高等学校教材

汽轮发电机组扭振

西安交通大学 刘英哲
东南大学 傅行军
合编

高 等 学 校 教 材

汽轮发电机组扭振

西安交通大学 刘英哲
东 南 大 学 傅行军 合编

中国电力出版社

内 容 提 要

本书主要讲述汽轮发电机组扭振问题。绪论部分阐述汽轮发电机组扭振问题的产生、研究现状和展望；第一章讨论简单扭振系统的扭转振动；第二章阐述汽轮发电机组固有扭振频率的多种计算方法；第三章简述汽轮发电机组扭振时强度方面的计算；第四章论述机电扰动下轴系的扭振；第五章叙述扭振测试分析与监测；第六章论述预防和抑制轴系扭振的措施和对策。

本书可作为电厂热能动力专业本科生选修课教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CUP）数据

汽轮发电机组扭振/刘英哲，傅行军编，—北京：中国电力出版社，1997

高等学校教材

ISBN 7-80125-304-3

Ⅰ.汽… Ⅱ.①刘…②傅… Ⅲ.汽轮发电机组-振动，扭振-高等学校-教材 Ⅳ.TM311.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 04599 号

中国电力出版社出版

（北京三里河路 6 号 邮政编码 100044）

三河市水利局印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

*

1997 年 10 月第一版 1997 年 10 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 8.625 印张 192 千字 1 插页

印数 0001—1000 册 定价 8.50 元

前　　言

本书是根据原能源部《1993～1995年高等学校教材编审出版计划》，由西安交通大学和东南大学两校在原有讲义的基础上修改补充合编而成的。

本书是电厂热能动力工程专业本科生选修课教材，包括绪论部分和六章内容。绪论和第一至三章由西安交通大学刘英哲教授编写，第四至六章由东南大学傅行军副教授编写。各部分内容经过作者的意见交流。全书由刘英哲教授统稿。

在本书编写过程中，得到了热动类专业委员会副主任、汽轮机教学指导组组长、东南大学教授曹祖庆的关心和支持，以及康松教授的大力帮助，在此表示深切感谢。

西安交通大学孟庆集教授、李光琦教授认真评阅了部分书稿，并给予热诚帮助；本书从王乐天、盛颂恩、鲁周勋诸博士的论文中撷取了有关内容，在此深表感谢。

本书在编写过程中还得到了许多兄弟院校老师和同志的热心帮助，在此深致谢意。

华北电力大学张保衡教授对全书稿做了精心慎重的审阅，提出了许多宝贵意见，使本书得以更加完善，特致感谢之忱。

限于作者的水平，书中不当及错误之处，衷心欢迎读者批评指正。

编　者

1996年8月

目　　录

绪　论

轴和轮盘的扭转振动研究很久以来是弹性力学和振动学的内容[2,4]，应用到动力机方面，曾主要是往复式动力机，如内燃机[25]。

由于汽轮机组没有往复运动部件旋转，所以长期以来主要关心的是它的弯曲振动，对于机组扭转振动未引起足够的注意。

到了本世纪 50 年代至 60 年代，汽轮发电机组的功率迅猛增长，轴系变得相对细长，汽轮发电机组的扭转振动问题提到了日程上来。60 年代末、70 年代初，国外发生了几起大型汽轮发电机组的重大破坏事故，从而引起对扭转问题的重视和研究[16]。

1970 年 12 月，美国 Mohave 电站一号机组（300MW）在发电机与励磁机连接处发生大轴破坏事故。修复后，在 1971 年又再次损坏。这很快引起人们对具有串联电容补偿的输电系统中次同步共振问题的广泛注意，有关研究涉及到轴系、发电机和电网之间的相互作用。各种电气故障引起的对轴系扭振的干涉也逐渐得到研究[16]。机电耦合的扭振是大型汽轮发电机组扭振的一个显著特点。

在国内，1985 年 10 月，一台 200MW 机组发生了断轴事故，大轴断成数段。在事故的分析讨论中，怀疑到有扭振问题的作用，从而在国内引起对机组扭振问题的广泛重视。当然，对问题的具体分析是从各方面进行的。例如参考文献［31］就是从这台汽轮机调速系统油口尺寸变更对控制进汽量关系方面进行分析的。

