

520524

几何体的 截面

德编著 上海科学技术出版社

几何体的截面

还期表
—— 明德 编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

截面是立体几何学中一个综合性很强的课题,它研究平面与几何体(包括多面体和旋转体)相截时,平面与几何体表面相交所得截面的位置、形状、大小等各种问题,它是发展空间想象力及逻辑思维能力的好题材。

本书系统地研究了截面问题的所有主要方面,第一次提出了截面定位的三条基本理论原则,使截面定位有了必要的理论依据。对截面的作图这一难点,提出了两种作法,使截面的作图有法可依,不再停留在就题论题的水平上。作者也首先把截面问题中的被载体,从多面体推广到旋转体包括球体,这样就大大丰富了截面的研究内容。本书对于截面问题的各个方面都作了深入的探讨,如截面的计算,特殊类型的截面的作图、截面的极值问题,最后用正投影的观点研究了截面实形的恢复,以及被载体侧面或表面的截痕展开图和基于等截面为依据的多种弯管接头的划线下料等实际应用问题,这些都是其它材料中未曾涉及过的问题。从这个意义上,本书是具有一定的独创性的。

本书可作为中学生课外活动小组研究的参考读物,也可供中学教师以及从事钣金展开工作的青年技工们作为参考书籍。

几 何 体 的 截 面

夏明德 编著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.5 字数 164 000

1989 年 7 月第 1 版 1989 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—5,000

ISBN 7-5323-0995-9/O·111

定价: 3.25 元

前 言

截面问题,从本质上说,是研究平面与几何体相截后,所截得的平面图形的形状、大小与位置的问题。

截面问题,从位置关系上看似乎很简单,无非是平面与几何体的相截关系而已,但深入研究下去,确是丰富多采,变化无穷,十分耐人寻味,发人深思,特别是把截面与实际生产、生活联系起来,就可看到它应用广泛,非常实用,是数学密切联系实际的好题材。

在空间几何中,截面问题是一个综合性很强的题材,由于在轴测图上研究平面与几何体的相关位置,不可避免地会因图形的形变带来的困难而产生空间图形表达上的复杂难辨,需要较强的空间想象能力,和一定的逻辑思维能力去进行探究分析;而且复杂的位置关系必然带来复杂的数量关系,因此在截面面积的计算、截面周长的计算、截面积值等计算问题上,需要应用代数的、三角的、几何的以至微积分的知识,这就需要具有相当坚实的数学知识和能力方面较好的基础。因此在教学中,一般把截面视为难点;在学习中,一般视截面为畏途,觉得难以捉摸,缺少规律可循。

为此,从教与学的需要,我觉得有必要写截面这本小册子,使截面问题有章可依,有规律可循,帮助同学们闯过截面这一难关,提高学习质量,这是编写本书的目的之一。

其次,截面问题绝对不只限于纯数学的范畴,作一些纸上谈兵的书面游戏而已,应该看到,在生产中、生活中截面的应用十分广泛。例如工程、机械图中用到截面,各种剖视图、剖面图都是截面,用它来表达工程建设、机械零部件的内部构造;在钣金、焊接工作中用到截面,各种管子接头的截取,弯管的落料,同类型、不同类型的管道的焊接,其主要的依据就是截面相同;在高程测量中,等高线绘制的地形图实际上就是在各种高程上用平面截割地形,得到平面曲线,用它来表示复杂的地形;在医疗技术中,病理切片,断面造影等等其实也是截面截割人体或组织得到的平面图形,以此来显示人体组织内部的病变,作出病理分析,使医生能对症治疗;生活中例子更多,举不胜举。

为此,从理论联系实际的原则,学以致用需要出发,也有必要还截面的本来面目,使读者能看到截面问题是如此平凡而又如此应用广泛,我们研究它,是为了更好地应用它。这恐怕是我编写本书的更主要的目的。

我在编写这本小册子时,力求做到下列几点:

(1) 在画法理论上给予适当的充实。特别是空间图形的完整性理论是截面定位的不可缺少的理论武器,我以此组织材料,使读者能知其然与所以然。

(2) 在作图方法上提出规律性的通用方法,特别是平面迹线法的作图法与内部平面交线法,使作图方法摆脱因题而异,而成为一种通法。

(3) 在理论联系实际上,我首次采用沟通立体几何与画法几何的各自采用的不同投影方法,使通常意义下的轴测图上不可测度的截面可通过旋转的方法改变为正投影系统下可测的截面,使截面实形的作图,截口实长,被截体表面的展开

