

46576

57-24054
KRW

中華人民政府高等教育部推薦
中等技術學校教材試用本

5124
K174

三角學教程

И. И. КОЖЕВОВ 著
李 榮 陳 譯



商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
中等技術學校教材試用本



三 角 學 教 程

И. Я. 柯仁烏若夫 著
李 榮 涑 譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社 (ГОСТЕХИЗДАТ) 出版的柯仁烏若夫 (П. Я. Кожеуров) 新著“三角學教程”(Курс тригонометрии) 1952年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部書定為中等技術學校教科書。

三 角 學 教 程

李 榮 凍 譯

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海馬南路二一一號

中 國 圖 書 發 行 公 司 總 經 售

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

(51273)

1953年7月初版 1954年1月再版

版面字數 240,000 印數 87,001—87,000

定價 ¥9,600

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

序 言

本書適用於中等技術學校的一切專業。著者所特定的任務：在科學道理上給三角學以嚴密的、符合於中等技術學校數學教學大綱的敘述，以及選擇出不僅足供課堂作業而且還够家庭作業之用的習題。

爲了滿足系統敘述的要求，不得不引入少量超出教學大綱範圍的材料；這一切材料以及例題和習題都是用小號字排印的。

在中等技術學校的數學教學大綱中，規定了先學習平面上的坐標法，但極大部分的中等技術學校還要學習高等數學的初步知識。這種情況在某種程度上決定了本書編寫的體系；但是定義和術語完全符合於通用的；很多定義和術語是選自初等三角學教程和高等數學教程的。在本書中廣泛地利用着平面上的坐標法，來下定義及當作研究的工具。

著者認爲將本書編寫成像普通中學用的那樣是不可能的；中等技術學校用的三角教科書，在數學科目的體系中應當成爲整個教學計劃的一個有機組成部分。

在書末有三角學的發展簡史，B. A. 蘇洛德可夫同志曾參加這一部分的編寫工作。

C. II. 諾沃謝洛夫同志在我編寫本書時曾給與我許多珍貴的意見和指教，在此謹對他的幫助表示我衷心的感謝。同時對於提供了若干寶貴意見的 P. A. 卡爾寧同志與 B. II. 米諾耳斯基同志也表示衷心的感謝。本書曾經 II. C. 莫金諾夫同志仔細校訂，著者特向他致以謝忱。

II. II. 柯仁烏諾夫

目 錄

序言

第一章 銳角的三角函數 直角三角形的解法..... 1

§ 1 定義.....	1
§ 2 根據已知三角函數作出銳角法.....	3
§ 3 同一銳角的三角函數之間的關係.....	5
§ 4 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法.....	6
§ 5 三角恆等式.....	10
§ 6 30° , 45° 和 60° 各角的三角函數.....	11
§ 7 餘角的三角函數.....	13
§ 8 銳角三角函數的增大和減小.....	14
§ 9 直角三角形中邊與角之間的關係和直角三角形解法的四種基本情形.....	16
§ 10 三角函數表.....	18
§ 11 解直角三角形的例.....	22
§ 12 等腰三角形的解法.....	25
練習.....	27

第二章 角的概念的推廣 角的測量法..... 38

§ 13 角的概念的推廣.....	38
§ 14 角的弧度值.....	39
§ 15 某些角的度與弧表示式之間的關係表.....	41
§ 16 由角的度化為弧度和由弧度化為度.....	41
§ 17 圓周的弧長.....	43
§ 18 問題.....	44
§ 19 線速度和角速度.....	48
練習.....	49

第三章 三角函數概念的推廣 三角函數的週期性..... 52

§ 20 任意角的三角函數.....	52
§ 21 三角函數的週期性.....	64
§ 22 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ 諸角的三角函數.....	68

