

87.10.07
RJC
14

公路工程参考资料

第十四輯

人民交通出版社

公路工程参考資料

(第十四輯)

人民交通出版社

本輯系有关鋼筋混凝土箱形薄壁梁橋的計算与試驗的專輯。內容主要为：开口及閉口薄壁杆件的計算理論，以及箱梁的計算例題和裝配簡支梁橋的立體計算例題等；此外，还介紹了一座四棧橋的模型試驗。

本書可供桥梁工程技術人員、科研工作者及有关院校的師生閱讀參考。

公 路 工 程 参 考 資 料

(第 十 四 輯)

*

人 民 交 通 出 版 社 出 版

(北京安定門外和平里)

北京市書刊出版業營業許可証出字第〇〇六號

新华書店北京發行所發行 全國新华書店經售

人 民 交 通 出 版 社 印 刷 廠 印 刷

*

1965年6月北京第一版 1965年6月北京第一次印刷

開本：787×1092 $\frac{3}{32}$ 印張：5 $\frac{1}{2}$ 張 插頁1

全書：112,000字 印數：1—2,300冊

統一書號：15044·1497

定價(科六)：0.70元

目 录

开口薄壁杆件計算理論	吳明东 (1)
閉口薄壁杆件計算理論	吳明东 (17)
箱形薄壁梁計算例題	吳明东 (38)
装配簡支梁窄桥立体計算 (按开口截面刚性梁) 例題	史尔毅 (58)
閉口箱形薄壁梁桥的扭轉計算与应力分析	同济大学桥梁教研組 (范立础整理) (64)
箱形薄壁四綫桥模型試驗	張士鏗 (114)
变截面連續箱梁桥的立体应力分析.....	[日本] 小松定夫 (148)

开口薄壁杆件計算理論

吳明东

偏心荷载經常作用在桥梁结构中，因此结构不仅产生平面弯曲，而且还同时产生扭轉，根据力的叠加原理，可以将偏心荷载分化为两部分：一部分即豎向荷载作用在弯曲中心上，此部分使结构只产生弯曲，不发生扭轉；另一部分即外扭矩，其值等于荷载与該荷载到弯曲中心的距离的乘积；此外扭矩使结构产生扭轉，由于结构连杆的限制，使结构处于复杂受力状态——弯扭状态。

最后结构中的应力为以上两部分应力之和。

一、开口截面薄壁杆件的扭轉計算

为了說明理論的概念，試看工字型悬臂梁被外扭矩 L 扭轉的情形，在外扭矩的影响下，工字梁的翼緣板将产生相反的水平面上的弯曲。在未加扭矩前，位于同一橫截面上的平面内各点 a 、 b 、 c 受扭后将占有如图1-1所示的位置，它們已不再

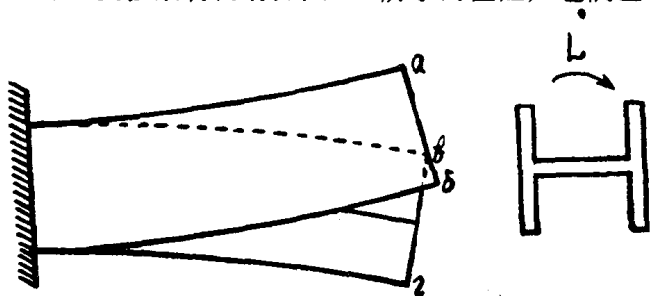


图 1-1

在同一平面。平面已經翹曲了。因該翹在懸臂端，橫截面可以自由的四凸（縱向），所以正應力為零。但是在固定端該翹曲受到了阻礙，因此引起了正應力。並且同時產生了為彎曲變形所具有的附加切應力。因為這些正應力和切應力都是由於杆件受扭後產生彎曲變形所引起的，由此分析得知，在所研究的杆件中存在著三種應力。其分布如下。

1) 自由扭轉產生的切應力 (τ_k)，其值可按材料力學一般公式計算，

$$\tau_k = \frac{M_k \cdot \delta}{J_k} \quad (1)$$

式中： M_k ——自由扭矩，其值尚屬未知；

J_k ——自由扭轉時的抗扭慣性矩 $J_k \approx \Sigma \alpha' b \delta^3$ ，係數 α 值決定於各矩形高寬之比；

δ ——被研究那一點處板的厚度。

2) 彎扭切應力 (τ_ω) 由於約束扭轉，杆件產生彎曲變形所引起的，它與彎扭正應力 (σ_ω) 相適應，其分布類似普通的彎曲切應力，該值可用儒拉夫斯基方法來計算，若以切力 Q 來表示，同時注意到切力 Q 構成力偶 $M_\omega = Q \cdot h$ 。此力偶我們稱為彎曲扭矩。