80 年代后期和 90 年代初，我国许多研究单位和高等学校，大力开展了这方面的研究，有上海发电设备成套研究所、电力工业部热工研究院、东南大学、西安交通大学、华北电力大学、华中理工大学等。

1989 年，西安热工研究所出版了《汽轮发电机组扭振研究译文集》，可以作为对机组扭振问题重视程度的标志之一。

各研究单位及高校进行了理论研究、测试仪器制作、实验台建立和实机测试等工作。各方面技术力量开展工作，无疑对现在我国电力系统中预防因扭振引起事故的发生起到很大的作用。

电力系统在迅速扩大发展中，单机容量也在不断提高，各种故障情况远未得到充分的研究和解决。所以，从理论和试验研究，到设计、制造、运行，都还需要做大量工作。这些工作包括：

（1）对汽轮发电机组固有扭振频率的计算方法的更进一步的研究。

（2）大轴承对扭振主动阻尼的研究。

（3）扭振如何主动平衡抵消的方法。

（4）各种电气故障对各具体机组影响的研究。

（5）高效能调速系统。快控高、中压汽门已于 1991 年左右在我国某厂 300MW 机组进

行了测试。现在许多单位对这类机组的试验正在准备进行中。

（6）发电机抑制扭振的自动控制方面的研究。

（7）整个电力系统对机、电耦合扭振相互作用的研究。对此，电气方面的学者和研究人员也提出其必要性。参考文献［32］中对一个国家的电网进行了这方面的研究。

当然还会有其他方面新的研究课题。

可以预计，对汽轮发电机组扭振问题的理论及实验研究，将是方兴未艾的，并将取得很大的成就。

第一章　简单扭振系统的扭转振动

第一节　汽轮发电机组扭转振动产生的原因

汽轮机带动发电机或其他从动机工作，在负荷稳定时，通过汽轮机的蒸汽所作的功产生有效力矩，与外界负荷的阻力矩互相平衡。这时，汽轮发电机的轴系处于一定的扭转变形状态，也就是说，相对于轴不受任何扭矩时，沿轴长有一定的扭转角的分布。此扭转角是传递扭矩所产生的结果。

由于汽轮发电机轴是一个弹性体，当扭矩平衡受到干扰时，就会引起轴的扭转振动。在扭矩平衡受到破坏时，汽轮机的调节系统力图迅速调整进入汽轮机的新汽的数量和质量，以求恢复平衡，从而保持稳定的转速及功率的平衡。这个调节过程将使轴系产生一个扭转振动的过程。

正常运行中的负荷变动以及甩负荷，都会干扰扭矩的平衡。当发电机输出线路上发生接地故障时，由于机电暂态过程的作用，对汽轮发电机主轴产生某种频率的外加扭矩。如果这一激励扭矩的频率和主轴的一个固有扭振频率合拍而产生共振，就会使主轴的扭振振幅迅速增大，从而导致主轴的剪切损坏。这种共振现象同样适合于一般振动规律，与讨论汽轮发电机主轴的弯曲振动时的情况一样。

近 30 年来，汽轮机的功率迅速增大，同时，蒸汽初参数有很大的提高，轴系变得相对细长（图 1-1，见文后插页）。取单轴汽轮机的总长为 l，取汽轮机和发电机之间的联轴节螺栓节径为 d_c，用 l/d_c 表示轴系细长变化情况，可以看到，N12-35 型汽轮机的 l/d_c 值为 11 左右，而图 1-1 所示的 N300-16.7/537/537 型汽轮机的 l/d_c 值是 51 左右。对轴的强度需要予以足够的重视，对主轴的扭转强迫振动引起的剪切应力也需要更加注意。因此，对汽轮发电机组的扭转振动问题应予以足够的重视，以避免因主轴扭转振动产生破坏对国民经济可能造成的重大损失。国内外在 1969 年到 1988 年间发生了 30 多起因扭转振动造成的事故，其中包括单机容量为 50MW 以上的火电机组和 900MW 以上的核电机组。

