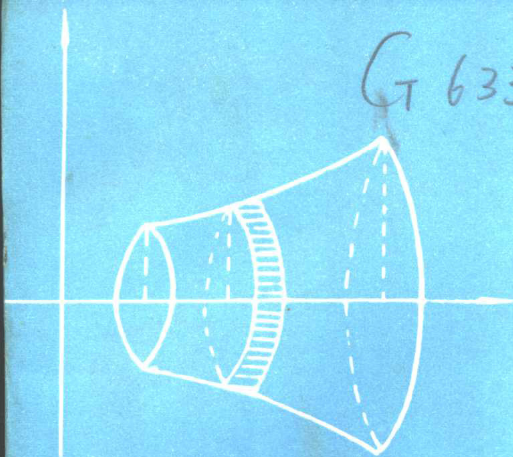
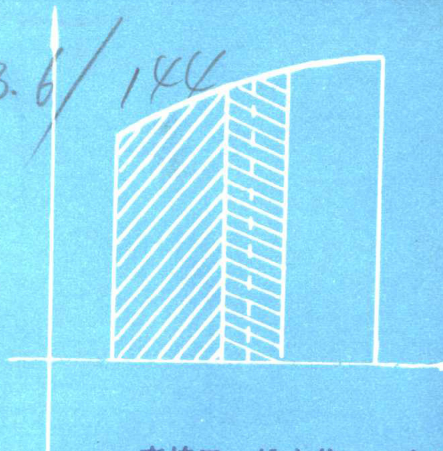
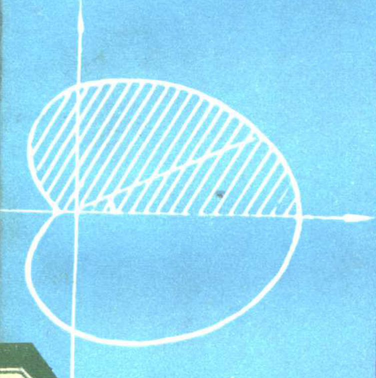
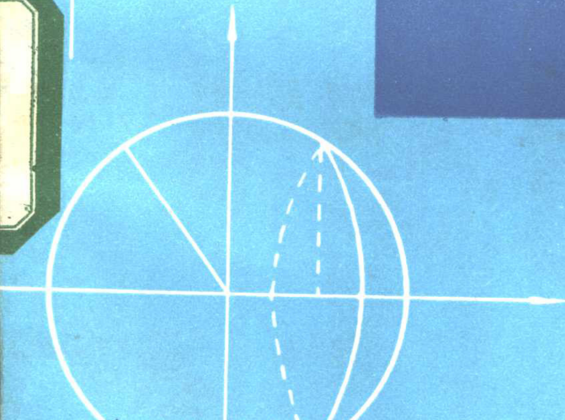




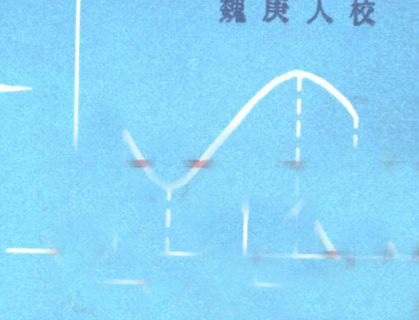
李植民 姚文信 合编



中学微积分



魏庚人校



陕西科学技术出版社

中 学 微 积 分

李植民 姚文信 合编

魏庚人 校

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

出 版 说 明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织了一套中学数、理、化教学参考读物，陆续出版。

中 学 微 积 分

李植民 姚文信 合编

魏庚人 校

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 陕西省印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张8.875 字数186,000

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数1—15,300

统一书号：7202·82 定价：1.15元

前　言

本书根据现行全日制十年制学校数学教材的微积分部分，在内容上作了适当的加宽、加深。可供中学数学教师阅读和参考。也可作为中学生和广大知识青年自学微积分学的参考读物。为了便于读者阅读，本书对概念的引入力求具体，叙述力求通俗易懂。定理除个别较难、且要求更多的基础知识超出本书范围外，都给予严密的证明，并尽可能给予几何解释。

本书按章节编有例题和练习题，由易到难，供读者阅读选做，以帮助读者理解和巩固学习的有关内容。

由于时间仓促和我们的水平有限，书中存在不少缺点和错误，希读者指正。

本书编写过程中，曾得到陕西师范大学数学系函数论教研室一部分同志的大力支持，最后又由魏庚人教授热情指导和认真审阅，在此特表示衷心的感谢。

编　者

1982年10月

目　　录

第一章　函数与极限

第一节　常量与变量

常量与变量

在日常生活、生产实践、以及科学研究中，我们经常要接触到各种各样的量，如体积、重量、温度、时间、距离、速度、电流、电阻等等。其中有些量在我们观察或研究的过程中是不断发生变化的，而有些量在过程中则保持不变。例如火车行驶过程中，火车离车站的距离在不断地变化，而火车所载货物的重量却保持不变；在交流电路中，电流与电压不断地改变，而电阻是不变的。我们把在某一过程中变化着的量，称为变量。而把在考查过程中始终只取同一数值的量称为常量。例如上面的火车运行一例中，火车行驶的距离是变量，火车所载货物的重量是一常量。

