中学数学复习题演算

（平面几何、立体几何、三角部分）

SHUXUE

江苏人民出版社

中学数学复习题演算

（平面几何、立体几何、三角部分）

南京师范学院数学系编写组

江苏人民出版社

中学数学复习题演算

平面几何、立体几何、三角部分

南京师范学院数学系编写组

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　扬州印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　印张8.5字数179,000

1981年8月第1版　1981年8月第1次印刷

印数1—51,000册

书号：7100·100　　定价：0.60元

责任编辑　何震邦

编 者 的 话

中学数学是培养学生具有参加社会主义革命和建设，以及学习现代科学技术所必需的基础知识的一门重要学科。通过数学教学，要求学生具有正确、迅速的运算能力，逻辑思维能力，空间想象能力，以及分析问题和解决问题的能力。学生对数学概念的理解是否深透，对公式的掌握是否熟练，定理的推导合理与否，运算方法的巧妙和拙劣、正确与错误等，无不在演题过程中反映出来。所以，演算和论证足够数量的数学题是掌握和巩固数学基础知识和基本技能的途径和关键。基于上述考虑，我们编写了这套《中学数学复习题演算》，供高中毕业生和具有高中文化水平的知识青年复习中学数学知识时选用，也可给中学数学教师指导学生复习时参考。

这套《中学数学复习题演算》按《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》精神，蒐集了国内、国外从二十年代至今的各类试题，数学刊物和复习资料上的例题、习题，共七百余题。分三册出版：1.代数部分；2.平面几何、立体几何、三角部分；3.解析几何、微积分、概率部分。选入的复习演算题多数为典型生动有一定难度的习题，也有一定数量有启发性的在运算技能技巧方面有特色的习题。考虑到实际演算的需要，本书的演题有详解、简解、一题多解等多种形式，也有少数只作简单提示。这些都是为了便于读者在学习解题方法的过程中，巩固数学基础知识，开阔解题思

路，掌握演题技能技巧，从而达到举一反三，触类旁通的目的。

这三册《中学数学复习题演算》由沈超、涂世泽、胡光惠、吴蔚先、王不平、苏起凡、金炳陶、王庆福、蒋纯淀、陈永林、葛福生编写。蔡绍稷、王庆福绘制了全部插图。限于编者水平，在内容选择上难免不够完备，缺点错误更在所难免，欢迎广大读者批评指正。

南京师范学院数学系编写组

一九八〇年十月

目　　录

平面几何部分

一、线段相等和角的相等

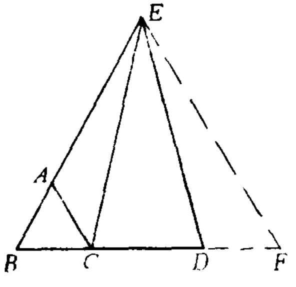
1. 等边三角形ABC的边长为a，在BC的延长线上取一点D，使$CD=b$。在BA的延长线上取一点E，使$AE=a+b$。试证 $EC=ED$。

证一 过E作$EF \parallel AC$交BC的延长线于F。

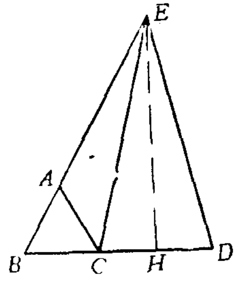
$\because$ $\triangle ABC$是等边三角形，$\therefore$ $\triangle BEF$也是等边三角形。$BF=BE=a+(a+b)=2a+b$。$\therefore$ $DF=a$。

在$\triangle EBC$与$\triangle EFD$中，$EB=EF$，$BC=FD$，$\angle EBC=\angle EFD=60°$，$\therefore$ $\triangle EBC \cong \triangle EFD$。

$\therefore$ $EC=ED$。



（1 题(1)图）



（1 题(2)图）

证二 作$EH \perp BD$交BD于H。在直角三角形EBH中，$\angle EBH=60°$，$\therefore$ $BH=\dfrac{BE}{2}=\dfrac{2a+b}{2}$。$\because$ $BC=a$，

$\therefore\quad CH=\frac{b}{2}$. $\because\quad CD=b$, $\therefore\quad HD=\frac{b}{2}$.

于是，EH是CD的中垂线，$\therefore\quad EC=ED$.

