普通高校数学基础课程教材系列

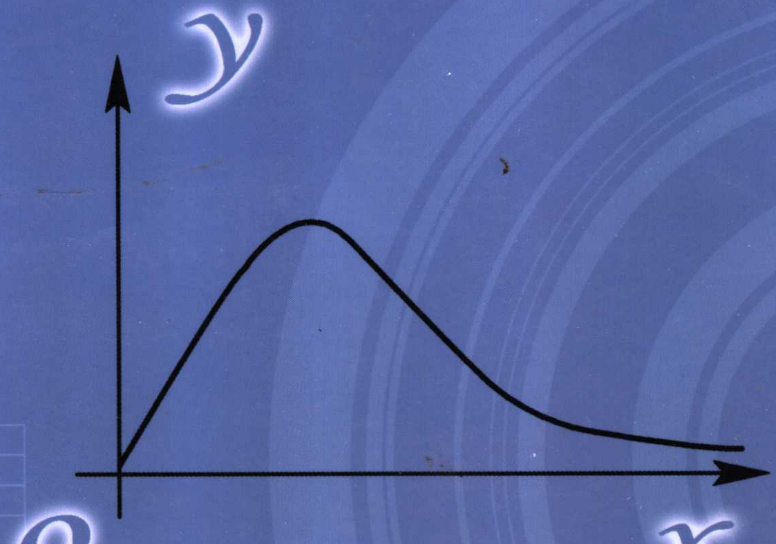
工程数学习题解答与复习指南

刘剑平　陆元鸿　施劲松 主编

Gongchengshuxue

Xitijiedayufuxizhinan

- 线性代数
- 概率论与数理统计



华东理工大学出版社

普通高校数学基础课程教材系列

工程数学习题解答与复习指南

- 线性代数
- 概率论与数理统计

刘剑平　陆元鸿　施劲松　主　编

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学习题解答与复习指南/刘剑平等主编. —上海：华东理工大学出版社，2003.7

ISBN 7-5628-1403-1

Ⅰ.工...　Ⅱ.刘...　Ⅲ.工程数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 040873 号

工程数学习题解答与复习指南

主编　刘剑平　陆元鸿　施劲松

出版	华东理工大学出版社	**开本**	787×1092　1/16
社址	上海市梅陇路 130 号	**印张**	15.25
邮编	200237　**电话**(021)64250306	**字数**	371 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	**版次**	2003 年 7 月第 1 版
发行	新华书店上海发行所	**印次**	2003 年 7 月第 1 次
印刷	上海展望印刷厂	**印数**	1-4050 册

ISBN 7-5628-1403-1/O・81　　**定价**:25.00 元

内容提要

本书是根据刘剑平等主编的《工程数学》(华东理工大学出版社出版)而配套精编的一本习题解答。内容包括线性代数、概率论与数理统计两大部分。除《工程数学》各章的习题解答外,每章还配有自我检查题(附答案或提示)以测试学生重点内容、基本方法的掌握程度。另外,本书还汇编了近几年华东理工大学线性代数期终考试卷和概率论与数理统计期终考试卷(附答案或提示)用于帮助学生应试复习使用。

本书可作为大学本科、专升本、专科、自学考试的学生学习线性代数、概率论与数理统计的辅导教材,也可供参加硕士研究生入学考试的学生复习使用。

本书编委

主　编　刘剑平　陆元鸿　施劲松

编　者　刘剑平　陆元鸿　施劲松

曹宵临　李红英　倪中新

前　言

在工程数学课的教学过程中，听到不少学生这样反映：上课能听懂内容，也能顺利地读懂教材，但课后不能顺利地答题，以至于考试成绩不理想。我们认为要达到真正的懂必须经过“由薄到厚”和“由厚到薄”这两个过程，“由薄到厚”是指学习、接受、积累的过程，“由厚到薄”是指总结、消化、提炼的过程。为了解决学生学习中的困惑，我们编写了这本《工程数学习题解答与复习指南》，以帮助学生从听“懂”、读“懂”的感性认识提升到融汇贯通的理性认识。

本书是根据刘剑平等主编的《工程数学》（华东理工大学出版社出版）而配套精编的一本习题解答。内容包括线性代数、概率论与数理统计两大部分。除《工程数学》各章的习题解答外，每章还配有自我检查题（附答案或提示）以测试学生重点内容、基本方法的掌握程度。另外，本书还汇编了近几年华东理工大学线性代数期终考试卷和概率论与数理统计期终考试卷（附答案或提示）用于帮助学生应试复习使用。全书试题内容充实，形式多样，深浅得当，知识覆盖面广，解题方法力求简明扼要，步骤清楚，通俗易懂，使学生了解解题规律，掌握解题方法和技巧，从而提高学生理解基本概念和基本理论、掌握基本方法的能力。