§ 23 三角函數的符號	69
§ 24 三角函數的增大和減小	75
§ 25 基本的恆等式	77
§ 26 根據一個三角函數計算其餘各三角函數	78
練習	81
第四章 誘導公式三角函數的圖解	87
§ 27 直角的三角函數的誘導公式	87
§ 28 角的形狀為 $90^\circ + \alpha$ 的三角函數的誘導公式	90
§ 29 角的形狀為 $90^\circ - \alpha$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$, $270^\circ - \alpha$, $270^\circ + \alpha$, $360^\circ - \alpha$ 的三角函數的誘導公式	93
§ 30 三角函數的圖解	100
練習	107
第五章 餘弦定理 加法定理 二倍角及半角的三角函數	110
§ 31 餘弦定理	110
§ 32 加法定理	111
§ 33 二角的和及差的正切	115
§ 34 二倍角的正弦、餘弦和正切	116
§ 35 用半角的正切表整角的各三角函數	119
§ 36 半角的正弦、餘弦和正切	120
練習	124
第六章 變換三角函數的和與差為乘積	129
§ 37 變換兩個正弦或餘弦的和與差為乘積	129
§ 38 變換兩個正切或餘切的和與差為乘積	131
§ 39 將表示式化為適於對數計算形式的例題	132
練習	135
第七章 反三角函數	138
§ 40 定義	138
§ 41 基本恆等式	143
§ 42 關於反三角函數的例題	144
練習	146
第八章 三角方程式	148
§ 43 最簡單的三角方程式	148
§ 44 含一未知數的三角方程式的一般解法	157

§ 45 解三角方程式的例子	157
練習	168
第九章 斜三角形各元素間的基本關係式及利用三角函數表 以解斜三角形	175
§ 46 正弦定理	175
§ 47 根據三角形的二邊及其夾角以求三角形的其他二角的公式	178
§ 48 根據三角形的三邊求三角形諸角的公式	180
§ 49 三角形的面積	181
§ 50 平行四邊形的面積	182
§ 51 根據一邊與二角解斜三角形	182
§ 52 根據二邊及其中一邊的對角解斜三角形	184
§ 53 根據二邊及其夾角解斜三角形	187
§ 54 根據三邊解斜三角形	189
練習	190
第十章 三角函數對數表及其對解三角形的應用	195
§ 55 三角函數對數表	195
§ 56 四位數字表的精確度	196
§ 57 利用對數表進行計算的例子	197
§ 58 利用對數表解直角三角形的例子	198
§ 59 利用對數表解斜三角形的例子	200
練習	201
第十一章 三角學在立體幾何學上的應用	210
§ 60 應用三角學解立體幾何學上問題的例子	210
練習	222
三角學的發展簡史	234
三角公式及其他幾種便覽表	243

三角學教程

第一章 銳角的三角函數 直角三角形的解法

§1 定義

取任意的銳角 α (圖 1)。作一直角三角形, 使它的一個銳角等於 α 。爲此目的, 在角的一邊上, 取不與角的頂點 A 重合的任意一點 B , 並從 B 點向另一邊作垂線 BC 。引入記號: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ 。

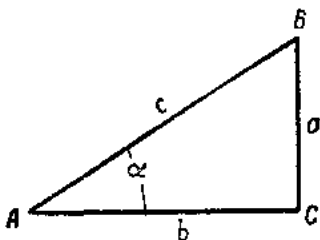


圖 1

✓ 定義 1. 銳角 α 所對的直角邊 a 與斜邊 c 的比值稱爲銳角 α 的正弦:

如

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

✓ 定義 2. 和銳角 α 相鄰的直角邊 b 與斜邊 c 的比值稱爲銳角 α 的餘弦:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

✓ 定義 3. 銳角 α 所對的直角邊 a 與此角相鄰的直角邊 b 的比值稱爲銳角 α 的正切:

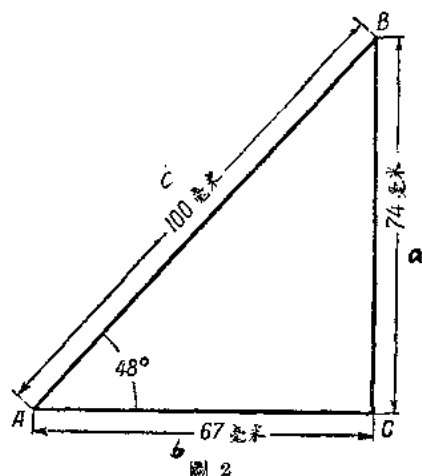
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

✓ 定義 4. 銳角 α 相鄰的直角邊 b 與此角所對的直角邊 a 的比值稱爲銳角 α 的餘切:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