3) 彎扭正應力 (σ_ω)，由杆件受約束扭轉後，因橫截面凹凸，縱向纖維之伸縮受到阻礙時所產生的正應力。

以上所分析的現象稱為約束扭轉。因為橫截面上各點的縱向變形是被某些連杆所約束或限制的。由圖1-2a看出，自由扭轉產生的切應力，在截面厚度內其方向相反，所以沿截面中綫其切應力值為零，也就是說自由扭轉杆件的截面中央面上沒有剪切變形。實驗證明彎扭切應力 (τ_ω) 值不大，但因力臂 (h) 頗長，故由彎扭切應力所構成的彎扭力偶 (M_ω) 將會相當大。

因此，就可以假設：約束扭轉時，薄壁杆件截面的中央面上剪切變形為零。其次又假設：截面雖然產生縱向的凹凸，但其截面在平面上的投影仍保持不變，也就是說截面像剛性盤一樣，發生轉動。約束扭轉時薄壁杆件截面之外形不變，這一假設可用適當的條件或沿跨長設置一些隔板等構造措施來保證。

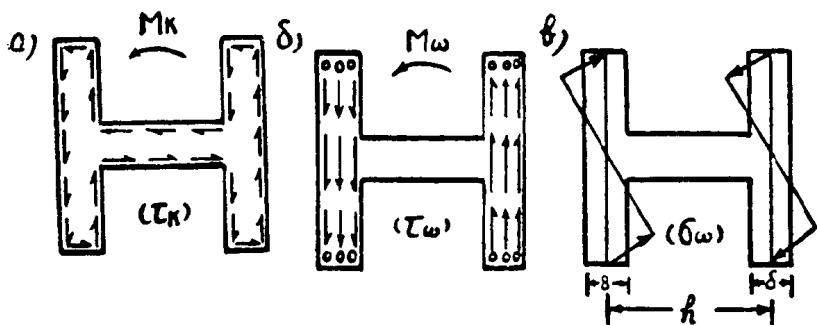


图 1-2

(一) 开口截面薄壁杆件扭轉时的变形和应力

我們研究具有任意曲綫周边形狀的开口截面薄壁杆件的变形 (图1-3)。

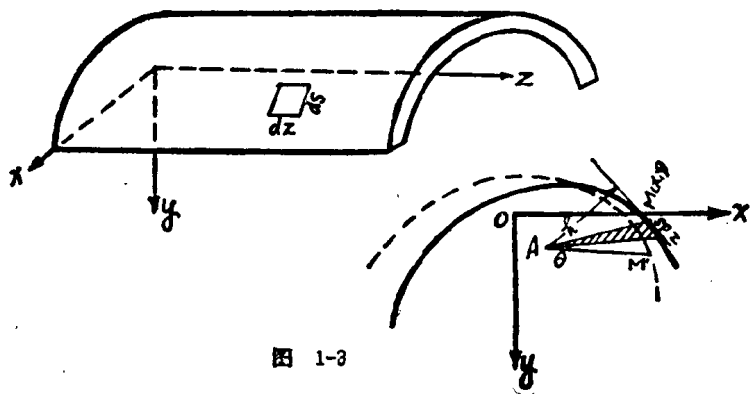


图 1-3

設已知弯曲中心 $A(a_x, a_y)$, 截面扭轉角 θ 則根据周边不变的假設, 任意点 $M(x, y)$ 的切向位移 v :

$$v = h\theta(z) \quad (2)$$

式中: h ——由弯曲中心 A 至切綫的垂距;

$\theta(z)$ ——約束扭轉时截面 z 处的扭角。

同时由于假設开口截面薄壁杆件的截面中央无剪力变形, 所以根据图 1-4 求得 M 点之角变位:

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{du}{ds} + \frac{dv}{dz}$$

但,
$$du = \frac{\partial u}{\partial s} ds, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

(3)