一个量究竟是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体问题和具体过程来分析。例如火车行驶的速度，在开车阶段或刹车阶段，是变化着的，因而是变量，在正常行驶阶段，速度保持不变，因而是常量。可见虽然都是火车速度这个量，但在过程的一个阶段它是常量，而在另一阶段它又成了变量。又如重力加速度g在地球上的同一地点，它可以看做是常量；但在不同的地点来考查时，它却是个变量（重力加速度在赤道是978厘米/秒^2，在北极是983厘米/秒^2，在首都

北京是980.12厘米/秒^2，在上海是979.43厘米/秒^2，它是一个随地点纬度而变化的变量）。所以常量与变量这两个概念不是绝对的，由于条件的变化，常量也可以转化成变量。因此，在数学中我们不能只研究常量，而更重要的是要去研究变量。研究变量的变化状态，研究变量与变量之间的相互关系，而把常量看作是变量的特殊情形，就是说，把常量看成是始终只取同一个数值的变量。

变量的变域与区间

变量的每一个数值都是一个数（实数），所有这些数构成的数集合，称为这个变量的变域。

在许多情形中，变量的变域都是一个区间，所谓区间是指数轴的一"段"上所有的点构成的点集（数集）。

例1 整个数轴上的所有点构成的无限区间，即满足 $-\infty<x<+\infty$〔注〕的x全体，这个区间记为（$-\infty$，$+\infty$）。

例2 区间（$-\infty$，b〕，表示满足$-\infty<x\leqslant b$的x全体；

区间（$-\infty$，b），表示满足$-\infty<x<b$的x全体；

类似的还有

〔a, $+\infty$） 表示 $a\leqslant x<+\infty$；

（a, $+\infty$） 表示 $a<x<+\infty$。

例3 有限区间分成以下几类：

〔a,b〕 表示满足$a\leqslant x\leqslant b$的x全体；

（a,b） 表示满足$a<x<b$的x全体；

〔注〕 符号$+\infty$表示正的无限大，$-\infty$表示负的无限大。

$[a,b)$ 表示满足$a \leqslant x < b$的x全体；

$(a,b]$ 表示满足$a < x \leqslant b$的x全体。

它们依次称为闭区间、开区间、左闭右开区间和左开右闭区间。

还须注意，并不是任何变量的变域都是一个区间的，例如在计算圆的面积的过程中，圆的内接正多边形的边数n，就是一个变量，但这个变量的变域不是一个区间，而是所有不小于 3 的自然数所构成的数集。可以想象，变量的变域还可以是其他更为复杂的数集。

为了表示常量和变量，习惯上我们用拉丁字母开头的一些字母：a, b, c，……来表示常量；而用它的最后一些字母：x，y，z，……来表示变量。

绝 对 值

为了研究变量的变化状态，我们经常要用到绝对值这个概念。现在我们来把这个在代数中已经学过的概念复习一下。

定义 若数a为正数或零，那么a的绝对值就是数a本身；若a为负数，那么a的绝对值是$-a$。

数a的绝对值记作$|a|$，由绝对值的定义可知

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当} a \geqslant 0; \\ -a, & \text{当} a < 0. \end{cases}$$

例如 $|5| = 5$；$|-5| = -(-5) = 5$，$|0| = 0$。

关于绝对值以下几条性质今后常用：

1. 若$|x| < c \quad (c > 0)$，

则 $-c < x < c$；

2. $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$;