我們以例子來表明，如何求任何一個角（這裏係指任何銳角——譯者），例如角 48° 的正弦、餘弦、正切和餘切的近似數值。

利用規尺、圓規和量角器作出直角三角形 ABC ，這三角形中 $\angle BAC = 48^\circ$ ，而斜邊 $AB = 100$ 毫米（圖 2，縮小 1.5 倍）。量直角邊 BC 和 AC 得： $BC \approx 74$ 毫米，而 $AC \approx 67$ 毫米。則有：

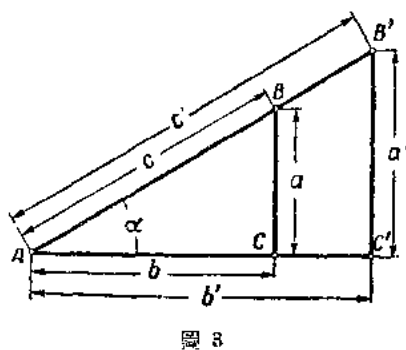


$$\sin 48^\circ \approx \frac{74}{100} = 0.74;$$

$$\cos 48^\circ \approx \frac{67}{100} = 0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48^\circ \approx \frac{74}{67} \approx 1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48^\circ \approx \frac{67}{74} \approx 0.90.$$



用同樣的方法可求得任何銳角的正弦、餘弦、正切和餘切。

定理 1. 由 α 角的給出，正弦、餘弦、正切和餘切的值即完全確定，即是說，這些值與爲了作輔助直角三角形時對 B 點的選擇無關。

證明 研究有銳角 α 的兩個直角三角形（圖 3）。此兩三角形相似，所以

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \sin \alpha,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \cos \alpha,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

定理已被證明。

因此，對應於銳角 α 有完全確定的值 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 。所以 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 是角 α 的函數。這些函數叫做三角函數。

§2 根據已知三角函數作出銳角法

從 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的定義推得，銳角 α 的正弦和餘弦是小於 1 的正數：

$$0 < \sin \alpha < 1,$$

$$0 < \cos \alpha < 1,$$

式中 α 為銳角。

定理 1. 對於任何的小於 1 的正數 y 有而且僅有一個銳角 α ，他的正弦等於 y 。

$$\sin \alpha = y.$$

證明 作出直角三角形 ABC (圖 4)，它的一直角邊等於 y ，而斜邊等於 1。於是

$$\sin \angle BAC = \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{1} = y.$$

我們已經證明了，存在有這樣的一個銳角，他的正弦等於 y 。

我們將證明，正弦等於 y 的任何角 β 必等於角 α 。

事實上：設 β 為銳角，他的正弦等於 y ；作出直角三角形 $A'B'C'$ ，它有銳角 $B'A'C' = \beta$ (圖 5)。於是

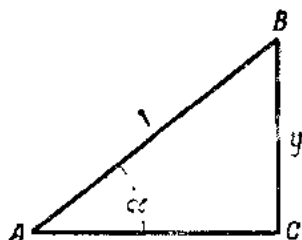


圖 4

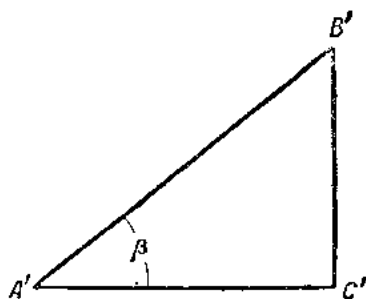


圖 5

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \sin \beta = y.$$

但

$$\frac{BC}{AB} = y.$$

所以

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}.$$

因此，直角三角形 ABC 相似於直角三角形 $A'B'C'$ ，即是說 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ，也就是 $\alpha = \beta$ 。