所以
$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

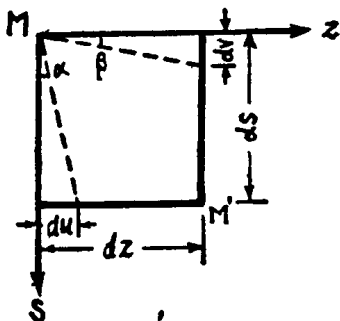


图 1-4

解方程(3)并对 s 进行全部积分:

$$\begin{aligned} u(z) &= u_0(z) - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial z} ds = u_0(z) - \int_0^s \theta' h ds \\ &= u_0(z) - \theta' \omega \end{aligned} \quad (4)$$

相对变形:

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = u_0'(z) - \theta'' \omega \quad (5)$$

式中: $\omega = \int_0^s h ds$ ——称为扇性坐标, 其值为弧扇形面积的两倍 (见图 1-3 的阴影部分), 設纵向纖維无相互挤压, 則由虎克定律求得正应力表达式:

$$\sigma_{\omega} = E\varepsilon_z = E[u'_0(z) - \theta''\omega]$$

因被研究的构件仅有外扭矩作用，代入平衡条件：

$$N_z = 0$$

$$M_x = 0$$

$$M_y = 0$$

并选定计算扇性座标的极点和计算起点，使：

$$\begin{aligned}\int_F \omega dF &= 0 \\ \int_F \omega x dF &= 0 \\ \int_F \omega y dF &= 0\end{aligned}\quad (5')$$

則： $u'_0(z) = 0$

所以 $u_0(z)$ = 常数，因此弯扭正应力：

$$\sigma_{\omega} = -E\theta''\omega \quad (6)$$

列出所谓双力矩表达式：

$$B_z = \int_0^s \sigma_{\omega} \omega dF = -E\theta'' \int_0^s \omega^2 dF = -EJ_{\omega}\theta'' \quad (7)$$

式中： J_{ω} ——称为扇形惯性矩，因它仅与截面形状和尺寸有关，且与弯曲时之惯性矩 $J_x = \int_F y^2 dF$ 的形式相似故命名之。

双力矩的符号，当视线从极点 A 沿径向看出时，双力偶反时针旋转者为正，顺时针旋转者为负。将(6)式代入(7)式，得到扇性正应力的表达式：

$$\sigma_{\omega} = -\frac{B \cdot \omega}{J_{\omega}} \quad (\text{与弯曲时之应力 } \sigma = \frac{M_z}{J_x} \text{ 相似}) \quad (8)$$

约束扭转时的切应力计算，为此可研究在任意点 $M(x, y)$ 处之

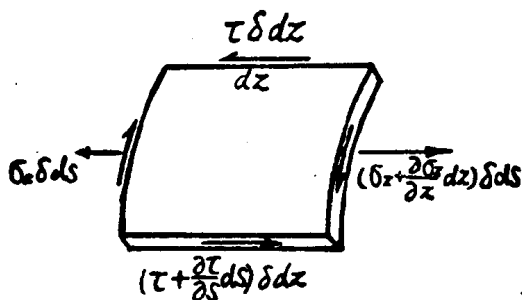


图 1-5

微元 $ds \times dz$ 的平衡 (见图1-5)。

設截面厚度 $\delta = \text{常数}$, 則得平衡方程式:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0$$

积分之:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 - \int_0^s \frac{\partial \sigma_z}{\partial s} ds = \tau_0 - \int_0^s \frac{B'_z}{J_\omega} \omega ds \\ &= \tau_0 - \frac{B'_z}{J_\omega \delta} \int_0^s \omega \delta ds = \tau_0 - \frac{B'_z S_\omega}{J_\omega \delta} \\ &= \tau_0 - \frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega \delta} = \tau_0 + \tau_\omega \end{aligned} \quad (9)$$

式中: τ_0 ——初始切应力, 因在开口截面表面上无荷载, 所以 $\tau_0 = 0$;

$$S_\omega = \int_0^s \omega \delta ds = \int_0^s \omega dF \text{——称为扇性静力矩;}$$

$M_{\omega} = \frac{dB}{dz}$ —— 称为弯扭力矩;

$$\tau_{\omega} = - \frac{M_{\omega} S_{\omega}}{J_{\omega} \delta} \quad \text{—— 弯扭切应力。} \quad (9')$$