成为可能,使纯数学意义下的截面具有其可测量,可作图的实用价值。

我将这本小册子,主要奉献给广大中学生,提供他们作为课外学习的参考材料,也可供中学教师及一些搞划线、展开工作的实际工作者作为手头的参考资料,以供不时之需。我的工作如能对大家有些帮助,将是我最大的安慰。

限于水平,对截面一稿虽然广泛集材,多年酝酿,成稿后又多次修改,但肯定还会挂一漏万,或存在不少缺点和错误,竭诚欢迎广大师生及热心的读者提出批评和指正。

编 者

一九八七年十月于上海

目 录

第一章 截面概述	1
§ 1.1 生活中处处有截面	1
§ 1.2 截面的基本概念	5
§ 1.3 截面确定的基本原则	8
第二章 截面作图和计算	22
§ 2.1 截面作图的两种基本方法	22
§ 2.2 正方体的截面	33
§ 2.3 多面体的截面	45
§ 2.4 旋转体的截面	63
第三章 特殊类型的截面	82
§ 3.1 特殊位置要求的截面	82
§ 3.2 特殊形状要求的截面	119
第四章 截面的极值问题	135
§ 4.1 求极值的基本知识和方法	135
§ 4.2 截面极值问题举例	142
第五章 截面应用举例	158
§ 5.1 截面实形的恢复	159
§ 5.2 截头体侧面展开	173
§ 5.3 同截面的管道接合	184
练习题答案或提示	197

第一章

截面概述

§1.1 生活中处处有截面

用一个(或几个)平面去截割一个几何体的问题是最常见的。用刀切面包、切红肠成薄片(图1.1)。为了测量渠道或河流的流量,常用测出渠道或河流的横断面(过水断面),求出横断面的面积可以求出水的流量(图1.2)。

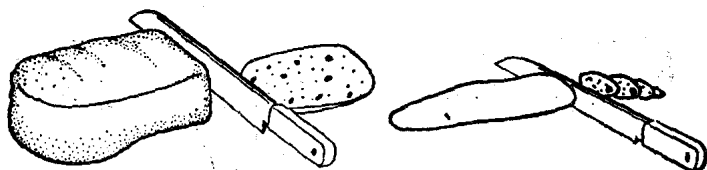


图 1.1

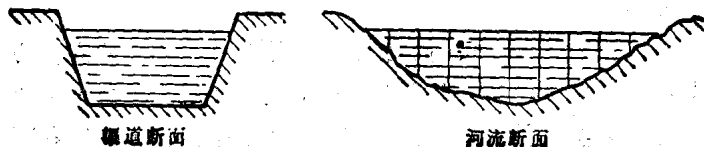


图 1.2

为了表示工业零件的外部形状和内部构造，常用各种剖视图和剖面图。例如图 1.3 表示的是一根主轴，为了表达主轴上三个均匀分布的键槽，假想用—个平面把主轴在键槽处切断(图 1.4)，得到它的剖面图(图 1.3 有阴影线部分)，而图

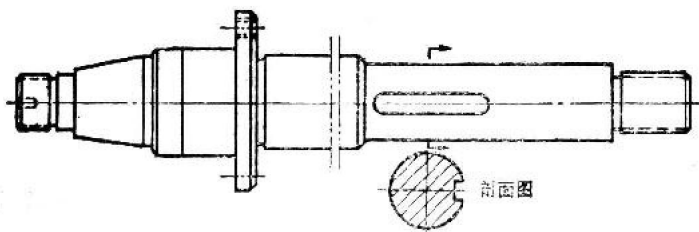


图 1.3

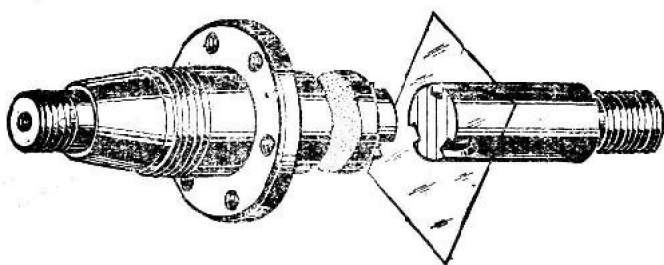


图 1.4

1.5 表示一个轴套图。它是假想用—个平面把轴套对剖而得到的图(图 1.6)。

有时，单用一个平面截割立体，还不足以表达清楚立体的内外构造或特征，就用几个截面来帮助。如图 1.7 所表示的是一个连杆类零件，它是假想有两个相交平面截割图 1.8 所示的连杆而得到的视图。

