i=1,\cdots,n-2,\\ y_i=x_i, & i=n-1,n.\end{cases}$$

则有 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{x=Py}=y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}I_{n-2}&0\\0&0\end{pmatrix}y$，即有

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}I_{n-2}&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

而由 $y=P^{-1}x$，知

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&0&-1\\&&&1&0\\&&&&1\end{pmatrix},$$

$$(P^{-1})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&\ddots&&\\-1&\ddots&&\\&\ddots&1&&\\&&0&1&\\&&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

故可算出