中央人民政府高等教育部推薦
中等技術學校教材試用本

三角學教程

П. Я. КОЖЕУРОВ 著
李榮涷 譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
中等技術學校教材試用本

三角學教程

П. Я. 柯仁烏若夫著
李榮涑譯

商務印書館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（ГОСТЕХИЗДАТ）出版的柯仁烏若夫（П. Я. Кожеуров）新著"三角學教程"（Курс тригонометрии）1952年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為中等技術學校教科書。

三 角 學 教 程

李 榮 湅 譯

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館上海廠 印 刷
（51273）

1953年7月初版 1954年1月再版
版面字數 240,000 印數 67,001—87,000
定價 ¥9,600

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

序　　言

本書適用於中等技術學校的一切專業。著者所持定的任務：在科學道理上給三角學以嚴密的、符合於中等技術學校數學教學大綱的敍述，以及選擇出不僅足供課堂作業而且還够家庭作業之用的習題。

為了滿足系統敍述的要求，不得不引入少量超出教學大綱範圍的材料；這一切材料以及例題和習題都是用小號字排印的。

在中等技術學校的數學教學大綱中，規定了先學習平面上的坐標法，但極大部分的中等技術學校還要學習高等數學的初步知識。這種情况在某種程度上決定了本書編寫的體系；但是定義和術語完全符合於通用的；很多定義和術語是選自初等三角學教程和高等數學教程的。在本書中廣泛地利用着平面上的坐標法，來下定義及當作研究的工具。

著者認為將本書編寫成像普通中學用的那樣是不可能的；中等技術學校用的三角教科書，在數學科目的體系中應當成為整個教學計劃的一個有機組成部分。

在書末有三角學的發展簡史，B. A. 蘇洛德可夫同志曾參加這一部分的編寫工作。

C. П. 諾沃謝洛夫同志在我編寫本書時曾給與我許多珍貴的意見和指教，在此謹對他的幫助表示我衷心的感謝。同時對於提供了若干寶貴意見的 P. A. 卡爾寧同志與 B. П. 米諾耳斯基同志也表示衷心的感謝。本書曾經 П. C. 莫金諾夫同志仔細校訂，著者特向他致以謝忱。

П. Я. 柯仁烏諾夫

目　　錄

三角學教程

第一章 銳角的三角函數 直角三角形的解法

§1 定義

取任意的銳角 α(圖 1)。作一直角三角形,使它的一個銳角等於α。爲此目的,在角的一邊上,取不與角的頂點 A 重合的任意一點 B,並從 B 點向另一邊作垂線 BC。引入記號: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$。

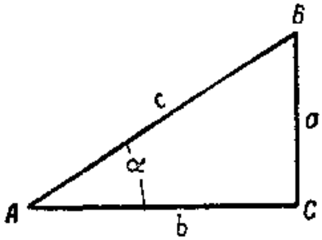

圖 1

定義 1. 鋭角 α 所對的直角邊 a 與斜邊 c 的比値稱爲銳角 α 的正弦:

划

$$\sin \alpha=\frac{a}{c}.$$

定義 2. 和銳角 α 相鄰的直角邊 b 與斜邊 c 的比値稱爲銳角 α 的餘弦:

$$\cos \alpha=\frac{b}{c}.$$

定義 3. 銳角 α 所對的直角邊 a 與此角相鄰的直角邊 b 的比値稱爲銳角 α 的正切:

$$\operatorname{tg} \alpha=\frac{a}{b}.$$

定義 4. 銳角 α 相鄰的直角邊 b 與此角所對的直角邊 a 的比値稱爲銳角 α 的餘切:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}.$$

我們以例子來表明，如何求任何一個角（這裏係指任何銳角——譯者），例如角 48° 的正弦、餘弦、正切和餘切的近似數値。

利用規尺、圓規和量角器作出直角三角形 ABC，這三角形中 $\angle BAC=48°$，而斜邊 $AB=100$ 毫米(圖 2, 縮小 1.5 倍)。量直角邊 BC 和 AC 得: $BC\approx74$ 毫米，而 $AC\approx67$ 毫米。則有:

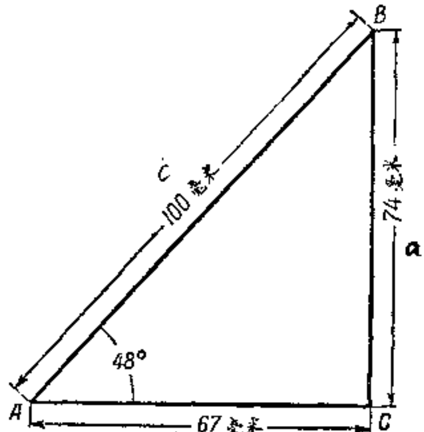

圖 2

$$\sin 48°\approx\frac{74}{100}=0.74;$$

$$\cos 48°\approx\frac{67}{100}=0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48°\approx\frac{74}{67}\approx1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48°\approx\frac{67}{74}\approx0.90.$$

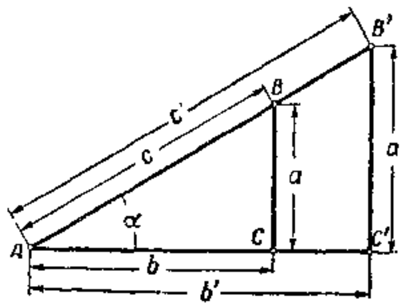

圖 3

用同樣的方法可求得任何銳角的正弦、餘弦、正切和餘切。

定理 1. 由 α 角的給出，正弦、餘弦、正切和餘切的值卽完全確定，卽是說，這些値與為了作輔助直角三角形時對 B 點的選擇無關。

證明　研究有銳角 α 的兩個直角三角形(圖 3)。此兩三角形相似，所以

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\sin\alpha,$$

$$\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}=\cos\alpha,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

定理已被證明。

因此，對應於銳角 α 有完全確定的值 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$。所以 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 是角 α 的函數。這些函數叫做三角函數。

§2　根據已知三角函數作出銳角法

從 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的定義推得，銳角 α 的正弦和餘弦是小於 1 的正數：

$$0<\sin\alpha<1,$$

$$0<\cos\alpha<1,$$

式中 α 為銳角。

定理 1.　對於任何的小於 1 的正數 y 有而且僅有一個銳角 α，他的正弦等於 y.

$$\sin\alpha=y.$$

證明　作出直角三角形 ABC(圖 4)，它的一直角邊等於 y，而斜邊等於 1。於是

$$\sin\angle BAC=\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{y}{1}=y.$$

我們已經證明了，存在有這樣的一個銳角，他的正弦等於 y。

我們將證明，正弦等於 y 的任何角 β 必等於角 α。

事實上：設 β 為銳角，他的正弦等於 y；作出直角三角形 $A'B'C'$，它有銳角 $B'A'C'=\beta$(圖 5)。於是

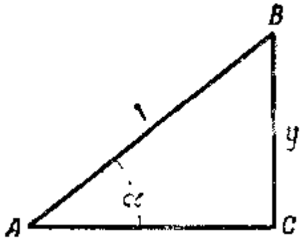

圖 4

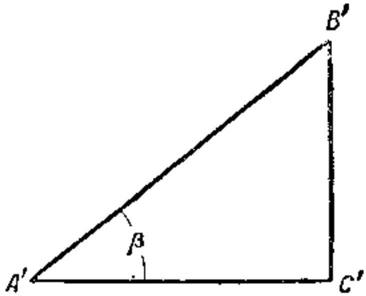

圖 5

$$\frac{B'C'}{A'B'}=\sin\beta=y.$$

但
$$\frac{BC}{AB}=y.$$

所以
$$\frac{B'C'}{A'B'}=\frac{BC}{AB}.$$

因此，直角三角形 ABC 相似於直角三角形 $A'B'C'$，即是說 $\angle BAC=\angle B'A'C'$，也就是 $\alpha=\beta$。

我們已經證明了，僅存在有一個銳角，他的正弦等於 y。

仿此可證明下列定理。

定理 2. 對於任何小於 1 的正數 x 有而且僅有一個銳角 α，他的餘弦等於 x:
$$\cos\alpha=x.$$

定理 3. 對於任何的正數 p 有而且僅有一個銳角 α，他的正切等於 p:
$$\operatorname{tg}\alpha=p.$$

定理 4. 對於任何的正數 q 有而且僅有一個銳角 α，他的餘切等於 q:
$$\operatorname{ctg}\alpha=q.$$

我們用例子來研究按這角的已知三角函數作出銳角 α 的方法。

例 1. $\sin\alpha=\frac{3}{4}$.