我們已經證明了，僅存在有一個銳角，他的正弦等於 y 。

仿此可證明下列定理。

定理 2. 對於任何小於 1 的正數 x 有而且僅有一個銳角 α ，他的餘弦等於 x ：

$$\cos \alpha = x.$$

定理 3. 對於任何的正數 p 有而且僅有一個銳角 α ，他的正切等於 p ：

$$\operatorname{tg} \alpha = p.$$

定理 4. 對於任何的正數 q 有而且僅有一個銳角 α ，他的餘切等於 q ：

$$\operatorname{ctg} \alpha = q.$$

我們用例子來研究按這角的已知三角函數作出銳角 α 的方法。

例 1. $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

在任意直線上取線段 $DE=3$ (圖 6)。

過 E 點引直線 $EF \perp DE$ 。作出中心在 D 點，半徑為 4 的圓周。

令 K 為此圓周與直線 EF 的交點。則角 EKD 為所求的角 α ，因為他的正弦等於 $\frac{DE}{DK} = \frac{3}{4}$ 。

例 2. $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ 。

在任意直線上取線段 $BC=2$ (圖 7)。過 C 點引直線 $CM \perp BC$ 。作出中心在 B 點，半徑 $r=5$ 的圓周。令 A 為此圓周與直線 CM 的交點。則角 ABC 的餘弦等於

$\frac{BC}{BA} = \frac{2}{5}$ ；因之， $\angle ABC$ 是所求的角 α 。

例 3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ 。

在直角 MON (圖 8) 的一條邊上，例如在 OM 上，從頂點 O 取線段 $OA=3$ ，而在另一條邊上取線段 $OB=2$ 。連結 A 點和 B 點。角 OAB 的正切等於 $\frac{2}{3}$ ，因之， $\angle OAB = \alpha$ 。

例 4. $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ 。

仿照前面的作圖法。在直角 LKM (圖 9) 的兩邊上取線段 KA 和 KC ，在這兩條線段之中，例如第一條 (KA) 為第二條 (KC) 的三倍。連結 A 點和 C 點。角 KAC 的餘切等於 3，因之， $\angle KAC = \alpha$ 。

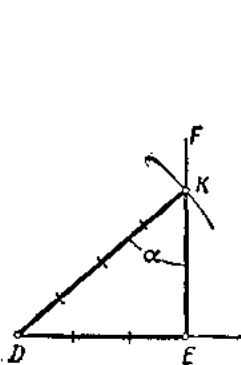


圖 6

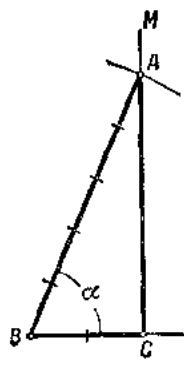


圖 7

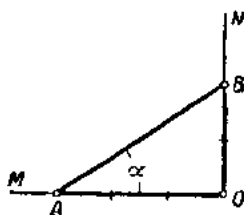


圖 8

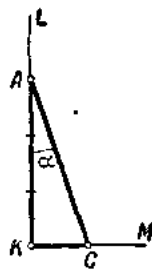


圖 9

§ 3 同一銳角的三角函數間的關係

取任意的銳角 α 並作出直角三角形 ABC ，它的一個銳角等於 α (圖

10)。設 $BC=a$, $CA=b$ 和 $AB=c$ 。

根據畢達哥拉斯定理^{*}，從直角三角形 ABC 得： $a^2+b^2=c^2$ 。

用 c^2 去除這個等式的兩端，得：

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

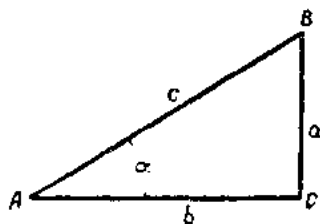


圖 10

或 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$ (1)

因為 $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ 和 $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ 。

我們再指出下列公式，這些公式也是從三角函數的定義推出。

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$
 (2)

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$
 (3)

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$
 (4)

事實上，因為 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$,

則 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha,$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$$

其次： $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$

§4 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法

由前節的公式可從一個三角函數的值求出其餘一切函數的值，現

^{*}) 該定理為我國人所最先發現，因此應改為我國發現該定理之人的名字，有人主張改為「商高定理」，也有人主張改為「陳子定理」。(見中國數學雜誌 1 卷 1 期「商高定理呢？陳子定理呢？」及 1 卷 4 期「關於商高或陳子定理的討論」一文)——譯者註