证三 作$CG\parallel DE$交AE于G。设$AG=x$。

由 $\frac{BG}{BE}=\frac{BC}{BD}$，得$\frac{a+x}{2a+b}=\frac{a}{a+b}$；$\therefore\quad x=\frac{a^2}{a+b}$，

即$\frac{a}{x}=\frac{a+b}{a}$. 又 $\frac{AC}{AG}=\frac{a}{x}=\frac{a+b}{a}=\frac{AE}{AC}$，

且$\angle GAC=\angle CAE$，

$\therefore\quad \triangle GAC\backsim\triangle CAE$，

$\angle ACG=\angle AEC$.

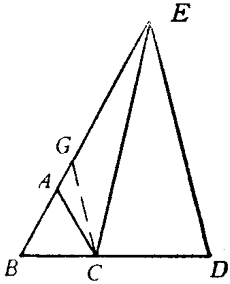
$\because\quad \angle ECD=60°+\angle AEC$，

$\angle EDC=\angle GCB$

$=60°+\angle ACG$.

$\therefore\quad \angle ECD=\angle EDC$.

因此 $EC=ED$.



（1题(3)图）

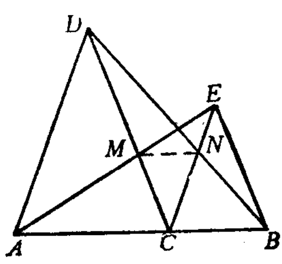
2. C是线段AB上任意一点，$\triangle ADC$与$\triangle CEB$是分别以AC、BC为底边而顶角相等的两个等腰三角形。M是AE与CD的交点，N是BD与CE的交点。求证 $CM=CN$.

证一 $\because$ 两等腰三角形的顶角相等，$\therefore$ 这两个等腰三角形的底角也相等。于是，

$DA\parallel EC$，$DC\parallel EB$，

$$\therefore\quad \frac{EM}{MA}=\frac{EC}{DA}=\frac{EB}{DC}=\frac{EN}{NC}.$$

由此可得$MN\parallel AC$.



（2 题图）

∴ $\angle CNM=\angle ECB=\angle DCA=\angle CMN$，

因此，$CM=CN$。

证二 由$DA\parallel EC$，得$\dfrac{CN}{DA}=\dfrac{BC}{AB}$，

又由$DC\parallel EB$，得$\dfrac{CM}{EB}=\dfrac{AC}{AB}$；

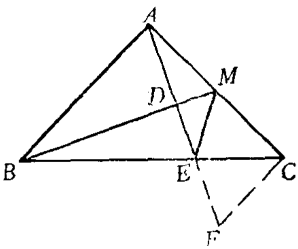
相除，得$\dfrac{CM}{CN}=\dfrac{EB\cdot AC}{BC\cdot DA}$。

由$\triangle DAC\backsim\triangle EBC$，得$DA:AC=EB:BC$；

因此，$EB\cdot AC=BC\cdot DA$，故 $\dfrac{CM}{CN}=1$，

即 $CM=CN$。

3. $\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=90°$，M为AC中点。过A作BM的垂线，分别交BM、BC于D、E。求证$\angle AMB=\angle CME$。



（3 题(1)图）

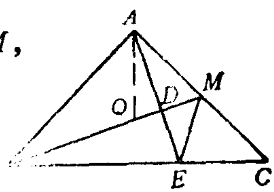
证一 如图，过C作$CF\perp AC$交AE的延长线于F。

∵ $\angle CAF=90°-\angle BAD$
$=\angle ABM$，$AC=BA$，

∴ 直角$\triangle CAF\cong$直角$\triangle ABM$，

$\angle AMB=\angle CFA$，

且 $CF=AM=CM$。



（3 题(2)图）

在$\triangle CME$与$\triangle CFE$中，由$CM=CF$，$\angle MCE=45°=\angle FCE$，及$CE$公用，得

$\triangle CME \cong \triangle CFE$，∴ $\angle CFE = \angle CME$。

于是，得 $\angle AMB = \angle CME$。

证二 作$\angle A$的平分线，交BM于Q。先证

$\triangle ABQ \cong \triangle CAE$（$a$、$s$、$a$），得到$AQ = CE$。

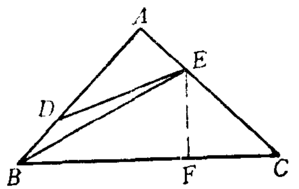
再证$\triangle AMQ \cong \triangle CME$（$s$、$a$、$s$），得到

$\angle AMQ = \angle CME$，即$\angle AMB = \angle CME$。

4. $\triangle ABC$中，$AB = AC$，$\angle A = 90°$。在AB上取一点D，在AC上取一点E，使$BD = \frac{1}{3}AB$，$AE = \frac{1}{3}AC$。

