

大学课程教学同步练习丛书

概率论与数理统计

同步学习辅导

第2版

西北工业大学《概率论与数理统计》编写组 编

西北工业大学出版社

概率论与数理统计 同步学习辅导

(第2版)

西北工业大学《概率论与数理统计》编写组 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是概率论与数理统计的同步学习辅导书。各章分别对概率论与数理统计的主要知识点进行了归纳;对有代表性的典型例题进行分析和求解;还配以大量的练习题并加以求解,以提高读者基本运算、推理及应试的能力。书后附有模拟试题及答案,供读者自测。

本书可作为本科生学习概率论与数理统计课程的同步学习辅导书,也可作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步学习辅导/西北工业大学《概率论与数理统计》编写组编. --2版.--西安:西北工业大学出版社,2003.1
ISBN 7-5612-1444-8

I. 概… II. 西… III. ① 概率论-高等学校-教学参考资料 ② 数理统计-高等学校-教学参考资料 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007116 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029-8493844

网 址: <http://www.nwpup.com>

印 刷 者:陕西天元印务有限公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:11.875

字 数:291 千字

版 次:2003 年 2 月第 2 版 2003 年 2 月第 1 次印刷

印 数:1~5 000 册

定 价:15.00 元

第 1 版前言

概率论与数理统计属于随机数学的重要基础课。初学这门课做习题时常会有不少的困惑,缺乏思路,难以下手,有时想好了却表达不清楚,有时做完习题也不敢断言做对了。因此,我们编写了本书,其目的就是为了帮助读者总结、思考,以解答做题时遇到的难点,提高学习效率。

西北工业大学应用数学系周晓莉编写了第一章和第二章;刘华平编写了第三章和第四章;肖华勇编写了第五章和第六章;唐亚宁编写了第七章和第八章,他们均是多年从事概率论与数理统计课教学的第一线教师。徐伟、赵选民、师义民和秦超英参加了部分编写工作和模拟试题的编写。本书由徐伟教授编纂、定稿。

由于水平有限,错误和疏漏之处,恳请广大读者批评指正。

编者

· 2002 年 2 月

第 2 版前言

为帮助读者学好《概率论与数理统计》，在第 1 版的基础上，做了修编工作，增删了一些例题和习题。第一章和第二章由徐伟修编，第三章和第四章由赵选民修编，第五章和第六章由秦超英修编，最后二章由师义民修编。本书由徐伟教授编纂、定稿。

恳请广大读者批评指正。

编者

2003 年 1 月

目 录

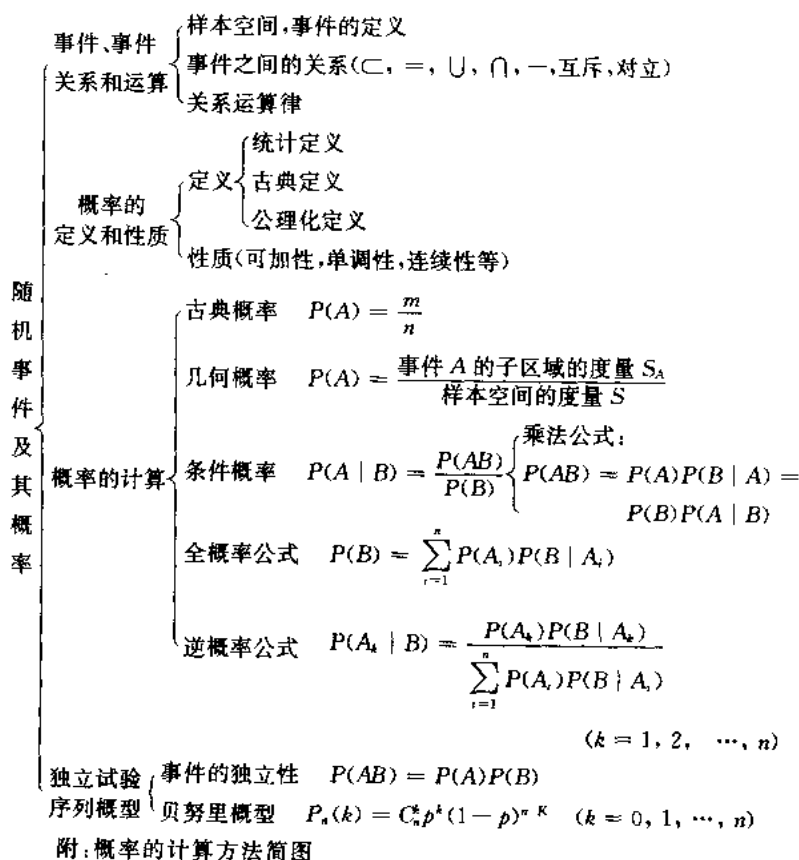
第一章 随机事件及其概率	1
一、知识网络图	1
二、知识点、考点	2
三、典型例题分析	8
四、练习题	15
五、习题精解	22
第二章 随机变量及其分布	37
一、知识网络图	37
二、知识点、考点	38
三、典型例题分析	46
四、练习题	67
五、习题精解	76
第三章 随机变量的数字特征	99
一、知识网络图	99
二、知识点、考点	99
三、典型例题分析	105
四、练习题	125
五、习题精解	129
第四章 大数定律与中心极限定理	151
一、知识网络图	151
二、知识点、考点	151