在用例子來表明應當如何去作。

例 1. 已給 $\sin a = \frac{20}{29}$ 。計算銳角 a 的其餘三角函數值。

從公式 $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ 有：

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a.$$

把 $\sin a$ 的已知值 $\frac{20}{29}$ 代入，得：

$$\cos^2 a = 1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{29^2 - 20^2}{29^2} = \frac{49-0}{29^2}.$$

於是 $\cos a = \frac{21}{29}$ 。

要求 $\operatorname{tg} a$ 可用公式

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

得：

$$\operatorname{tg} a = \frac{20}{29} : \frac{21}{29} = \frac{20}{21}.$$

由此得

$$\operatorname{ctg} a = \frac{21}{20}.$$

因為 $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = 1$ 。

例 2. 已給： $\operatorname{ctg} a = \frac{45}{28}$ 。計算銳角 a 的其餘三角函數值。

把 $\operatorname{tg} a$ 的值作為 $\operatorname{ctg} a$ 的倒數記下來：

$$\operatorname{tg} a = \frac{28}{45}.$$

根據公式 $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$ 有： $\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{45}{28}$ 。將此等式的兩端平方，得：

$$\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{45^2}{28^2}.$$

將上式的兩端各加 1：

$$1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = 1 + \frac{45^2}{28^2}, \text{ 或 } \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{28^2 + 45^2}{28^2}.$$

考慮到 $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ (§ 3)，得：

$$\sin^2 a = \frac{28^2}{2025 + 784}, \text{ 由此得 } \sin a = \frac{28}{53}.$$

從公式 $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$ 有 $\cos a = \operatorname{ctg} a \cdot \sin a$ 。

應用已知的情形得：

$$\cos a = \frac{45 \cdot 28}{28 \cdot 53} = \frac{45}{53}.$$

例 3. 若 $\cos a = \frac{2}{7}$ ，求銳角 a 的其餘三角函數值。

解 從公式 $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ 有：

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

例 4. 若 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$, 求銳角 α 的其餘三角函數值。

用下法解這個例子最簡便。研究以 p 和 q 為直角邊的直角三角形 (圖 11)。它的斜邊等於 $\sqrt{p^2 + q^2}$ 。所以

$$\cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{q}{p}.$$

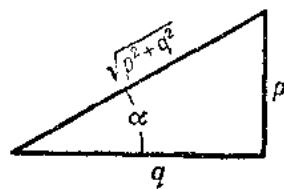


圖 11

根據值

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$$

而得的三角函數值的幾何結論

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

最好記住，因為在應用中往往必須根據 $\operatorname{tg} \alpha$ 的值來求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值。

例 5. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ (圖 12)。有：

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

也是可根據 $\operatorname{ctg} \alpha$ 的值，幾何地求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值，這裏 α 是銳角。

例 6. $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ (圖 13)。於是

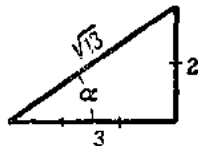


圖 12

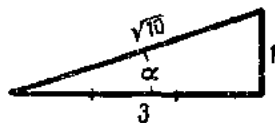


圖 13

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

作出一切計算的普遍形式，即是說不使已給函數具有確定的值，可推出普遍公式。

例 7. 用 $\cos \alpha$ 表示銳角 α 的三角函數值。

從公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求得：

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

從公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha},$$

隨之

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

例 8. 推出用 $\operatorname{tg} \alpha$ 表銳角 α 的三角函數表達式。

從公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

在這些等式的兩端各加 1，得：

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

因 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，則

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

由此得

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

因此

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

最後,

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

用 $\sin \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 表示銳角 α 的三角函數公式的推論, 留待讀者。

茲書出用 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 表銳角三角函數的公式:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}};$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

注意 這些公式不用記得。根據銳角的一個三角函數計算此角的其餘三角函數時, 每一次都必須如上面所示各例子那樣進行, 且利用基本公式: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, 這些公式必須牢固地記熟。

§ 5 三角恆等式

第 3 節中表示同一銳角的三角函數之間關係的公式是三角恆等式的例子, 無論角的大小如何它們都成立。要證明三角恆等式, 可把恆等式的左端改變成右端, 或把右端改變成左端, 或把恆等式的每一端都改變成同一的式子。

例 1. 證明恆等式

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$$

成立。

第一法 改變右端:

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$