求证 $\angle ADE = \angle CBE$。

证一 如图，作$EF \perp BC$交BC于F，则 $EF = FC$。



（4 题图）

$$\because \quad EF = \frac{CE}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}AC\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}BC\right) = \frac{1}{3}BC.$$

$$\therefore \quad BF = \frac{2}{3}BC, \qquad \frac{EF}{BF} = \frac{1}{2} = \frac{EA}{DA},$$

于是 直角$\triangle EFB \backsim$直角$\triangle EAD$,

∴ $\angle ADE = \angle CBE$。

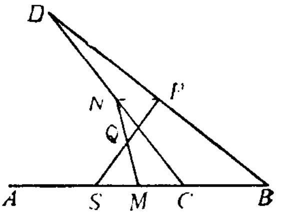
证二 $\text{tg}\angle CBE = \text{tg}(45° - \angle ABE)$

$$= \frac{1 - \text{tg}\angle ABE}{1 + 1 \cdot \text{tg}\angle ABE} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} = \mathrm{tg}\angle ADE,$$

$\because$ $\angle ADE$与$\angle CBE$都是锐角，

$\therefore$ $\angle ADE = \angle CBE$。



（5 题图）

5. 已知M是线段AB的中点，从AB上另一点C引线段CD，设CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q，

求证 直线PQ平分线段AC。

证 设PQ与AC的交点为S，因此本题要证 $AS = SC$。

$\because$ NP是$\triangle DCB$的中位线，

$\therefore$ $NP /\!/ CB$（就是$NP /\!/ AB$），且 $NP = \frac{1}{2}CB$。

$\because$ Q为MN的中点（即$NQ = QM$），$NP /\!/ AB$，
即$NP /\!/ SM$，

$\therefore$ 可以推得$\triangle QPN \cong \triangle QSM$，从而$NP = SM$。

$\therefore$ $SM = \frac{1}{2}CB$。

从图上看出，$AS = AM - SM$；

$\because$ $AM = \frac{1}{2}AB$, $\qquad SM = \frac{1}{2}CB$,

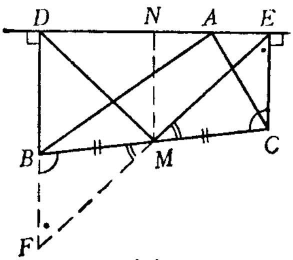
$\therefore$ $AS = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(AB - CB) = \frac{1}{2}AC$。

但$AS + SC = AC$，$\therefore$ 由$AS = \frac{1}{2}AC$，得$AS = SC$。

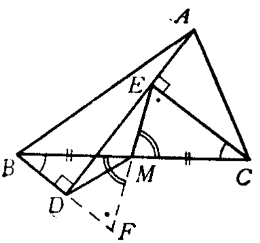
6. 经过$\triangle ABC$的顶点A，任作一直线AD；自B、C作AD的垂线BD、CE（D、E为垂足），M是BC的中点，求证　$MD=ME$。

证　本题中，AD是过A的任一直线，它的位置有两种可能：一是不通过$\triangle ABC$的内部（如图（1）），另一是通过$\triangle ABC$的内部（如图（2））。如果只就前一种情形而论，那么由于$DBCE$是梯形（$DB /\!/ EC$），只要作出它的中位线MN，就可由$MN\perp DE$而证得$\triangle MDE$是等腰三角形（即证得$MD=ME$）。但是，这样的证法对后一种情形不能适用（如第二图那样，$DBCE$不是通常的梯形）。

本题宜采用如下的证法。



（1）



（2）

（6　题图）

延长EM、DB相交于F。由M为BC的中点（即$MB=MC$）及$BF /\!/ CE$（从而，$\angle MBF=\angle MCE$、$\angle MFB=\angle MEC$），就可证得$\triangle MBF\cong\triangle MCE$。因此，$MF=ME$；也就是，$M$为直角三角形$EDF$的斜边$EF$的中点。$\therefore$　$MD=ME$。