对于形状更为复杂的物体，如流线形物体单用视图而不

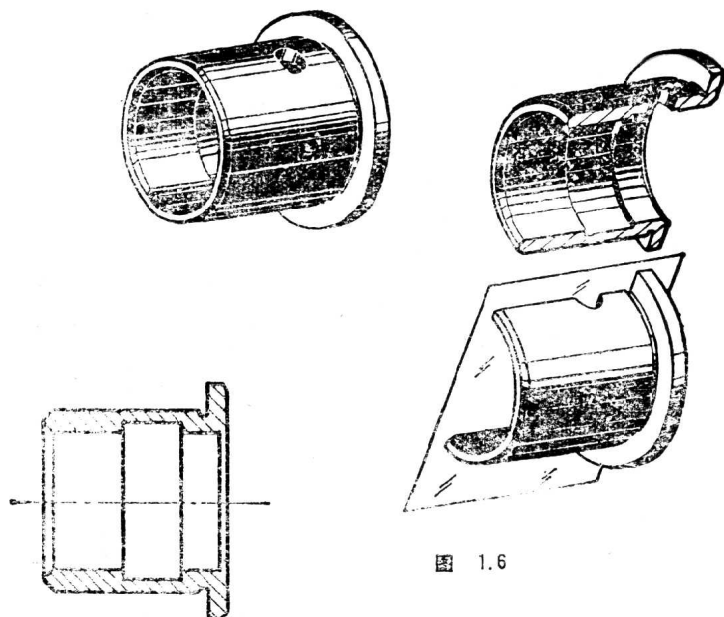


图 1.6

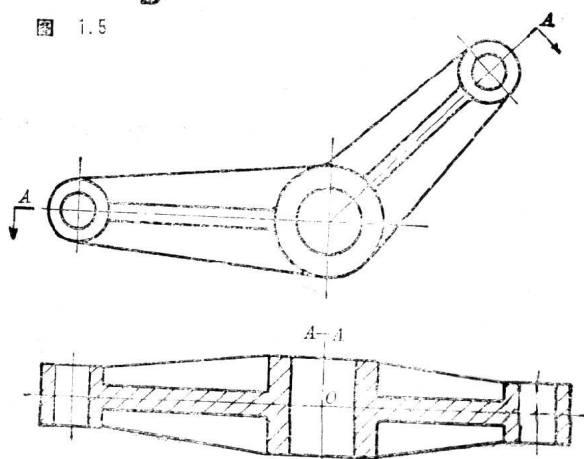


图 1.7

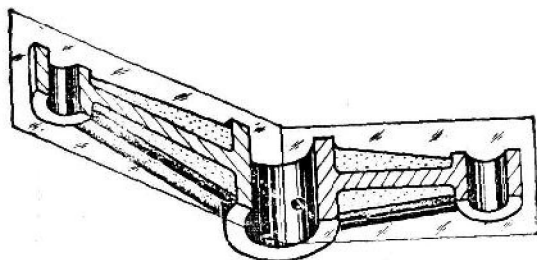


图 1.8

用截面图就难于表达清楚。如图 1.9 表示一叶螺旋桨的水平投影和一系列的截面形状，其中这些截面都是旋转 90° 而得出的。一看这张图，就能对螺旋桨的各部分曲面形状一目了然了。