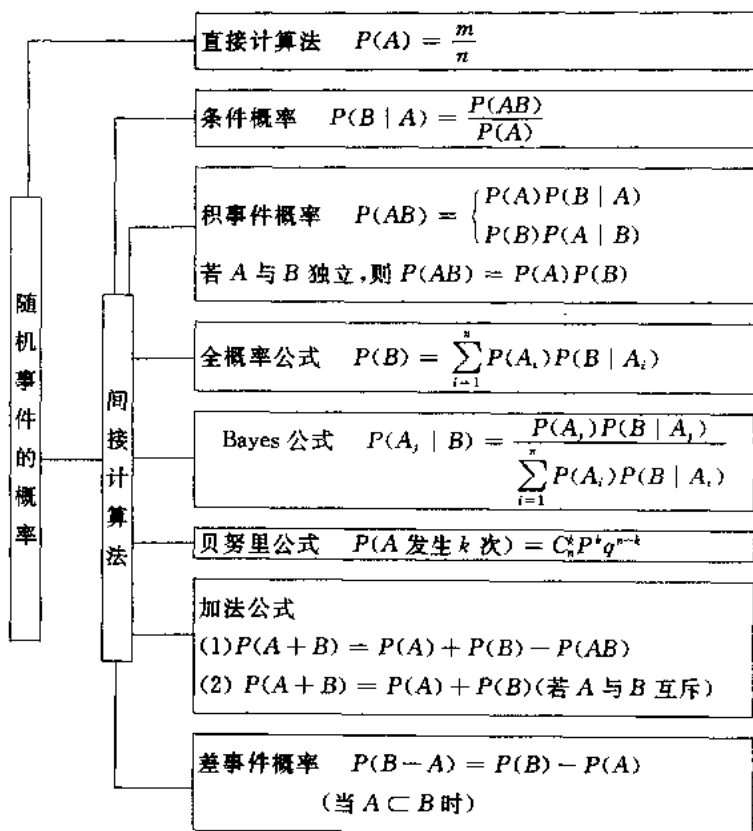
三、典型例题分析	154
四、练习题	161
五、习题精解	163
第五章 样本及抽样分布	174
一、知识网络图	174
二、知识点、考点	175
三、典型例题分析	177
四、练习题	182
五、习题精解	185
第六章 参数估计	194
一、知识网络图	194
二、知识点、考点	195
三、典型例题分析	198
四、练习题	205
五、习题精解	208
第七章 假设检验	224
一、知识网络图	224
二、知识点、考点	224
三、典型例题分析	230
四、练习题	240
五、习题精解	247
第八章 回归分析	268
一、知识网络图	268
二、知识点、考点	268

三、典型例题分析	272
四、练习题	286
五、习题精解	292
附录	319
附录一 模拟试题.....	319
附录二 模拟试题答案.....	337
参考文献	371

第一章 随机事件及其概率

一、知识网络图





二、知识点、考点

(一) 随机事件的概念

1. 随机试验

概率论中把满足下列 3 个条件的试验称为随机试验, 简称为

试验:① 允许在相同条件下重复地进行;② 每次试验结果不一定相同;③ 在试验之前不知道会出现哪种结果。

2. 基本事件

在随机试验中,每一个可能出现的基本结果构成的集合,均称为基本事件。

3. 基本事件空间(或称样本空间)