在任意直線上取線段 $DE=3$(圖 6)。

過E點引直線$EF\perp DE$。作出中心在D點,半徑爲4的圓周。

令K爲此圓周與直線EF的交點。則角EKD爲所求的角α,因爲他的正弦等於$\frac{DE}{DK}=\frac{3}{4}$。

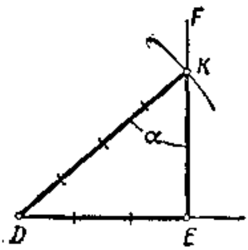

圖 6

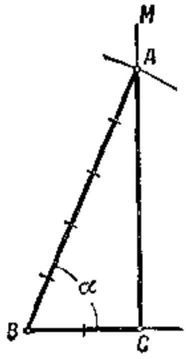

圖 7

例 2.　$\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

在任意直線上取線段 $BC=2$(圖 7)。過 C 點引直線 $CM\perp BC$。作出中心在B點,半徑 $r=5$ 的圓周。令A爲此圓周與直線CM的交點。則角ABC的餘弦等於$\frac{BC}{BA}=\frac{2}{5}$;因之,$\angle ABC$是所求的角$\alpha$。

例 3.　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

在直角MON(圖 8)的一條邊上,例如在OM上,從頂點O取線段$OA=3$,而在另一條邊上取線段$OB=2$。連結A點和B點。角OAB的正切等於$\frac{2}{3}$,因之,$\angle OAB=\alpha$。

例 4.　$\operatorname{ctg}\alpha=3$.

仿照前面的作圖法。在直角LKM(圖 9)的兩邊上取線段KA和KC,在這兩條線段之中,例如第一條(KA)爲第二條(KC)的三倍。連結A點和C點。角KAC的餘切等於3,因之,$\angle KAC=\alpha$。

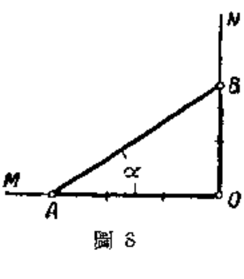

圖 8

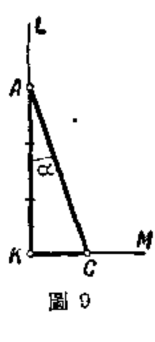

圖 9

§3　同一銳角的三角函數間的關係

取任意的銳角α並作出直角三角形ABC,它的一個銳角等於α(圖

10)。設 $BC=a$, $CA=b$ 和 $AB=c$。

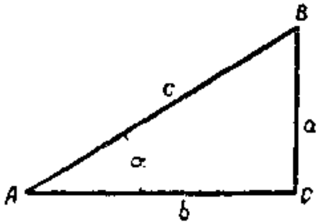

圖 10

根據畢達哥拉斯定理*),從直角三角形 ABC 得: $a^2+b^2=c^2$.

用 c^2 去除這個等式的兩端,得:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,$$

或

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \tag{1}$$

因為 $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ 和 $\frac{b}{c}=\cos\alpha$。

我們再指出下列公式,這些公式也是從三角函數的定義推出。

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \tag{4}$$

事實上,因為 $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$,

則

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha$$

其次:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

§4 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法

由前節的公式可從一個三角函數的值求出其餘一切函數的值,現

*)該定理爲我國人所最先發現,因此應改爲我國發現該定理之人的名字,有人主張改爲「商高定理」,也有人主張改爲「陳子定理」。(見中國數學雜誌1卷1期「商高定理呢?陳子定理呢?」及1卷4期「關於商高或陳子定理的討論」二文)——譯者註

