

'98 卷

大连理工大学教授学术丛书

无奇异边界元法

孙焕纯 张立洲 许强 张耀明 著

NONSINGULARITY
BOUNDARY
ELEMENT
METHODS

大连理工大学出版社

大连理工大学教授学术丛书 '98 卷

无奇异边界元法

孙焕纯 张立洲 著
许 强 张耀明

大连理工大学出版社

**The Professors Academic Works Series
of the Dalian University of Technology '98**

Nonsingularity Boundary Element Methods

**Sun Huanchun
Zhang Lizhou
Xu Qiang
Zhang Yaoming**

Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

无奇异边界元法/孙焕纯,张立洲,许强,张耀明著. —大连:大连理工大学出版社,1999. 4

(大连理工大学教授学术丛书'98 卷)

ISBN 7-5611-1583-0

I. 无… II. ①孙… ②张… ③许… ④张… III. 边界元法
IV. O242. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 04565 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码 116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4708898
E-mail:pdut@mail.dlptt.ln.cn
大连海事大学印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32 字数:303 千字 印张:12.25 插页:4

印数:1—3000 册

1999 年 4 月第 1 版

1999 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:于明珍

责任校对:文 青

封面设计:孙宝福

定价:25.00 元

本书由

**辽宁省自然科学基金
大连市学术专著资助出版评审委员会 资助出版
大连理工大学学术著作出版基金**

The published book is sponsored by

**The Natural Science Foundation
of Liaoning Province**

**The Dalian Evaluation Committee
for Publishing Academic Works
Financed**

and

**The Publishing Academic Works
Foundation of the Dalian University
of Technology**

序

电子计算机和有限元软件的出现使力学计算起了质的变化,不但大大地提高了通过计算解决工程实际问题的能力,而且通过数值模拟可以研究种种新的性质问题。于是有人认为:计算方法已经成熟,不必再搞了。实际上,计算的理论、方法远远没有完善。“道高一尺,魔高一丈”。“如何计算”和“计算得更好、更快、更省”是一个永恒的挑战,关键在于“创新”。搞好数值计算必须精通问题的基本理论和熟悉解析解,否则只是一堆数字,甚至造成“数值污染”。

边界元法是在有限元之后出现的新的计算方法,它用了—个解析的基本解,使数值计算的维数减少了一个,以节省计算的空间和时间。但它本身有一些缺点尚待克服,例如奇异性问题和矩阵不对称问题等等。孙煥纯教授领导的小组对这些问题进行了长年的研究,针对性地提出了解决办法。所以本书不是一般的入门介绍,而是一本创新科研成果的专著。

中华民族虽然有着像李约瑟博士描述的那样久远辉煌的科技成果和历史,但毕竟近几百年来,和欧洲西方比较我们的科技是落后了,原因之一就是我们在这个时期的传统文化中缺乏“重视创新

精神”和“激励创新机制”。江泽民同志最近指出：“创新是一个民族进步的灵魂，是国家兴旺发达的不竭动力。”这应该是中华民族思想文化中的一个觉醒。

在这样一个时期，祝本书出版成功和读者能够从中得到启迪。

唐立民

1999年1月于大连

前 言

本书系作者十年来在该领域中研究成果的系统归纳和总结。全书共分上、下两篇,上篇阐述虚边界元法的理论、方法和应用,这是数理方程初边值问题的一种数值解的理论、方法及应用。

第一,是针对传统边界元法的若干不足,例如奇异积分的处理麻烦、计算耗时;边界层效应、降低边界层附近解的精度;求解线性代数方程系数阵满阵和不对称性,造成存储多、计算耗时等而提出的。实践证明,它克服了传统边界元法的上述缺点,提供了一个快速、高精度的新边界元法。

第二,为弹性空间、薄板、薄壳问题提供了一个比较有效、高精度的、统一的求数值解的理论和方法,对薄板、薄壳问题抛弃了传统的基于直法线假设的方程和方法,对四周边界采用当量条件以简化计算,效果良好。

第三,利用该理论和方法求解了一系列问题,例如位势问题、弹性平面和空间问题、薄板和薄壳问题,克服了有限元法和传统边界元法求解经典薄壳问题的困难,例如有限元法没有一种类型的单元可解各类经典壳体方程问题,也没有一种选择单元类型求解某种经典壳体方程的标准。这是经典壳体方程应用有限元法求解的一个难题,通常都采用三维方程的中厚壳理论的有限元解,而抛弃经典壳体方程的有限元解。另外就是有的经典方程尚未找到基本解,有的虽有基本解,但过于麻烦,例如圆柱壳的贝塞尔函数级数表达的基本解等,这样就给用边界元法解经典壳体方程不仅带来麻烦,甚至无法求解。