关于轴的扭转振动的研究，在工程上已有了许多年的历史，尤其在内燃机等往复式机器方面[25]。这些都是可以借鉴的。

由以上所提到的扭转振动产生的原因可以知道，为了避免产生汽轮发电机组轴系的扭转振动共振，首先要计算出转子的固有扭振频率。

汽轮机主轴通过减速器带动发电机或通过齿轮装置带动调速器时，也会产生干扰力矩，这些均应在设计主轴和转子时加以考虑。

第二节　简单扭转振动系统的固有扭转振动频率

图 1-2 表示一个简单的扭振系统。圆轴的上端固定于 A。圆轴的扭转刚度为 k。圆轴下端在 B 处固装有一个转动惯量为 I 的轮盘。M 表示使轴下端转动一弧度扭转角所需的扭矩。不考虑轴的质量。施加扭矩于轮盘，使轮盘从不受扭矩作用的平衡位置转过一角度。扭矩释放后，此轮盘和轴的系统将产生扭转振动。不计材料内部阻尼和空气摩擦等作用，求这一系统的固有扭转振动频率。

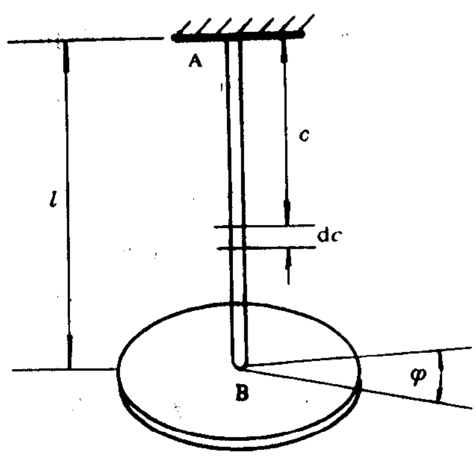

图 1-2　简单扭振系统

轮盘在任何时刻的位置可用平衡时轮盘上某一半径的位置和轮盘上这一半径在某一时刻的位置之间的夹角 φ 来表示（图 1-2）。

将牛顿第二定律用到旋转系统，得到

$$I\ddot{\varphi} = \Sigma M \tag{1-1}$$

式中，ΣM 为合外部转矩。在求此扭转振动系统的固有扭振频率时，M 仅为轴的扭转刚度值所提供的力矩 $k\varphi$ 而方向相反。因此可得

$$I\ddot{\varphi} = -k\varphi \tag{1-2}$$

移项后可得

$$I\ddot{\varphi} + k\varphi = 0 \tag{1-3}$$

这个二阶常微分方程可改写为

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi = 0 \tag{1-4}$$

式中，$p^2 = k/I$。

这一微分方程的解为

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt + \frac{\dot{\varphi}_0}{p}\sin pt \tag{1-5}$$

式中，φ_0 为时间 $t=0$ 时的起始扭转角，$\dot{\varphi}_0$ 为 $t=0$ 时的初始角速度。如在开始时刻系统处于静止状态，则 $\dot{\varphi}_0=0$。

式（1-5）表示此系统将具有周期性的扭转振动。其周期 τ 为

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \tag{1-6}$$

其固有扭振频率 f 为

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}} \tag{1-7}$$

以上求固有扭振频率的公式也可以从功能守恒关系得到。由于不在共振时，阻尼对自振频率的影响往往较小，忽略其影响，所以系统的动能 T 和势能 U 之和是守恒的，即

$$T + U = 常数 \tag{1-8}$$

在扭转角达到最大时，势能 U 为最大值 U_{max}，系统转动动能为零。而在系统通过平衡位置时，转动动能达到最大值 T_{max}，而系统的势能为零。因为系统是保守的，故可得

$$T_{max} = U_{max} \tag{1-9}$$

由上述，当扭转初角速度为零时，系统的运动方程可由下式表示

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt$$

则

$$U_{max} = \frac{1}{2}k\varphi_{max}^2 = \frac{1}{2}k\varphi_0^2 \tag{1-10}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_{max}^2 = \frac{1}{2}Ip^2\varphi_0^2 \tag{1-11}$$