本书可作为大学本科、专升本、专科、自学考试的学生学习线性代数、概率论与数理统计的辅导教材，也可供参加硕士研究生入学考试的学生复习使用。

本书由刘剑平、陆元鸿、施劲松主编，曹宵临、李红英、倪中新同志参加了部分章节的编写。在编写的过程中，我们得到了校教材建设委员会和校教务处刘百祥老师以及华东理工大学出版社的领导朱广忠、荣国斌、张辉、姚璎老师的大力支持，得到了院系领导王宗尧教授、鲁习文教授的支持和关心，在此表示衷心的感谢。同时，我们还要感谢教学组的夏宁茂教授、张建初教授、方民、秦衍、张新发、苏纯洁、薛以锋、曹宇烨、孙军、黄文亮等老师，他们在本书的编写过程中提供过宝贵的建议。

由于编者水平有限，疏漏差错，仍恐难免，敬请读者多提意见，不吝赐教，以便改正并不胜感谢之至，并邀请您共同修订本书。

作者的电子信箱是 liujianping 60 @ 163. com.

刘剑平　陆元鸿　施劲松

2003 年 9 月

目　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率论与数理统计

第一部分

线性代数

主编　刘剑平　施劲松

第一章 矩阵

一、习题解答

1.1 已知两矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2u & u \\ 1 & 2x \end{bmatrix}$相等,求 x,y,z,u 的值.

解:由矩阵相等即对应元素相等,可得

$$\begin{cases} x=2u \\ 2y=u \\ z=1 \\ -8=2x \end{cases}$$

即得 $x=-4,y=-1,z=1,u=-2$.

1.2 已知 $2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}-3\boldsymbol{X}+\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解:依题意,

$$3\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

即得

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 计算下列乘积.

(1) $[1,2,3]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

解:原式$=1\times3+2\times2+3\times1=10$.

(2) $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}[1,-3]$.

解:原式 $=\begin{bmatrix}2&-6\\1&-3\\3&-9\end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix}1&0&-2&2\\3&2&0&4\\0&1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&2&-3\\5&-4&1\end{bmatrix}$.

解:原式 $=\begin{bmatrix}10&-10&8\\22&-10&4\\-14&16&-9\end{bmatrix}$.

(4) $[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

解:原式 $=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3$.

1.4　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,试求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有矩阵.

解:由可交换矩阵的定义,知道所求矩阵必为 3 阶方阵,不妨设其为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$,于是有 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix}$,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,即得 $\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix}$,再由对应元素相等,则得 $d=g=h=0,a=e=i$,$b=f$,于是 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{bmatrix}$　(a,b,c 均为任意常数)即为与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有矩阵.

1.5　试证两个上三角形矩阵的乘积仍为上三角形矩阵.

证:依题意,可设两上三角形矩阵分别为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$,则当 $i>j$ 时,成立 $a_{ij}=0$及 $b_{ij}=0$,若记乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{n\times n}$,则由矩阵乘法定义,有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为上三角形矩阵，故当 $i>j$ 时，上式右端第一项中的 a_{ik} 及第二项中的 b_{kj} 均为零，进而知 $c_{ij}=0$，即乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 亦为上三角形矩阵.

1.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$，问：

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗？

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗？

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗？

解：(1) 不成立，因为 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}3&4\\4&6\end{bmatrix}$，而 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}$；

(2) 不成立，因为 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

(3) 不成立，因为 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

1.7 举反例说明下列命题是错误的.

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

解：取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$，注意答案不唯一.

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

解：取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，注意答案不唯一.

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

解：取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，注意答案不唯一.

1.8 计算下列各题

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$，求 $\boldsymbol{A}^4$.

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$

$$=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left(\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)^3\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]=3^3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]=27\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}.$$

(2) 求 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{2005}$.

解:记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,$A^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,于是,原式为

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{2005}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{2004}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{6}\right)^{334}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}^{334}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^n$ (n 是正整数).

解:由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{bmatrix}$,…,故可推测

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$$

1.9 设 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$,以 $f(\boldsymbol{A})$表示矩阵多项式,即 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$,那么若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,试求 $f(\boldsymbol{A})$.

解:$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^3+3\boldsymbol{I}$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^3+3\boldsymbol{I}=3\boldsymbol{I}.$$

1.10 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^2$.