式(9')与一般弯曲时之切应力公式 $\left(\tau = \frac{QS}{bz} \right)$ 相似, τ_{ω} 我們称为弯扭切应力。其方向, 当对弯曲中心逆时针旋轉者为正, 顺时针旋轉者为负。

(二) 开口截面薄壁杆件約束扭轉时的扭角微分方程式
显然, 杆件截面上之内扭力矩应该与外扭力矩平衡。

$$\text{則:} \quad L = M_k + M_{\omega} \quad (10)$$

式中: L = 截面上的外扭力矩;

$M_k = GJ_k \theta'$ —— 即自由扭轉力矩为截面上的内扭力矩的一部分;

$$M_{\omega} = \frac{dB_z}{dz} = -EJ_{\omega} \theta'' \quad \text{—— 即約束扭轉产生的弯扭力矩,}$$

是截面上的内扭力矩的另一部分。

将 M_k 、 M_{ω} 的轉角表达式代入平衡方程式(10), 并对 z 一

次微分, 令 $\frac{dL}{dz} = m$, 則:

$$\begin{aligned} EJ_{\omega} \theta'' - GJ_k \theta'' &= -m, \\ \theta'' - K^2 \theta'' &= -\frac{m}{EJ_{\omega}} \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $K = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_{\omega}}}$ —— 称为弹性弯曲扭轉特性。

微分方程(11)的解, 可以首先积分齐次方程:

$$\theta^{IV} - K^2 \theta'' = 0 \quad (12)$$

与其相适应的特性方程式:

$$r^4 - K^2 r^2 = 0$$

其根为: $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = K$, $r_4 = K$ 。

齐次微分方程(12)的积分, 可以写成如下的形式:

$$\theta = c_1 + c_2 Z + c_3 \operatorname{sh} KZ + c_4 \operatorname{ch} KZ \quad (13)$$

依次列出导数:

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= c_2 + K(c_3 \operatorname{ch} KZ + c_4 \operatorname{sh} KZ) \\ \theta'' &= K^2(c_3 \operatorname{sh} KZ + c_4 \operatorname{ch} KZ) \\ \theta''' &= K^3(c_3 \operatorname{ch} KZ + c_4 \operatorname{sh} KZ) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

因为 $\theta'' = -\frac{B_z}{EJ_\omega}$ $K = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_\omega}}$ 因此可由方程(14)求得:

$$B_z = -GJ_K(c_3 \operatorname{sh} KZ + c_4 \operatorname{ch} KZ) \quad (15)$$

又因 $L = GJ_K \theta'' - EJ_\omega \theta'''$, $K = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_\omega}}$ 及方程(14)求得:

$$L = GJ_K c_2 \quad (16)$$

应用初始值, 令 $Z = 0$ 时, (13)~(16)式中之 θ 、 θ' 、 B_z 、 L 之值为 θ_0 、 θ'_0 、 B_0 、 L_0 , 则:

$$\theta_0 = c_1 + c_4, \quad \theta'_0 = c_2 + Kc_3$$

$$B_0 = -c_4 GJ_K, \quad L_0 = c_2 GJ_K$$

由此求得积分常数 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 以初始值表达的公式:

$$c_1 = \theta_0 + \frac{B_0}{GJ_K}; \quad c_2 = \frac{L_0}{GJ_K}; \quad c_3 = \frac{1}{K} \left(\theta'_0 - \frac{L_0}{GJ_K} \right);$$

$$c_4 = -\frac{B_0}{GJ_K}.$$

把这些积分常数代入(13)~(16)式, 同时注意到齐次方程

的特解, $m = \frac{dL}{dZ}$ 就是集中力矩 L_0 的影响函数的积分值, 由此可組成影响函数表 (表1-1)。

表1-1

	L_0	B_0	θ'_z	θ_0	$m = \text{常数}$
θ_z	$\frac{KZ - \text{sh } KZ}{KGJ_K}$	$\frac{1 - \text{ch } KZ}{GJ_K}$	$\frac{\text{sh } KZ}{K}$	1	$\frac{(KZ)^2}{2} + 1 - \text{ch } KZ$ $K^2 GJ_K$
θ'_z	$\frac{1 - \text{ch } KZ}{GJ_K}$	$-\frac{K}{GJ_K} \text{sh } KZ$	$\text{ch } KZ$	0	$\frac{KZ - \text{sh } KZ}{KGJ_K}$
B_z	$\frac{\text{sh } KZ}{K}$	$\text{ch } KZ$	$-\frac{GJ_K}{K} \text{sh } KZ$	0	$\frac{\text{ch } KZ - 1}{K^2}$
L_z	1	0	0	0	Z