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

练　　习

1. 在数轴上分别画出下列各点集所在的范围，并用区间把它表示出来：

（1）$|x| \leqslant 1$，　　（2）$|x| > 2$；

（3）$|x+3| < 2$；　　（4）$1 < |x-2| < 3$。

2. 解下列方程或不等式：

（1）$|x-3| = 1$；　　（2）$|x+4||x-3| = 0$；

（3）$|2x| = |x-2|$；　　（4）$x^2 < 9$；

（5）$|5x+3| < 4$；　　（6）$|2x-1| \geqslant 5$；

（7）$|ax-b| < \delta$，（$a>0$，$\delta>0$，b为常数）；

（8）$|cy-y_0| > M$，（$c>0$，$M>0$，y_0为常数）；

（9）$0 < (x-2)^2 < 4$；　　（10）$1 < |x-4| < 2$；

（11）$\dfrac{1}{(x-3)^2} > 10000$；　　（12）$\left|\dfrac{1}{10^x-1}\right| > 1000$。

第二节　函　　数

函数的概念

在上节中我们已经看到，在观察客观世界时，我们所遇到的许多量都是在不断地发生变化，这是客观世界不断变

化、不断运动和不断发展在量这一方面的表现。如果抛开其物理的化学的等具体意义，就是数学里抽象的变量概念。我们还须注意到客观世界中各个对象或者备个现象是相互联系、相互依赖、相互制约着的，因此所涉及的变量也是相互联系、相互依赖、相互制约着的。所以要认识客观世界，我们不仅要考查各个量的变化状态，而更重要的是要考查各个变量间的相互依赖关系。变量间的这种依赖关系，在数学里就抽象成函数的概念。微积分学（或者说数学分析）正是研究变量以及它们之间相互关系的一门学科。这一节里我们研究函数概念，先看下面这些例子：

例1　令r代表一个球的半径，V代表这个球的体积，那么由立体几何知道

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

这个关系式表示了球的体积与半径之间的依赖关系；当半径r变化时，球的体积V也随着发生变化；当r取某一确定的值时，体积V也就取一个确定的值。

例2　自由下落的物体（图1—1），下落的距离S与下落的时间t有下面的关系。

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中$g\approx980$厘米/秒^{2}是重力加速度。这个关系式反映了时间与距离这两个变量之间的依赖关系。我们看到，如果时间t在变化，距离S也随着发生变化；当t取某一

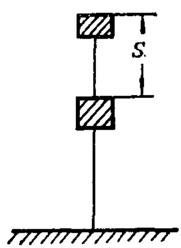


图1—1

确定的值时，S也将取一个确定的值，如$t=1$秒时，$S=\frac{1}{2}gt^2$

≈ 490厘米。

例3 气温随时间的变化规律。

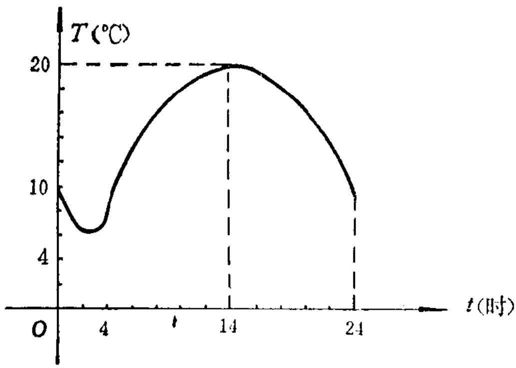


图 1 — 2

气象台（站）常采用自动温度记录器记录温度随时间变化的规律。图 1—2 是温度记录器在坐标纸上记录下来的西安地区某日一昼夜的温度变化曲线。其横坐标是时间 t（时），纵坐标是温度 T（℃）。我们看到，时间在 0 小时到24小时之间变化，温度也随着变化；从这个图里也容易找到在某一确定的时刻，当时的气温就有一个确定的值与之对应，例如$t=14$时，$T=20^\circ(C)$。

还有许多其他的自动记录器，如地震记录器，湿度记录器等，都是记录某一量如地震的深度，空气的湿度依赖于时间t的关系。

例4 我们要测量宽为20米一条河流水的深度。选以河的一岸为坐标原点，这点到对岸的直线为x轴。我们可以适当选取一些点测量河深，这里我们假定沿x轴每隔 2 米进行一次实测，取得数据列表如下（单位：米）：

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0.2	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0.3

根据这个表即可大致作出河流在测点处的河床断面图（图1—3），我们看到河深是随着测点而变化着的量，在测点处的河深，可直接从表中查出，例如在$x=12$米处，河深$y=2.1$米；不在测点处的河深，由断面图上也可大致按比例算出。选取的测点越多，所得的河床断面图就越精确。这种表格或河床断面图，即表示河深y与测点到原点的距离x两个变量间的相互依赖关系。

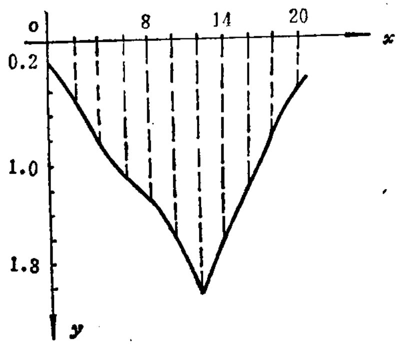


图1—3

例5　在电子技术中，经常要遇到各种波形，图1—4是一种三角波中的一个波形，图中横坐标表示时间t（微秒：1秒$=10^6$微秒），纵坐标表示电压u（伏），从图上看到，电压u随时间t的变化而变化。在区间$[0,20]$中，每取定一个时间t的值，都有一个确定的u和它对应。