7. $\triangle ABC$中，$AC=3AB$，$\angle A$的平分线AD交BC于D，$CE\perp AD$（垂足为E）；求证$AD=DE$。

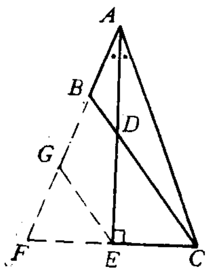
证一　延长AB、CE相交于F，就得到$\triangle AFC$为等腰

三角形；从而$FE=CE$，$AF=AC=3AB$，即$BF=2AB$。

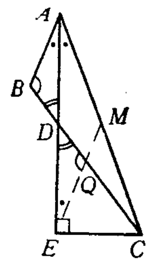
取BF的中点G，则GE为$\triangle BFC$的中位线；

$\therefore\quad GE\parallel BC$。

在$\triangle AGE$中，$AB=\frac{1}{2}BF=BG$，且$BD\parallel GE$，可见BD是$\triangle AGE$的中位线。$\therefore\quad D$为AE的中点；也就是，$AD=DE$。



(1)



(2)

（7　题图）

证二　在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle A$，

$\therefore\quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}$，也就是，$BD=\frac{1}{4}BC$。

取AC的中点M。$\because\quad AC$是直角三角形AEC的斜边，

$\therefore\quad ME=AM$，从而$\angle MEA=\angle MAE=\angle BAE$，

$\therefore\quad ME\parallel AB$。

在$\triangle ABC$中，M是AC的中点，且$MQ\parallel AB$，所以MQ是中位线（Q为ME和BC的交点）；因此，$BQ=QC=\frac{1}{2}BC$。

由$BD=\frac{1}{4}BC$，得到$DQ=\frac{1}{4}BC$；因而，$DQ=BD$。

$\therefore\quad \triangle ABD\cong\triangle EQD\ (a.s.a.)$；

$\therefore\quad AD=DE$。

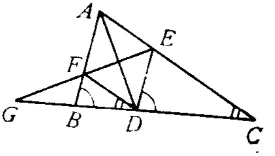
8. $\triangle ABC$中，$AC=2AB$，$\angle A$的平分线 AD交BC于D,自D分别引AB、AC的平行线,各交AC、AB于E、F。直线EF交CB的延长线于G。求证 $EF=FG$。

证一 $\because$ $DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$，

$\therefore$ $\angle EDC=\angle FBD$，$\angle C=\angle FDB$，

因此，$\triangle EDC \backsim \triangle FBD$，从而

$$\frac{EC}{FD}=\frac{DC}{BD}.$$



（8 题图）

又，AD为$\angle A$的平分线，且$AC=2\cdot AB$，

所以$BD:DC=AB:AC=1:2$。因此，得

$$\frac{FD}{EC}=\frac{1}{2}.$$

又由$FD \parallel EC$，得$\dfrac{GF}{GE}=\dfrac{FD}{EC}$，

所以 $GF=\dfrac{1}{2}GE$，也就是，F为EG的中点。

因此 $EF=FG$。

证二 $\because$ $DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$，

$\therefore$ $\dfrac{GB}{BD}=\dfrac{GF}{FE}=\dfrac{GD}{DC}$；

即 $GB:GD=BD:DC$。

$\because$ $BD:DC=AB:AC=1:2$，

$\therefore$ $\dfrac{GB}{GD}=\dfrac{1}{2}$，即$B$为$GD$的中点。

于是由$\dfrac{GB}{BD}=\dfrac{GF}{FE}$，得$GF=FE$。

9. 以正方形$ABCD$的边AD为直径在形内作半圆；以A为圆心，AD为半径在形内作$\overset{\frown}{BD}$（如图所示）。设P是半圆周上任意一点，延长AP交$\overset{\frown}{BD}$于Q。自Q作CD的垂线交CD于R。求证 $QP=QR$。

证一 连DP，则$DP\perp AP$。连DQ。

$\because$ $AD=AQ$，$\therefore$ $\angle PQD=\angle ADQ$。

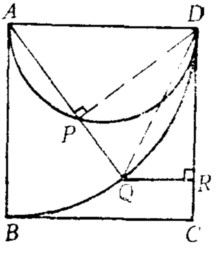
$\because$ $QR\parallel AD$，$\therefore$ $\angle ADQ=\angle RQD$。

于是得$\angle PQD=\angle RQD$。

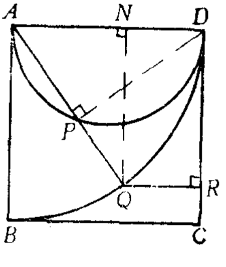
在直角三角形DPQ与直角三角形DRQ中，$\angle PQD=\angle RQD$，斜边DQ公用，