在用例子來表明應當如何去作。

例 1.　已給 $\sin\alpha=\frac{20}{29}$。計算銳角 α 的其餘三角函數值。

從公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 有：

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha.$$

把 $\sin\alpha$ 的已知值 $\frac{20}{29}$ 代入，得：

$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{20}{29}\right)^2=\frac{29^2-20^2}{29^2}=\frac{\overset{441}{\cancel{49\cdot 9}}}{29^2}.$$

於是 $\cos\alpha=\frac{21}{29}$。

要求 $\operatorname{tg}\alpha$ 可用公式　$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

得：$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{20}{29}:\frac{21}{29}=\frac{20}{21}.$$

由此得　$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{21}{20},$$

因爲 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$。

例 2.　已給：$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{45}{28}$。計算銳角 α 的其餘三角函數值。

把 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值作爲 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的倒數記下來：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{28}{45}.$$

根據公式 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 有：$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{45}{28}$。將此等式的兩端平方，得：

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{45^2}{28^2}.$$

將上式的兩端各加 1：

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\frac{45^2}{28^2}，或\ \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{28^2+45^2}{28^2}.$$

考慮到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$（§3），得：

$$\sin^2\alpha=\frac{28^2}{2025+784},\quad 由此得\ \sin\alpha=\frac{28}{53}.$$

從公式 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 有 $\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$。

應用已知的情形得：　$$\cos\alpha=\frac{45\cdot 28}{28\cdot 53}=\frac{45}{53}.$$

例 3.　若 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$，求銳角 α 的其餘三角函數值。

解　從公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 有：

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{49}}=\frac{3\sqrt{5}}{7},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

例 4. 若 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$,求銳角 α 的其餘三角函數值。

用下法解這個例子最簡便。研究以 p 和 q 爲直角邊的直角三角形(圖 11)。它的斜邊等於 $\sqrt{p^2+q^2}$。所以

$$\cos\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{q}{p}.$$

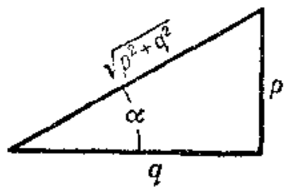

圖 11

根據值

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$$

而得的三角函數值的幾何結論

$$\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad \cos\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

最好記住,因爲在應用中往往必須根據 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值來求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值。

例 5. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ (圖 12)。有:

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}};\quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

也是可根據 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值,幾何地求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值,這裏 α 是銳角。

例 6. $\operatorname{ctg}\alpha=3$ (圖 13)。於是

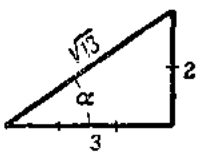

圖 12

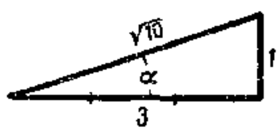

圖 13

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}};\quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

作出一切計算的普遍形式，即是說不使已給函數具有確定的值，可推出普遍公式。

例 7. 用 $\cos\alpha$ 表示銳角 α 的三角函數值。

從公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求得：

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

從公式

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

隨之

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

例 8. 推出用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表銳角 α 的三角函數表達式。

從公式

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\ \text{和}\ \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

在這些等式的兩端各加 1，得：

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

因 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，則

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

由此得

$$\sin^2\alpha=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

因此

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

最後，
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

用 $\sin\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 表示銳角 α 的三角函數公式的推論，留待讀者。

茲書出用 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 表銳角三角函數的公式：

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}};$$

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

注意　這些公式不用記得。根據銳角的一個三角函數計算此角的其餘三角函數時，每一次都必須如上面所示各例子那樣進行，且利用基本公式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$，這些公式必須牢固地記熟。

§5　三角恆等式

第 3 節中表示同一銳角的三角函數之間關係的公式是三角恆等式的例子，無論角的大小如何它們都成立。要證明三角恆等式，可把恆等式的左端改變成右端，或把右端改變成左端，或把恆等式的每一端都改變成同一的式子。

例 1.　證明恆等式
$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$$
成立。

第一法　改變右端：

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha},$$