第四,给出了虚边界元法的数学理论依据,并给出虚、实边界

间适宜距离选取的公式。

第五,对位势、弹性平面问题给出求解方程系数的解析算式。

下篇针对传统边界元的直接法存在的几个理论问题及上述三个缺点,进行了探讨并提出了解决的办法。

第一,传统边界元法的边界积分方程,对外域问题有时存在非充要性,即解不惟一甚至无解。为此对传统边界元直接法建立起若干问题,例如位势、弹性平面和薄板问题的充要边界积分方程,以保证解的存在和惟一性。

第二,建立无奇异或弱奇异的边界积分方程,以消除传统边界元法中的奇异积分及边界层效应,提高计算效率和边界层附近解的精度。

第三,给出了位势、弹性平面问题等的边界积分方程离散化求解的系数阵元素的解析计算式,提高了求解的速度和精度。

第四,对具有旋转周期对称性结构的力学问题,给出了特殊的简单算法。

以上即为本书的主要内容和特点。

本书第一章由孙焕纯执笔;第二章至第四章由张立洲执笔;第五章至第八章由许强执笔;第九章至十三章由张耀明执笔,全书由孙焕纯统一审核、修改定稿。第二、三、四名作者系按执笔章的顺序排列的。书稿由陈万吉和唐立民两位教授(博士生导师)审阅了其中的若干主要章节,提出了一些宝贵意见,作者作了相应的修改。唐立民教授并为本书作序。在本书即将出版之际,作者对他们的热情帮助和真挚的友谊表示衷心的感谢。

由于水平所限,书中难免有疏漏和失误之处,敬请各位专家和读者批评指正。

作者

1999年4月

内 容 简 介

本书共有上下两篇。上篇阐述虚边界元法的理论、方法及应用。虚边界元法有三种：一般配点法；最小二乘配点法（超额配点法）；最小二乘二重积分法。分别对弹性空间、弹性平面、薄板、壳问题给出求解方程系数阵的离散化方法，并对弹性空间、薄板、壳问题提供了一个弹性空间方程出发的统一数值解法，又对位势问题、弹性平面问题等给出了边界积分方程离散化求解的系数阵元素的解析计算式；下篇主要针对传统边界元直接法的边界积分方程的充要性问题进行了论述，并对位势、弹性平面和薄板等问题建立了充要边界积分方程；其次是建立了无奇异或弱奇异的边界积分方程；最后对具有旋转周期对称结构的力学分析问题给出了简单解法。

本书可作为工程、理科高校本科生、研究生的参考书或教材，亦可作为工程师、高校教师和研究人员的参考书。

ISBN 7-5611-1583-0



9 787561 115831 >



作者简介

孙焕纯,辽宁省庄河市人,1927年2月生,1953年毕业于大连工学院(现大连理工大学)土木系。现任大连理工大学教授、结构力学博士生导师、固体力学博士后流动站导师。在国内外发表论文一百三十余篇,专著两部(合作)。80年代初开始研究离散变量结构优化设计的理论、方法和应用。从60年代初至今还从事过下列诸课题的研究:(1)弹性理论多连通问题和空间问题的一般解;(2)结构静动力弹塑性分析及逐步积分法;(3)自由-移动边界问题;(4)弹性理论、板壳、位势等问题的虚边界元法和传统边界元法充要边界积分方程及无奇异性。

目 录

序

前 言

第一章 绪论	1
1.1 数学物理方程初边值问题数值解法发展概述	1
1.2 本书内容简介	10
1.3 本领域尚待深入研究的问题	11

上篇:虚边界元法

第二章 位势问题的虚边界元法	15
2.1 位势问题的控制方程和边界条件	15
2.2 虚边界积分方程	16
2.3 域内点的位势和导数的积分表达式	17
2.4 求解虚边界积分方程的离散化方法之一——虚边界元-等额配点法	18
2.5 求解虚边界积分方程的离散化方法之二——虚边界元-最小二乘积分法	27
第三章 弹性平面问题的虚边界元法	33
3.1 虚边界元法	33
3.2 弹性平面问题的基本公式	34
3.3 弹性平面问题的虚边界元离散解	37
3.4 虚边界元-最小二乘积分法解的误差评估	61
3.5 关于虚边界元-最小二乘积分法的几点结论	65