今举例說明表1-1之应用: 設 $Z=0$ 时, 四个初始值皆不为零, 如图1-6。

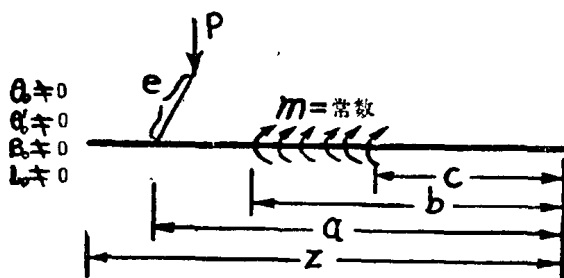


图 1-6

則扭轉角 θ_z 的一般表达式如下:

$$\theta_z = \theta_0 + \theta'_0 \frac{\text{sh } KZ}{K} + B_0 \frac{1 - \text{ch } KZ}{GJ_K} + L_0 \frac{KZ - \text{sh } KZ}{KGJ_K} + L \frac{Ka - \text{sh } Ka}{KGJ_K} + \frac{m}{K^2 GJ_K} \left[\frac{K^2 (b^2 - c^2)}{2} \right]$$

$$+1 - \text{ch} Kb + \text{ch} Kc \Big]$$

其它三个因素 θ'_z 、 B_z 、 L_z 可仿此列出一一般表达式。

其初始值 θ_0 、 θ'_0 、 B_0 、 L_0 不是都不等于零，它决定于结构的力学图式和受荷状况。结构力学图式主要决定于支承情况，一般梁式支承不外固端、铰支承或悬臂（自由端），其初始值如图1-7所示。

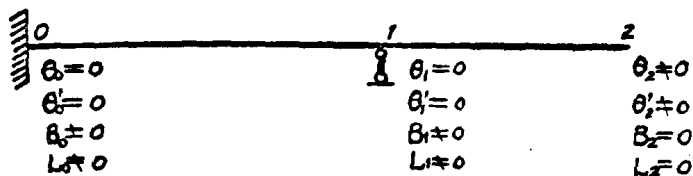


图 1-7

(三)主扇性特征值的计算和绘制

所谓主扇性座标，即该扇性座标值是以弯曲中心为极点，

以计算零点为起始值，按 $\omega = \int_0^s h ds$ 求得的扇性座标值。因此，

必须确定弯曲中心和计算零点 (M_0)。所谓主扇性座标也可用数学形式表达如下：

$$\left. \begin{aligned} \int_F \omega x dF &= 0 \\ \int_F \omega y dF &= 0 \\ \int_F \omega dF &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

为此，必须先假定一任意点 $A(x_x, y_x)$ 为极点，截面上任意点 $M_1(x_1, y_1)$ 为计算起点，从而求得辅助扇性座标图 ω_1 ；如果我们以重心轴为座标轴 (x, y) 则得到弯曲中心的座标及扇性

坐标的计算起点位置为:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\int \omega_1 y dF}{J_x} \\ a_y &= \frac{\int \omega_1 x dF}{J_y} \\ \omega_N &= \frac{\int \omega_1 dF}{F} \end{aligned} \quad (18)$$

当我们有两个对称轴时, 弯曲中心为此二轴之交点; 当有一个对称轴时, 弯曲中心必定在此对称轴上。而计算零点必为对称轴与杆件截面相交的最近点。利用这些特性可帮助我们计算弯曲中心和计算零点, 尤其是桥跨结构, 它总有一个对称轴 (见图 1-9)。任意截面形状的主扇性特征值的计算和绘制在此不再赘述。但必须指出, 对任意形状的截面计算起点的改变, 使扇性座标值之改变为一常数。图 1-8 就可说明这点。当计算起点由 M_1 改变为 M_0 时, 任意点 N 的扇性座标的改变值为一常数: $\Delta\omega = \omega_N^{M_1} - \omega_N^{M_0} = \text{常数}$ 。