代以上二式于式（1-9），可以得到

$$p^2 = \frac{k}{I} \tag{1-12}$$

亦即

$$p = \sqrt{\frac{k}{I}} \tag{1-13}$$

于是又可以得到式（1-6）和式（1-7）。

利用拉格朗日方程式也可容易地得出式(1-3)。在只有有势的广义力时，拉格朗日方程式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-14}$$

式中，T 为系统的动能，对于图 1-2 的简单系统，$T=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$，$V$ 为系统的势能，$V=\frac{1}{2}k\varphi^2=U$，$q_r$ 为广义坐标，这里 $q=\varphi$。将以上表示式代入式（1-14），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I\dot{\varphi} - 0 + k\varphi = 0$$

即为式（1-3）

$$I\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$$

式（1-3）也可利用哈密顿正则方程求出。此正则方程如下[1]：

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad , \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-15}$$

式中，p_s 为广义动量，$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$；$q_s$ 为广义坐标；“$\cdot$”表示对时间 t 求导；H 为哈密顿函数，其表示式为

$$H = -L + \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s \tag{1-16}$$

式中，$L=T-V$ 为拉格朗日函数。对于完整稳定的保守系统，则

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = 2T \tag{1-17}$$

将式（1-17）代入式（1-16），得到

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V \tag{1-18}$$

对于所讨论的简单扭振系统（图 1-2），则

$$p_s = I\dot{\varphi}, \qquad q_s = \varphi, \quad 且\ s = 1$$

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2, \quad V = \frac{1}{2}k\varphi^2 \tag{1-19}$$

将式（1-19）各值代入式（1-5）的第二式，可得式（1-3）

$$I\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$$

在式（1-3）中，圆盘的转动惯量考虑为常数，未考虑轴的质量，也未考虑阻尼的影响，故系统是理想化了的。但是它具有理论上的价值，能够说明系统内部特性参数的决定性影响。也就是系统的扭转固有振动频率为转动惯量 I 和轴的扭转刚度 k 的比值所决定。I 大时频率低，k 大时频率高，合乎人们的日常感性认识。

在图 1-2 中，轴设为直径沿长度不变的圆轴。如果圆轴由两段直径不同的轴段组成，一段直径为 d_1，长度为 l_1，另一段直径为 d_2，长度为 l_2，则这一两段组成的轴可化为直径为 d_1 或 d_2 的当量轴。当量长度 L 可如下求出。

如果在轴的下端施加扭矩 M_e，设两段轴的材料相同，其剪切模量为 G，则扭角 φ 为

$$\varphi = \frac{M_e l_1}{J_1 G} + \frac{M_e l_2}{J_2 G} \tag{1-20}$$

式中，$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32}$，$J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32}$，分别为第一段轴和第二段轴各自断面的极惯性矩。代入式（1-20）后，得到

$$\varphi = \frac{32M_e l_1}{\pi d_1^4 G} + \frac{32M_e l_2}{\pi d_2^4 G} = \frac{32M_e}{\pi d_1^4 G}\left(l_1 + l_2\frac{d_1^4}{d_2^4}\right) \tag{1-21}$$

由此可求出此轴的当量长度为（以 d_1 直径为准）

$$L = l_1 + l_2\frac{d_1^4}{d_2^4} \tag{1-22}$$

如轴由若干段不同的直径段组成时，也可用同样的办法处理。

在求出当量长度后，可以求出具有此当量长度的等直径轴的抗扭刚度值 k。它的意义是等直径轴扭转单位角度所需的扭矩。可以证明，只要 k 值和原轴情况相同，则扭转振动固有频率值也相同。简证如下：

对于当量长度的轴，由轴的抗扭刚度定义可直接写出：

$$k = \frac{\pi d_1^4 G}{32L_1} \tag{1-23}$$

式中，L_1 代表以 d_1 直径为基准的当量长度。上式展开为

$$k = \frac{\pi d_1^4 G}{32\left(l_1 + l_2\frac{d_1^4}{d_2^4}\right)} = \frac{\pi d_1^4 d_2^4 G}{32(l_1 d_2^4 + l_2 d_1^4)} \tag{1-24}$$