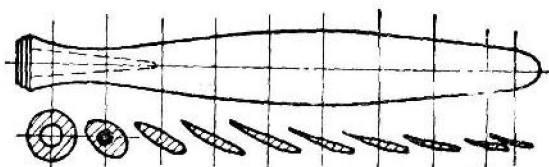


图 1.9

在生活中常见的屋檐落水管的出水口，就是由一个圆锥

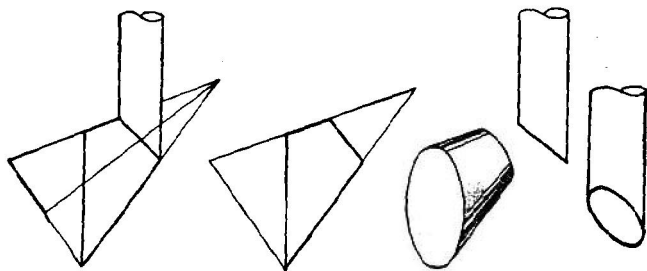


图 1.10

面被两个平面截割而得到的椭圆截面。而水管口则是一个圆柱被一个平面截割而得到的椭圆截面(图 1.10)。

截面是如此普遍地存在着,因此,截面的研究就显得如此重要,它不仅是我们学习与深造的需要,更是我们生活和生产的实际需要。

§ 1.2 截面的基本概念

1. 截面的定义

用一个平面截一个几何体(包括多面体和旋转体),这个平面与几何体有关的侧面和底面的交线(截痕)所围成的平面图形,叫做这个几何体的截面。如图 1.11 中,(1)为平面截多面体,截面为多边形;(2)为平面截旋转体(圆锥),截面为椭圆(或圆、抛物线、双曲线,也可能是三角形)。

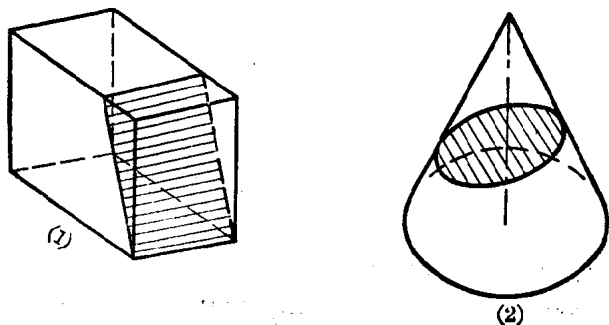


图 1.11

2. 截面的形状

由于几何体的多样化以及截几何体的平面(截平面)与几何体的位置的多种可能,因此截面的形状也是多样的。

一般情况而言，几何体的截面形状是一个平面多边形或平面曲线图形，在特殊情况下，截面也可能是一个点或者一条线。例如用平面截圆锥体或圆锥面，当截平面只过圆锥的顶点时，截面就是一个点；当截平面与圆锥的轴斜交又不平行于其母线时，截面为椭圆；当截平面与圆锥的轴斜交但平行于其母线时，截面为抛物线；当截平面与圆锥的轴平行时，截面为双曲线。显然，当截平面与圆锥的侧面相切时，截面就退化为一条直线了(图 1.12)。

通常我们所说的截面，是指一般情况下的截面，即截面是平面多边形或平面曲线图形这两种情况，而不涉及到截面是点或直线这些特殊情况。

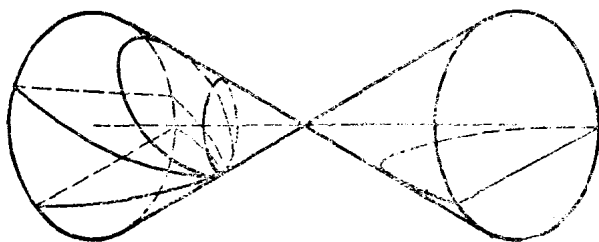


图 1.12

3. 平面立体的截面边数估计

用平面截一个多面体，在一般情况下，其截面总是一个平面多边形，对于这种截面多边形的边数也可以作出估计，可以看到截面边数是有限制条件的，其限制条件随多面体的面数而定。

例如，用平面截正方体(正六面体)，可以得到各种多边形截面；

当截面过上底面对角线 AC 时, 截面形状为三角形(图 1.13 中的 $\triangle AP_1C$ 、 $\triangle AB_1C$); 为等腰梯形(图中的 $\triangle AE_1F_1C$ 、 $\triangle AE_2F_2C$); 特殊的为矩形 AA_1C_1C 。即截面最多与四个面相截, 最少与三个面相截, 故截面多边形边数小于等于 4 而大于等于 3。