$\therefore$ 直角三角形$DPQ\cong$直角三角形DRQ，

$\therefore$ $QP=QR$。



（9 题(1)图）



（9 题(2)图）

证二 连DP，并作$QN\perp AD$（N为垂足）；由$AQ=AD$，直角三角形$ADP\cong$直角三角形AQN，得$AP=AN$，$QP=DN$。

$\because$ $QRDN$为矩形，$\therefore$ $QR=ND$。

$\therefore$ $QP=QR$。

10。设O、H分别是$\triangle ABC$的外心和垂心，在AB上取$AD=AH$，在AC上取$AE=AO$，求证 $DE=AE$。

证 过B作$\triangle ABC$外接圆的直径BF，连CF、CO。

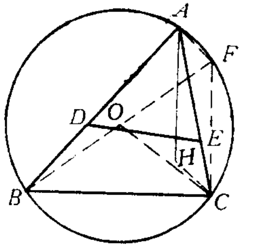
$\because$ AH与FC同垂直于BC，

$\therefore$ $AH \parallel FC$。

$\because$ CH与FA同垂直于AB，

$\therefore$ $FA \parallel CH$。

于是，$AHCF$为平行四边形，从而$CF = AH = AD$。



（10 题图）

在$\triangle ADE$与$\triangle FCO$中，

$AD = FC$， $FO = AO = AE$，

且 $\angle DAE = \angle CFO$，$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle FCO$，

$\therefore$ $DE = CO = AE$。

11. 过圆外一点P作圆的割线PBC及切线PA，A为切点。过C作$CD \parallel AP$交圆周于D，连PD交圆周于E。连EB，并延长交AP于M。

求证 $MA = MP$。

证 $\because$ $\triangle MPB$与$\triangle MEP$中，

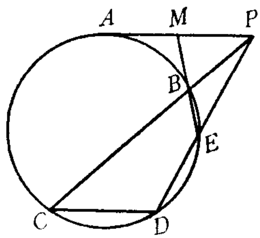
$\angle PMB = \angle EMP$。

又$\because$ $MP \parallel CD$，

$\angle MPB = \angle BCD$；

$BCDE$为圆内接四边形，

$\angle BCD = \angle MEP$。



（11 题图）

$\therefore$ $\angle MPB = \angle MEP$。于是$\triangle MPB \backsim \triangle MEP$，

从而 $MP^2 = MB \cdot ME = MA^2$，即 $MA = MP$。

12. 自$\triangle ABC$外接圆上任一点P作三条弦PA'、PB'、PC'，使它们分别平行于BC、CA、AB。求证

$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$。

证 $\because$ $PC' \parallel AB$，$\therefore$ $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{PB}$。

又∵ $PA' \parallel BC$，

∴ $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{A'C}$。

于是 $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{A'C}$，因而

$\overset{\frown}{AC'} + \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{A'C}$，

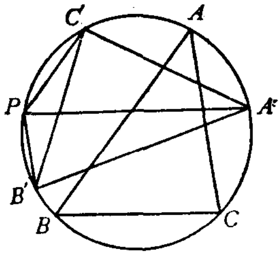
即 $\overset{\frown}{A'C'} = \overset{\frown}{AC}$。

∴ $\angle A'B'C' = \angle ABC$，

且$A'C' = AC$。

又，$PB' \parallel AC$，

∴ $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{B'C}$。



（12 题图）

而$\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PC'} + \overset{\frown}{C'A} = \overset{\frown}{PC'} + \overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{C'B} = \overset{\frown}{C'B'} + \overset{\frown}{B'B}$；

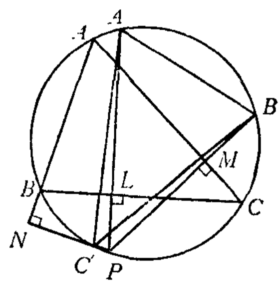
$\overset{\frown}{B'C} = \overset{\frown}{B'B} + \overset{\frown}{BC}$， ∴ $\overset{\frown}{B'C'} = \overset{\frown}{BC}$。

于是$\angle B'A'C' = \angle BAC$，且$B'C' = BC$。

因此，$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$。

13。自$\triangle ABC$外接圆上任一点P，分别作BC、CA、AB的垂线交三边于L、M、N，交圆周于A'、B'、C'。

求证 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$。



（13 题图）

证 ∵ L、P、C、M四点共圆，

∴ $\angle MCL = \angle MPL$。

而$\angle MCL = \angle ACB$，

$\angle MPL = \angle B'C'A'$，

∴ $\angle ACB = \angle A'C'B'$，

且 $AB = A'B'$，

又 ∵ $\angle NAM + \angle NPM = 180°$，

$\angle C'A'B' + \angle C'PB' = 180°$，

∴ $\angle C'A'B' = \angle CAB$，