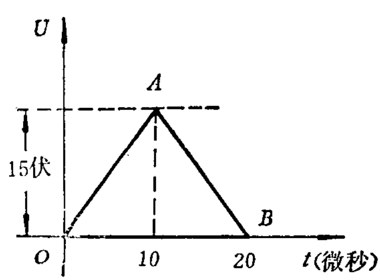


图1—4

u和t的关系也可以用数学式子来表示。由于图形是由不同的两个直线段所组成的：在区间$0\leqslant t\leqslant 10$上，u和t的关系由线段OA的方程$u=\frac{3}{2}t$所决定；在区间$10<t\leqslant 20$上，u和 t 的关系由线段AB的方程$u=30-\frac{3}{2}t$所决定（为什么？）。因此，在区间 $0\leqslant t\leqslant 20$上，u和t的关系式应分段来表示，即：

$$u=\begin{cases}\frac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10;\\ 30-\frac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20.\end{cases}$$

上面这五个例子，就其所包含的具体意义来说是不相同的，但如果抛开各自的具体意义，它们的共同特点是：参与同一问题或过程的变量之间是相互依赖的，换句话说，即当一个变量发生变化时，另一个变量也随着发生变化；而当其中一个变量取某一确定的值时，那么按照某种确定的对应规律，就可求得另一个变量的一个相应的值。**这种变量取得的数值之间的对应关系，正是函数概念的实质。**

定义 设在某个变化过程中有两个变量x和y，如果x变化时，y按照一定的关系同时变化。从数值上看，对于x在它的变化范围内的每一个数值，y按照一定的对应规律取得一个确定的对应值，这时称变量y与变量x间建立了函数关系。x叫做自变量，y叫做因变量。

在上面的函数定义里，相互联系的变量x和y一般都是在变化着的。但是在一些实际问题里，有时也会遇到两个变量虽然也是按照一定的规律联系着的，但是当其中一个变量在

某一范围里变化时，另一个变量按照对应规律却始终只取同一个值。

例如信件的重量W与邮资S是两个变量，按照邮局章程，规定两者之间的关系是：国内邮资（外埠平信）“每重20克付邮资8分，不足20克都以20克计”。这里，如果我们仅仅在20克以内来考虑，那么不管信件重量W在这个范围内取什么值，邮资S则始终保持同一值8分。

函数记号的使用

在函数的定义中，只是指出，对于x在它的变化范围内的每一个数值，y按照一定的对应规律（或法则）取得一个确定的对应值，这并没有限制是什么对应规律（或法则），因此一般采用“f”来表示变量x，y间的对应规律，而把y与x间的函数记为：

$$f(x)=y, \quad 或\ x\xrightarrow{f}y.$$

其中$f(x)$表示在对应规律f下自变量x所对应的函数值。

例如正弦函数$y=\sin x$，这时f就表示自变量x按正弦规律取得函数值，可写为

$$y=f(x)=\sin x,$$

又如$y=x^2$，f表示自变量按平方法则得出函数值，可写为

$$y=f(x)=x^2.$$

但如果同时要考查几个不同的函数，为了避免混乱，就须要采用不同的函数记号，如$\varphi(x)$，$F(x)$，$\Phi(x)$，……等以示区别。

根据定义，确定一个函数，主要是确定函数关系和自变量取值的范围。至于自变量与因变量用什么记号来表示，那

是无关紧要的。所以，只要自变量取值的范围相同，而且f代表同一函数关系，那么$y=f(x)$和$s=f(t)$就是同一个函数。当然，同一个函数的自变量和因变量，是不能用同一个记号的，例如决不可把函数$y=x^2$记成为$x=x^2$。

对于函数$y=f(x)$，用$f(a)$表示函数y在自变量x取得数值a时所取得的函数值。

例6 $y=\sin x$。上面已经指出，这里f是自变量的正弦，可写成：

$$y=f(x)=\sin x.$$

当$x=30°$时，则 $y=\sin 30°=\frac{1}{2}$，也可写成：

$$f(30°)=\sin 30°=\frac{1}{2},$$

当 $x=60°$时，$y=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，也可写成：

$$f(60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例7 已知函数$f(x)=x^2-9x+14$，计算x依次取-1，0，0.5，2，a，$a+1$，x_0+h时的函数值。

解： $f(-1)=(-1)^2-9\times(-1)+14=24$；

$f(0)=0^2-9\times 0+14=14$；

$f(0.5)=0.5^2-9\times 0.5+14=9.75$；

$f(2)=2^2-9\times 2+14=0$；

$f(a)=a^2-9a+14$；

$$\begin{aligned}f(a+1)&=(a+1)^2-9(a+1)+14\\&=a^2-7a+6;\end{aligned}$$