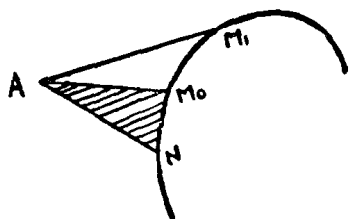


图 1-8

现以桥跨结构中最常用的多肋式截面为例说明扇性座标的计算和绘制 (见图 1-9), 显然极点 A 必定在对称轴 y 上而计算零点必为 o_1 , 因它是对称轴与截面相交的最近点。 x 、 y 轴为截面的重心轴, 假定 o_1 为辅助极点以 o_1 为计算起点, 从此求得辅助扇性座标 ω_1 图及 x 座标图。设 y 轴上某点 $A(o, a_y)$ 为弯曲中心, 则主扇性座标为:

$$\omega = \omega_1 + x a_y \quad (19)$$

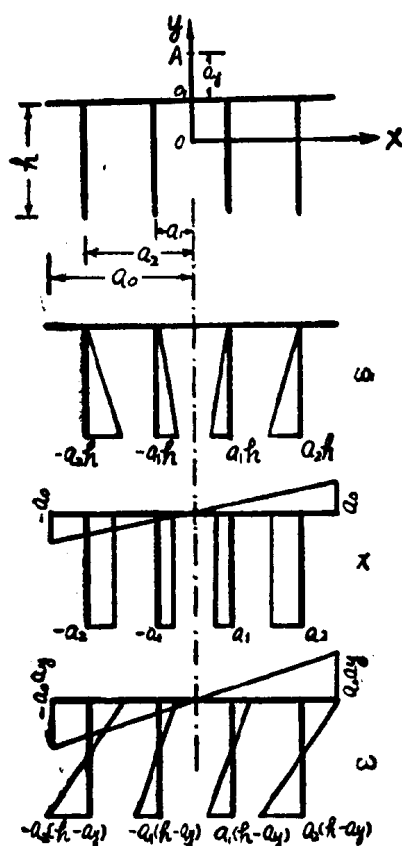


图 1-9

若为主属性坐标，则必须满足方程式(17)，则：

$$\int_F \omega y dF = \int_F \omega_1 y dF + \int_F x y a_y dF = 0$$

$$\int_F \omega x dF = \int_F \omega_1 x dF + \int_F x^2 a_y dF = \int_F \omega_1 x dF + J_y a_y = 0$$

$$\int_F \omega dF = \int_F \omega_1 dF + \int_F x a_y dF = 0$$

因为 x, y 轴是重心轴所以:

$$\int_F xy dF = 0$$

$$\int_F x dF = 0$$

因此:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \omega_1 y dF &= 0 \\ a_y &= - \frac{\int_F \omega_1 x dF}{J_y} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$\int_F \omega_1 dF = 0$ 此式证明 o_1 确为计算起点由图1-9 ω_1 图求得:

$$\begin{aligned} \int_F \omega_1 x dF &= 2\delta \left[\frac{1}{2} (h \cdot a_2 \cdot h) \cdot a_2 + \frac{1}{2} (h_x \cdot a_1 \cdot h) \cdot a_1 \right] \\ &= h^2 (a_2^2 + a_1^2) \delta = h^2 \cdot \Sigma a_i^2 \delta \end{aligned} \quad (21)$$

$$\therefore a_y = - \frac{h^2 \Sigma a_i^2 \delta}{J_y} \quad (22)$$

若 T 型梁有不大的下翼缘 (或有钢筋) 时, 则可假定下翼缘截面积 F_H 集中在 T 型梁下端, 则:

$$\begin{aligned} \int_F \omega_1 x dF &= h^2 \Sigma a_i^2 \delta + 2F_H \cdot h \cdot \Sigma a_i^2 \\ &= h \Sigma a_i^2 (h\delta + 2F_H) \end{aligned} \quad (23)$$

$$a_y = - \frac{1}{J_y} (h\delta + 2F_H) \cdot h \Sigma a_i^2 \quad (24)$$

求得 a_y 后, 代入(19)式即可求得所需要的主扇性座标 ω 图 (见图 1-9), 其余扇性特征值: $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$, $S_\omega = \int_F \omega dF$, 可以很方便地按主扇性座标图用维力沙金图形相乘法求得。