如果将轴看作两段，则每段的抗扭刚度分别为

$$k_1 = \frac{\pi d_1^4 G}{32l_1}, \quad k_2 = \frac{\pi d_2^4 G}{32l_2} \tag{1-25}$$

这相当于求两只串连弹簧的刚度。可以得到

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2} \tag{1-26}$$

代入 k_1 和 k_2 之值，即可得到

$$k=\frac{\pi G}{32}\left(\frac{1}{l_1/d_1^4+l_2/d_2^4}\right)=\frac{\pi G}{32}\left(\frac{d_1^4 d_2^4}{l_1 d_2^4+l_2 d_1^4}\right)$$

上式与式（1-24）相同。由此可知，当量长度不影响频率。这在处理多段不同直径的轴时有一定的方便。

在图 1-2 中，如果考虑轴有一定质量和转动惯量，它就会降低这一系统的固有扭振频率值。对这一影响可如下近似予以考虑。

设轴的直径不变。用 i 表示轴单位长度的转动惯量。则 dc 微元长度的转动惯量为 idc（图 1-2）。这一微元在振动时的动能为[2]

$$\frac{i\mathrm{d}c}{2}\left(\frac{c\dot{\varphi}}{l}\right)^2$$

轴的整个长度 l 在扭振时的动能为

$$\frac{i}{2}\int_0^l\left(\frac{c\dot{\varphi}}{l}\right)^2\mathrm{d}c=\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\,\frac{il}{3} \tag{1-27}$$

这一部分动能可以加到轮盘的动能上，得到整个系统的动能为

$$I+\frac{il}{3}$$

用它来代替 I 代入式（1-7），就可以求出考虑轴的质量影响下系统的固有扭振频率。也就是在图 1-2 的情况下，将轴的转动惯量的 1/3 加到轮盘上就可以近似求出固有扭振频率 f。

图 1-2 所示的系统不太可能用于动力机械系统，但其固定的一端可认为是具有无限大的转动惯量，故其角位移可视为零。当它不是无限大时，就可以作为实际动力机械的简单模型了。比如一个单转子的汽轮机带动一台发电机就可以化为如图 1-3 所示的在一个轴的两端各具有一个轮盘的系统。

不考虑轴承等处的阻尼影响，求此系统的固有扭振频率[2]。

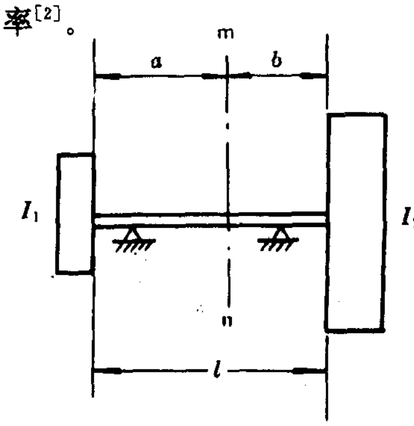

图 1-3　一个轴的两端各具有一个轮盘的系统

首先注意到，此系统无论在静止或转动工作状态均不影响其自振频率之值。

其次，要产生扭转振动，轴两端的轮盘上必作用有大小相等、方向相反的扭矩。因此，在轴的某一断面 mn 处，扭矩为零，没有产生角位移。这一断面称为节点断面，它距两端的距离分别以 a 和 b 表示。

区分开的两段在作扭转振动时，必然方向相反，且频率相同。这是由系统的动量矩守恒所决定的。用 k_1 和 k_2 分别表示两段轴的扭转刚度。由扭振频率相等可得

$$\sqrt{I_1/k_1}=\sqrt{I_2/k_2} \tag{1-28}$$

由此可得

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{I_1}{I_2}=\frac{b}{a} \tag{1-29}$$

再和 $a+b=l$ 联立，可解出

$$a=\frac{lI_2}{I_1+I_2} \qquad b=\frac{lI_1}{I_1+I_2} \tag{1-30}$$

由以上可得出扭振周期和固有扭振频率为

$$\tau=2\pi\sqrt{I_1/k_1}=2\pi\sqrt{\frac{32lI_1I_2}{\pi d^4G(I_1+I_2)}} \tag{1-31}$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4G(I_1+I_2)}{32lI_1I_2}} \tag{1-32}$$