3.6	弹性力学契合问题的虚边界元解·····	66
第四章	薄板弯曲问题的虚边界元法 ·····	79
4.1	薄板弯曲问题的基本方程·····	79
4.2	薄板弯曲问题的虚边界积分方程·····	81
4.3	薄板弯曲问题虚边界积分方程的离散数值解·····	83
4.4	薄板振动问题的拟静力虚边界元解·····	91
4.5	薄板弹性障碍问题的虚边界元-线性互补解·····	104
第五章	弹性三维问题的虚边界元法及其积分方程的建立 ·····	111
5.1	三维问题虚边界元法的构思 ·····	111
5.2	解三维问题积分方程的建立 ·····	114
5.3	方差泛函的性质 ·····	118
5.4	虚边界的适定范围 ·····	119
5.5	4 结点~8 结点的变结点等参元·····	120
5.6	对称性问题的计算处理 ·····	122
5.7	等额配点法存在的不足及局限性 ·····	123
第六章	弹性三维问题的虚边界元解 ·····	126
6.1	虚边界元-最小二乘积分方程的离散解 ·····	126
6.2	方差泛函的极小化序列及其求解框图 ·····	131
6.3	数值算例 ·····	133
第七章	薄板弯曲问题的三维虚边界元解法 ·····	150
7.1	薄板弯曲问题的方差泛函 ·····	150
7.2	薄板弯曲问题虚边界元-最小二乘法的离散 数学模型 ·····	153
7.3	数值算例 ·····	160
第八章	薄壳问题的三维虚边界元解 ·····	167
8.1	解法概述 ·····	167
8.2	薄壳问题虚边界元求解的积分方程 ·····	168

8.3 数值算例	178
第九章 虚边界元法的几个问题的研究	185
9.1 引言	185
9.2 虚边界元方法	186
9.3 虚边界元法与域外奇点法中的“适宜距离”	189
9.4 旋转周期对称结构	199

下篇:无奇异性充要边界积分方程

第十章 直接边界元法中的边界积分离散化的解析处理	219
10.1 引言	219
10.2 位势问题	220
10.3 弹性力学问题	228
10.4 数值算例	239
第十一章 平面位势问题的充要的无奇异边界积分方程	242
11.1 引言	242
11.2 预备知识及一些基本定理	245
11.3 外边值问题解存在唯一的充要条件	251
11.4 充要的间接变量边界积分方程	255
11.5 充要的直接变量边界积分方程	271
11.6 充要的直接变量无奇异边界积分方程	279
11.7 关于边界积分方程的讨论	284
11.8 数值算例	288
第十二章 平面弹性力学问题的充要边界积分方程及 无奇异边界元法	290
12.1 引言	290
12.2 基本定理	291
12.3 充要的间接变量边界积分方程	301

12.4	充要的直接变量边界积分方程·····	310
12.5	关于边界积分方程的一些讨论·····	321
12.6	数值框架系统及算例·····	324
第十三章	弹性薄板弯曲问题的充要边界积分方程及 无奇异边界元法·····	330
13.1	概念及基本定理·····	330
13.2	双调和函数的边界积分表示·····	336
13.3	充要的间接变量边界积分方程·····	345
13.4	直接变量无奇异边界积分方程·····	350
参考文献	·····	363

Contents

Foreword

Preface

Chapter 1 Introduction	1
1.1 The state of art of the numerical methods for solving the intial boundary value problems of the mathematical differential equations	1
1.2 The contents outline of this book	10
1.3 To be researched problems in this field	11

Part (I): Virtual Boundary Element Method

Chapter 2 Virtual boundary element methods in potential problems	15
2.1 The goverment equation and its boundary conditions in potential problems	15
2.2 Virtual boundary integral equation	16
2.3 The integral expression of the potential and its dirivatives values at an interior point of domain	17
2.4 One of the discretized methods for solving the virtual boundary integral equation——virtual boundary element-equivalent collocation method ...	18
2.5 Second of the discretized methods for solving the	

virtual boundary integral equation——virtual	
boundary element-least square integral method	27
Chapter 3 Virtual boundary element method for	
plane elasticity problems	33
3.1 Virtual element method	33
3.2 The fundamental formulate of the plane elasticity	
problems	34
3.3 Virtual boundary element discret solution for	
the plane elasticity problems	37
3.4 Error evaluation for the solution obtained by	
the virtual boundary element-least square	
integral method	61
3.5 Some conclusions about the virtual boundary	
element-least square integral method	65
3.6 The virtual boundary element solution for	
the elastic coupling plates composed of	
different materials	66
Chapter 4 Virtual boundary element method for solving	
the bending problems of thin plate	79
4.1 The fundamental equation of thin plate bending	
problems	79
4.2 The virtual boundary integral equation for	
thin plate bending problems	81
4.3 The discrete numerical solution of the virtual	
boundary integral equation for thin plate	
bending problems	83
4.4 The Quasi static Virtual boundary element solution	
for thin plate vibration problems	91