把所有可能的试验结果(所有基本事件)的全体所构成的集合称为必然事件或基本空间或称为样本空间,记作 Ω 。

4. 随机事件(简称事件)

基本空间的子集,即由某些样本点构成的集合称为随机事件,简称事件。记为 $A, B, \dots$ 等。

5. 不可能事件

规定不含任何元素的空集也为事件,称为不可能事件,记为 $\emptyset$ 。

6. 事件间的关系与运算

(1) 事件之间的四种关系,如表 1-1 所示。

表 1-1

关 系	符 号	概率论	集合论
包含关系	$A \subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
相等关系	$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥关系	$AB = \emptyset$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(或互不相容)	A 与 B 无公共元素

(2) 事件之间的三种运算, 如表 1-2 所示.

表 1-2

运 算	符 号	概 率 论	集 合 论
事件的 和(并)	$A \cup B$ $\bigcup_{i=1}^n A_i$	事件“ A 与 B 至少有一个发生” 事件“ $A_1, \dots, A_n$ 至少有一个发生”	A 与 B 的并集 $A_1, \dots, A_n$ 的并集
事件的 积(交)	$A \cap B$ (或 AB) $\bigcap_{i=1}^n A_i$	事件“ A 与 B 同时发生” 事件“ $A_1, \dots, A_n$ 同时发生”	A 与 B 的交集 $A_1, \dots, A_n$ 的交集
事件的差	$A - B$	事件“ A 发生时 B 不发生”	A 与 B 的差集

7. 一些常用的事件间的关系式

(1) $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$. (交换律)

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(AB)C = A(BC)$. (结合律)

(3) $(A \cup B)C = AC \cup BC$; $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$. (分配律)

(4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$. (对偶律)

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

(5) $\Phi \subset A \subset \Omega$.

(6) 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$, $AB = A$.

(7) $A + \Phi = A$, $A + \Omega = \Omega$, $A\Phi = \Phi$, $A\Omega = A$.

(8) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \supset AB$, $B \supset AB$.

(9) $A \cup B = A + (B - AB) = B + (A - B) =$
 $B + A\bar{B} = A + B\bar{A}$.

(10) $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{A} = \Omega - A$, $A - B = A\bar{B}$.

(二) 概率的概念

对于一个随机事件 A 发生的可能性的_{大小}，用一个数 $P(A)$ 来表示，这个数通常就称为随机事件 A 发生的概率，简称为事件 A 的概率。

1. 概率的统计定义

在一个随机试验中，如果事件 A 出现的频率 $\frac{m}{n}$ 随着试验次数 n 的增大，它在区间 $[0, 1]$ 上的某个常数 p 附近摆动，那么定义事件 A 的概率为

$$P(A) = p$$

概率的这种定义，称为概率的统计定义。

2. 概率的古典定义

随机现象的每一个基本结果称为样本点。样本点的全体称为样本空间。若随机现象满足：① 只有有限个样本点；② 每个样本点的发生都是等可能的；③ 每次试验有且仅有一个样本点发生，则称这类现象为古典概型。在古典概型情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

3. 概率的几何定义

若随机试验的样本空间是某一个区域，并且任意一点落在度量（长度面积和体积）相同的子区间是等可能的，则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S}$$

式中 S 是样本空间的度量， S_A 是构成事件 A 的子区域的度量。

4. 概率的公理化定义及概率的性质

Ω 为样本空间， $\mathcal{F}$ 为 Ω 的某些子集组成的集类，满足：① Ω

$\in \mathcal{F}$; ② 若 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$; ③ 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$, 称 $\mathcal{F}$ 为 σ -域, $\mathcal{F}$ 中的元素称为随机事件.

定义在 $\mathcal{F}$ 上的一个非负函数 $P(A)$, 若满足: ① 对任意 $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$; ② $P(\Omega) = 1$; ③ 若 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ 且 $A_i \cap A_j = \Phi (i \neq j)$, 则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, 就称 $P(A)$ 为事件 A 的概率, 称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间.

概率的基本性质:

(1) $P(\Phi) = 0$.

(2) 若 $A_1, \dots, A_n$ 满足 $A_i A_j = \Phi (i \neq j)$; 则 $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ (有限可加性).

(3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(4) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$.

(5) 若 $B_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ $B_n \supset B_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \Phi$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0 \quad (\text{连续性})$$

(6) $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$.