如果将本系统的两个轮盘分别看作汽轮机转子和发电机转子且其间有联轴节，则看来将联轴节置于节点断面 mn 处似乎是合适的，至少运动速度或可小些，可以减轻联轴节处螺栓产生断裂的机会。

例 1-1 设有一实轴，直径 $d=100$mm，材料为 45 号钢，长度 $l=2$m，材料剪切模量 $G=80\times10^9$N/m²。此轴一端固定，另一自由端施加的最大扭矩为 $M=2\times10^3$N·m。已知该轴的许用剪应力 $[\tau]=60$MPa。试求该轴的抗扭刚度 k，并校核该轴的强度。

解 该轴的抗扭刚度为

$$k=\frac{\pi d^4G}{32l}=\frac{\pi\times0.1^4\times80\times10^4}{32\times2}=392700(\text{N}\cdot\text{m/rad})$$

现校核该轴的强度。最大剪应力公式为

$$\tau_{\max}=\frac{MR}{J_p}$$

式中，最大半径 $R=0.05$m，轴断面的极惯性矩 J_p 为

$$J_p=\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi\times0.1^4}{32}=0.000009817(\text{m}^4)$$

代入上式得

$$\tau_{\max}=\frac{2\times10^3\times0.05}{0.000009817}=10186000(\text{N/m}^2)$$

$$=10.186\text{MPa}<60\text{MPa}$$

故轴的强度是足够的。

该轴全长上的扭转角 φ 为

$$\varphi=\frac{M}{k}=\frac{2\times10^3}{392700}=0.005093(\text{rad})$$

$$=0.2918(^\circ)$$

单位长度的扭转角 θ 为

$$\theta=\varphi/l=\frac{0.2918}{2}=0.1459[(^\circ)/\text{m}]$$

此值小于一般传动轴通常允许的 $[\theta]=0.5\sim1.0$ (°) /m，也小于对于精密机械的轴的允许值 $[\theta]=0.15\sim0.50$ (°) /m，所以是安全的。

例 1-2 在上例的轴的自由端，如装有转动惯量 $I=10000\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 的转子，求此系统的固有扭振频率和周期。又如轴的固定端可允许转动，则此系统的弯曲固有振动频率是多少？已知材料的弹性模量 $E=200\times10^9\text{N/m}^2$。

解 由式 (1-6) 和式 (1-7) 可求得扭转振动周期和固有扭振频率为

$$\tau=2\pi\sqrt{I/k}=2\pi\sqrt{\frac{10000}{39270}}=1.003(\text{s})$$

故频率 f 为

$$f=1/\tau=0.9974(\text{s}^{-1})$$

设此转子的直径为 1m。由 $I=\frac{1}{2}mr^2$ 可得转子的质量为

$$m=2I/r^2=2\times10000/0.5^2=80000\text{kg}$$

这一系统的弹簧常数 C 可由悬臂梁的变形公式求得为

$$C=\frac{3EJ}{l^3}=\frac{3\times200\times10^9\times\frac{\pi\times0.1^4}{64}}{2^3}=368156(\text{N/m})$$

由以上各值可求得弯曲振动周期为

$$\tau=2\pi\sqrt{m/C}=2\pi\sqrt{\frac{80000}{368156}}=2.93(\text{s})$$

由此可得弯曲固有振动频率为

$$f=1/\tau=\frac{1}{2.93}=0.341(\text{s}^{-1})$$

这也就是这一系统对弯曲振动而言的临界转速的频率。由以上对扭转振动和弯曲振动两个自振频率的值可见，二者可相差甚多，所以应分别考虑它们可能产生共振的激振频率。

例 1-3 如图 1-3 所示的系统，轴两端各固定一等厚度的轮盘，其质量分别为 $m_1=500\text{kg}$，$m_2=1000\text{kg}$。其外径分别为 $D_1=1.2\text{m}$，$D_2=1.8\text{m}$。轴的直径 $d=10\text{cm}$。轴的长度 $l=3\text{m}$。轴材料的剪切模量为 $G=80\times10^9\text{N/m}^2$。求此系统的节点截面位置和固有扭振频率。