解:$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 5\\ -20 & -10\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 15\\ -10 & -5\end{bmatrix}$,

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

1.11 把 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元之和定义为它的**迹**. 记作 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$，即 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$. 若 $\boldsymbol{B}$ 也是 n 阶矩阵，试证

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})\text{；}\operatorname{tr}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

证：设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$，并记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{n\times n}$，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{D}=[d_{ij}]_{n\times n}$，$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}=[u_{ij}]_{n\times n}$，则由矩阵乘法定义知，有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj},u_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$$

且

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki},d_{ii}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki},u_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ik}$$

于是

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{C})=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{D})=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{U})=\sum_{i=1}^{n}u_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2$$

在 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$ 中，若令 i,k 互换，则得 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$；在 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})$ 中，若用 j 代替 k，则有 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2$.

1.12 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，试证 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$.

证：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{I}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}-2\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{A}$；故 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

$$\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{I}-2\frac{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)\left(\boldsymbol{I}-2\frac{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)=\boldsymbol{I}-4\frac{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}+4\frac{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2}=\boldsymbol{I}.$$

1.13 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，试证：

（1）$\boldsymbol{A}^2$ 为对称阵；

证：依题意，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，故 $(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(-\boldsymbol{A})(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2$，即 $\boldsymbol{A}^2$ 为对称阵.

（2）$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为对称矩阵；

证:依题意,有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$,于是

$$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})-(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$$

即 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为对称阵.

(3) $\boldsymbol{AB}$ 是反对称矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证:必要性 由 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{AB}$ 及 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{BA}$ 即得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

充分性 由 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{BA}=-\boldsymbol{AB}$,知 $\boldsymbol{AB}$ 是反对称阵,最后一个等号是利用了条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

1.14 试证(1)设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,则对任一 m 维列向量 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

证:"$\Leftarrow$"显然;

下证"$\Rightarrow$",由向量 $\boldsymbol{x}$ 的任意性,可取 $\boldsymbol{x}$ 为 m 维列向量 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,m$,且 $\boldsymbol{e}_i$ 为 m 阶单位矩阵的第 i 列),并设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$,则有 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的元素全都为零,由 i 的任意性,知 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素均为零,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,若 $\boldsymbol{x}$ 是任一 m 维列向量,$\boldsymbol{y}$ 是任一 n 维列向量,则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$$

证:"$\Leftarrow$"显然;

下证"$\Rightarrow$",设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$,由 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的任意性,可取 m 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{e}_i$,n 维列向量 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{e}_j(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n;\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_j$ 分别为 m、n 阶单位阵的第 i、j 列),则有 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=a_{ij}=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素都为零,亦即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

1.15 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^n$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$(n 是正整数).

证:由 $\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{I}$,即可得

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n}{2}}=(4\boldsymbol{I})^{\frac{n}{2}}=2^n\boldsymbol{I}, & n\text{ 为偶数}\\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}=(4\boldsymbol{I})^{\frac{n-1}{2}}\boldsymbol{A}=2^{n-1}\boldsymbol{A}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

及

$$\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{I}$$

亦即

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}$$

1.16 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$,$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})^{-1}$.

解:依题意,有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=3\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{A}\dfrac{(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})}{3}=\boldsymbol{I}$,故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I});\quad(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}$$

再由已知凑出$(A+4I)(A-2I)=-5I$,即得$(A+4I)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-2I)$.

1.17 求满足下述条件的矩阵 X.

(1) $A^{-1}XA=6A+XA$,其中 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$;

解:在已知等式两端右乘 A^{-1},再移项得$(A^{-1}-I)X=6I$,即$\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&6\end{bmatrix}X=6I$,于是解得 $X=\begin{bmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$.

(2) $AX-X+I=A^2$,其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

解:由原式,整理得

$$(A-I)X=A^2-I=(A-I)(A+I)$$

而 $A-I=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$显然可逆,故由上式可得

$$X=A+I=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$

1.18 设 n 阶矩阵 A,B 满足 $A+B=AB$.

(1) 证明 $A-I$ 可逆,且 $AB=BA$;

证:由 $A+B=AB$,移项得 $AB-A-B=O$,即 $AB-A-B+I=I$,亦即

$$(A-I)(B-I)=I$$

从而得到 $A-I$ 可逆;且由上式可得

$$(B-I)(A-I)=I$$

展开得 $BA-A-B=O$,即 $BA=A+B$,结合条件知 $AB=BA$.

(2) 若已知 $B=\begin{bmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,求矩阵 A.

解:由(1)知 $A-I=(B-I)^{-1}$,即 $A=(B-I)^{-1}+I$,而