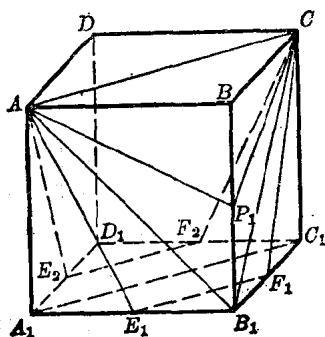


图 1.13

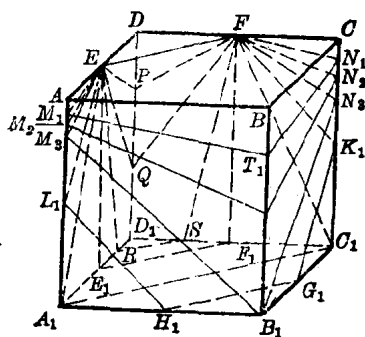


图 1.14

当截面过上底面正方形两邻边 AD 、 DC 的中点 E 、 F 时, 截面形状既有三角形(图 1.14 中的 $\triangle EQF$ 、 $\triangle ED_1F$ 等); 也有四边形(图中的等腰梯形 $ERSF$ 、矩形 EE_1F_1F 、等腰梯形 EA_1C_1F 等); 又有五边形(图中的五边形 $EM_1T_1N_1F$ 、 $EM_2B_1N_2F$ 、...等)还有六边形(图中的六边形 $ELHGKF$ 、 $EL_1H_1G_1K_1F$ 、 $EL_2H_2G_2K_2F$ 等)。即截面最多与六个面相截, 最少与三个面相截, 故截面多边形边数小于等于 6 而大于等于 3。而数字 6 是正方体的面数。

综上所述, 截面多边形的边数, 是由截面与多面体的面数决定的, 截平面至少与三个面相截才能构成边数最少的多边形——三角形, 截平面又至多与多面体的所有面都相截, 设面

数为 F ，则能构成边数最多的多边形 F 边形。于是我们就可以由特殊得到一般规律，设多面体面数为 F ，截面多边形边数为 n ，则有

$$3 \leq n \leq F.$$

即截面多边形的边数大于等于 3，而小于等于被截多面体的面数 F 。

§ 1.3 截面确定的基本原则

截面问题，实际上是截面的确定问题，它是研究确定的截平面对确定的几何体相截，得到确定的平面多边形或平面曲线图形的问题。离开了截面确定的基本原则，就无法解决截面问题。

例如，图 1.15 所示，一个确定的长方体，有三个不在一直线上的点 P 、 Q 、 R ，试作出过 P 、 Q 、 R 三点的截面。

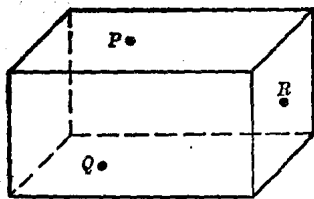


图 1.15

从理论上说，经过 P 、 Q 、 R 三点的平面存在且唯一，因而这个截平面与长方体相截的交线也是确定的，从而确定了截面的形状、大小。然而事实并不这样，因为图中并没有给出 P 、 Q 、 R 三点的确定位置，你可以理解为 P 在上底面上、 Q 在正前方的侧面上、 R 在右侧面上，也可理解为 P 、 Q 、 R 都在长

方体的内部或者都在长方体的外部或者其中一点在长方体内部，其余都在长方体外部等等，对于每一种可能你都可以作出长方体的截面 PQR ，这样就有各种各样的截面。如图 1.16 是当 P, Q, R 在长方体三个相邻面上时所作出截面，而图 1.17 是当 P, Q, R 三点都在长方体内部时所作的截面，两者完全不同。

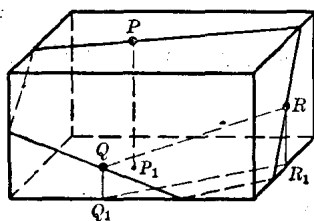


图 1.16

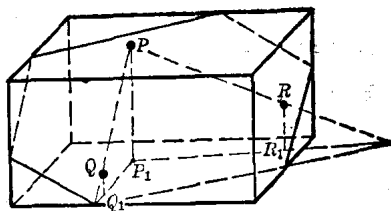


图 1.17

以上情况，充分说明截面的确定问题必需符合某些基本原则以克服这些不确定因素的干扰。

截面确定有三条基本原则（图 1.18）：

1. 点 必须给出它在某一平面内的射影，这样的点才可以称为确定的点或完整的点；

2. 直线 必须给出直线上任意两点在某一平面内的射影，这样的直线才是确定的直线或称完整的直线。

3. 平面 必须给出此平面内任意不在一直线上的三个点在某一平面内的射影，这样的平面才是确定的平面或完整的平面。

符合了这三条基本原则的截面才是确定的。这三条基本原则不仅对于截面的确定适用，而且也是空间位置关系问题可解性的重要依据，必须引起我们足够的重视。其理论依据可