解 由式 (1-29) 可求出节点截面距较小轮盘的距离 a 为

$$a=\frac{lI_2}{I_1+I_2}=\frac{3\times\frac{1}{2}\times1000\times0.9^2}{\frac{1}{2}\times500\times0.6^2+\frac{1}{2}\times1000\times0.9^2}=2.4545(\text{m})$$

由式 (1-32) 可求出固有扭振频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4G(I_1+I_2)}{32lI_1I_2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi\times0.1^4\times80\times10^9\times\frac{1}{2}(500\times0.6^2+1000\times0.9^2)}{32\times3\times\frac{1}{2}\times500\times0.6^2\times\frac{1}{2}\times1000\times0.9^2}}$$

$$= 9.49(\mathrm{s}^{-1})$$

例 1-4 在上例中，如轴的一段的直径从 10cm 增加到 20cm，此段的长度为 2m。求此时的固有扭振频率为原来的多少倍？

解 直径未改变的一段的长度 $l_1 = 1\mathrm{m}$。由式（1-22）可求出轴的当量长度 L 为

$$L = l_1 + l_2 \frac{d_1^4}{d_2^4} = 1 + 2 \times \frac{10^4}{20^4} = 1.125(\mathrm{m})$$

由式（1-32）知，固有扭振频率和轴长度的平方根成反比。故知现在情况下的固有扭振频率为原来数值的 $\sqrt{\dfrac{3}{1.125}} = 1.633$ 倍。

第二章　汽轮发电机组固有扭振频率的计算

汽轮发电机组的固有扭振频率是分析机组轴系扭转振动的基础。知道了固有扭振频率，对于强迫扭振及其共振的可能性才能进行判断和分析。在本章中将先叙述多轮盘转子固有扭振频率的求解方法，并将给出圆形断面等直径连续分布质量轴扭振的严格解。这对于理解转子轴扭振是有意义的。此后再考虑扭振的实用计算方法。

第一节　多轮盘转子的固有扭振频率

大型汽轮发电机组具有多个汽轮机转子及发电机转子。汽轮机转子可以有轮盘套装式、整锻转子及焊接轮盘转子的结构，一般不宜简化为第一章中所述的简单扭振系统模型。这时可将各段质量离散化。如果忽略各轴段的质量，则可近似以图 2-1 所示的多个轮盘系统模型表示。这一系统可以包括发电机、励磁机等。

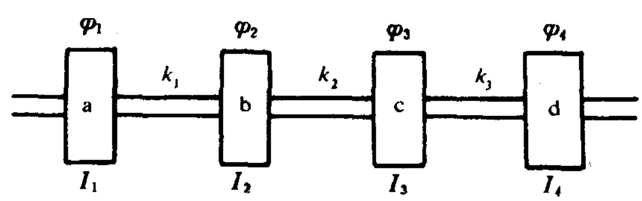

图 2-1　多轮盘转子固有扭振频率

用 I_1、I_2、I_3、……等代表各轮盘绕轴中心线转动的转动惯量；φ_1、φ_2、φ_3 代表振动时各轮盘的转角；k_1、k_2、k_3……代表各轴段 ab、bc、cd……的扭转弹簧常数。这个模型可以更接近实际情况。对图 2-1 所示的系统的各个轮盘，可以得到其运动微分方程如下[2]：

$$\left.\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ I_2\ddot{\varphi}_2 - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \\ I_3\ddot{\varphi}_3 - k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + k_3(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0 \\ &\vdots \\ I_{n-1}\ddot{\varphi}_{n-1} - k_{n-2}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + k_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \\ I_n\ddot{\varphi}_n - k_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}1)$$

将以上各式相加得到

$$I_1\ddot{\varphi}_1 + I_2\ddot{\varphi}_2 + \cdots + I_n\ddot{\varphi}_n = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

上式意味着轴系统在自由扭转振动时动量矩不变。方程式（2-2）有一个明显的解为

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3 = \cdots = \ddot{\varphi}_n = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

这相应于轴系作为刚体以恒定角速度转动的情况。

由于各轮盘的固有振动周期应当一样，才不违反动量矩守恒（不计阻尼），故而可设方程组（2-1）的解为