性质(6)称为概率的一般加法公式. 概率的基本性质是概率论学习的必要基础, 务必要牢固掌握, 并能灵活应用这些性质进行概率计算.

(三) 条件概率

(1) 当 $P(B) > 0$ 时, 称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在已知事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率. 条件概率是概率论中另一重要

概念,它与独立性有密切的关系,在不具有独立性的场合,它将扮演主要角色. 条件概率也是概率,它具有概率的一切性质.

(2) 将条件概率公式变形,就得到概率的乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B) \quad (P(A) > 0, P(B) > 0)$$

一般地,设 $A_1, \dots, A_n$ 为任意 n 个事件,则有

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1})$$

(3) 全概率公式:设 $B \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$, 且 $A_i A_j = \Phi (i \neq j)$, 则

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

(4) 贝叶斯公式:设 $B \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$, 且 $A_i A_j = \Phi (i \neq j)$, $P(B) \neq 0$, 则

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

(四) 独立性, 贝努里概型

(1) 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与 B 独立; 若对任意 $k (1 \leq k \leq n)$, 则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 有

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

若对任意 $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, 有 $P(A_{i_1} A_{i_2}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})$, 则称事件 $A_1, \dots, A_n$ 两两独立. 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立一定两两独立, 两两独立不一定相互独立.

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

用此公式计算概率 $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ 比用一般加法公式简单得多.

(2) 做 n 次随机试验, 每次试验的结果是 A 或 $\bar{A}$, 且 $P(A) = p$, 各次试验相互独立, 这种概型称为贝努里概型, n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

这个公式称为二项式概率计算公式.

三、典型例题分析

例 1.1 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$. 试问事件 A, B, C 全不发生的概率为多少? (1992 年攻读硕士学位研究生入学考试试题, 以后简称试题)

$$\begin{aligned} \text{解} \quad P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) &= P(\overline{A \cup B \cup C}) = \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) = \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - \\ &\quad P(BC) - P(AC) + P(ABC)] \end{aligned}$$

因为 $ABC \subset AB$, 所以

$$0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0$$

故 $P(ABC) = 0$, 从而

$$P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) = 1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{16} \right) = \frac{3}{8}$$

例 1.2 在某城市发行 3 种报纸 A, B, C , 经调查, 订阅 A 报的有 45%, 订阅 B 报的有 35%, 订阅 C 报的有 30%, 同时订阅 A 及 B 报的有 10%, 同时订阅 A 及 C 报的有 8%, 同时订阅 B 及 C 报的有 5%, 同时订阅 A, B, C 报的有 3%, 试求下列事件的概率.

(1) 只订 A 报的;

- (2) 只订 A 报及 B 报的；
 (3) 只订一种报纸的；
 (4) 正好订两种报纸的；
 (5) 至少订阅一种报纸的；
 (6) 不订阅任何报纸的；
 (7) 至多订阅一种报纸的。

解 本题主要考查学生利用事件之间的关系及运算规律计算事件概率的能力。在这里正确利用已知事件表示所求事件是非常重要的。

$$\begin{aligned}
 (1) P(\overline{A} \overline{B} \overline{C}) &= P(A - B - C) = P(A - (B \cup C)) = \\
 &P(A - A(B \cup C)) = \\
 &P(A) - P(A(B \cup C)) = \\
 &P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = \\
 &0.45 - 0.10 - 0.08 + 0.03 = 0.30
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) P(AB\overline{C}) &= P(AB - C) = P(AB - ABC) = \\
 &P(AB) - P(ABC) = 0.10 - 0.03 = 0.07
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) P(\overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C) &= \\
 &P(\overline{A} \overline{B} \overline{C}) + P(\overline{A} B \overline{C}) + P(\overline{A} \overline{B} C) = \\
 &0.30 + P(B - B(A \cup C)) + P(C - C(A \cup B)) = \\
 &0.3 + P(B) - P(BA) - P(BC) + P(ABC) + \\
 &P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \\
 &0.3 + 0.35 - 0.10 - 0.05 + 0.03 + 0.3 - \\
 &0.08 - 0.05 + 0.03 = 0.73
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) P(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC) &= \\
 &P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC) = \\
 &P(AB) - P(ABC) + P(AC) - \\
 &P(ABC) + P(BC) - P(ABC) =
 \end{aligned}$$