JIHE ZONGHE JIEFA

几何综合解法

方昌武 编

吉林人民出版社

Jihe Zonghe Jiefa

几何综合解法

方昌武 编

吉林人民出版社

几 何 综 合 解 法

方 昌 武　　编

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
通化市印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　10.5印张　230,000字
1984年8月第1版　1984年8月第1次印刷
印数：1—46,620册
统一书号：13091·176　定价：0.85

前　　言

相传，伟大的数学家、卓越的物理学家牛顿，早年曾潜心钻研著名的欧几里得《几何原本》和笛卡儿《坐标几何学》，深得其奥妙，终于成为举世闻名的科学家。

几何学从古埃及人在尼罗河畔测地术之基础上应运而生以来，不断发展，已成为数学中极为重要的组成部分。学好几何，是中学阶段乃至进一步学习所必须的。但是有的学生对一些较复杂的题目，尤其是综合运用代数、三角、解析、微积分等知识的综合题感到费解。为此，我编写了这本书。

本书是根据中学数学教学大纲的要求和现行统编数学教材的内容编写的，主要内容包括几何证明题、最大值最小值、点的轨迹和解综合题四部分，书后附有较详细的习题提示或略解，可供参考。本书通过一些典型例题的介绍和适量习题的训练，旨在帮助读者加深对基础知识、基本概念的理解与灵活运用，寻探一些解题思路、方法与技巧，从而提高独立分析、解决问题的能力及运算能力、逻辑思维能力。编写中力求带有综合性、系统性、由浅入深、循序渐进。

限于水平，疏漏错误之处请读者批评指正。

编　者

一九八三年十月于长春

目　　录

第一章　几何证明题

§1　几何题的多种证法

> **例 1**　求证：等腰三角形底边上任一点到两腰的距离之和等于腰上的高。

证明：（法 1）如图 1-1（甲）。

设 PD、PE 分别是底边 BC 上任一点 P 到两腰的距离，CH 是腰 AB 上的高。

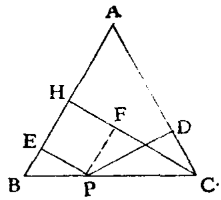

图 1-1（甲）

过 P 作 $PF\perp CH$ 交于 F，在矩形 $PFHE$ 中，$HF=PE$　　（1）

在 $rt\triangle FPC$ 和 $rt\triangle DPC$ 中，

$\angle B=\angle FPC=\angle C$，$PC$ 公用，

$\therefore$ $rt\triangle FPC\cong rt\triangle DPC$，$\therefore$ $FC=PD$(2)

由(1)和(2)两式，可得　$PD+PE=FC+HF=CH$。

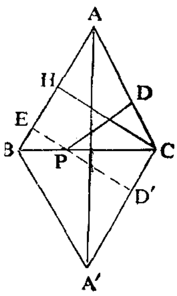

图 1-1（乙）

（法 2）如图 1-1（乙）。以 BC 为对称轴，作 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 的对称图形。

$\therefore$　$PD'=PD$，由 $AB\parallel A'C$，

$\therefore\quad CH=D'E.$

即 $PE+PD=PE+PD'=CH.$

(法 3) 连 AP，有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}$

即得 $\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}AB\cdot PE+\frac{1}{2}AC\cdot PD$

由 $AB=AC$， $\therefore\quad CH=PE+PD.$

(法 4) 设 $\angle ABC=\angle ACB=\alpha.$

$$\left.\begin{array}{l}PD=PC\cdot\sin\alpha\\PE=PB\cdot\sin\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow PD+PE=BC\cdot\sin\alpha$$

而$CH=BC\cdot\sin\alpha$， $\therefore\quad PD+PE=CH.$

(法 5) 以 BC 所在直线为 x 轴， BC 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系。

设 $B(-a,0)$，$C(a,0)$，$A(0,b)$，$P(c,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}P\text{ 点到 }AB\text{ 的距离为 }d_1=\dfrac{|bc+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\P\text{ 点到 }AC\text{ 的距离为 }d_2=\dfrac{|ab-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\C\text{ 点到 }AB\text{ 的距离为 }d\ \ =\dfrac{|2ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}\right\}\Rightarrow d_1+d_2=d.$$

例 2 从圆外一点引圆的一条割线和一条切线，切线长的平方等于割线上从这点到两个交点的线段长的积。

证明：(法 1) 如图 1-2 (甲). 连 AT BT，在$\triangle PAT$ 和 $\triangle PTB$ 中， $\angle PTA=\angle PBT$ (弦切角)，$\angle P$ 公用，

$\therefore\quad \triangle PAT\backsim\triangle PTB$， $\therefore\quad \frac{PT}{PA}=\frac{PB}{PT}$

所以　$PT^2=PA\cdot PB$.

（法2）如图1-2（甲）.连PO、OA、OB、OT，　设　$PO=a$，$AO=OB=OT=r$.

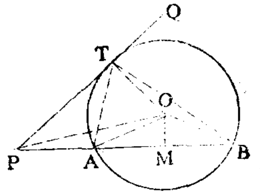

图 1-2（甲）

作$OM\perp AB$交于M，M是AB中点，在$rt\triangle POT$中，

$$PT^2=a^2-r^2 \qquad (1)$$

在$rt\triangle POM$和$rt\triangle AOM$中，　有

$$a^2-r^2=PM^2-AM^2=(PM-AM)(PM+AM)$$
$$=PA\cdot PB \qquad (2)$$

由（1）、（2）　∴　$PT^2=PA\cdot PB$.

（法3）如图1-2（甲）　设　$\angle PTA=\angle PBT=\alpha$，$\angle TAB=\angle BTQ=\beta$，$\angle PAT=\angle PTB=180^\circ-\beta$.

由正弦定理，

$$\left.\begin{array}{l} PT=\dfrac{PA\cdot\sin\beta}{\sin\alpha} \\ PT=\dfrac{PB\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}\end{array}\right\} \quad \therefore \quad PT^2=PA\cdot PB.$$

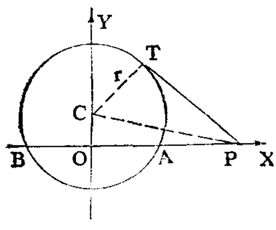

图 1-2（乙）

（法4）如图1-2（乙）建立坐标系．设圆C半径r，圆心$C(0,a)$，$P(b,0)$．∴　$|PC|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|PT|^2=a^2+b^2-r^2$，　圆C的方程是：$x^2+(y-a)^2=r^2$　$(a<r)$

∴　$B(-\sqrt{r^2-a^2},\ 0)$、$A(\sqrt{r^2-a^2},\ 0)$.

$$由\left\{\begin{array}{l}|PA|=b-\sqrt{r^2-a^2} \\ |PB|=b+\sqrt{r^2-a^2}\end{array}\right. \Rightarrow |PA|\cdot|PB|=a^2+b^2-r^2$$
$$=|PT|^2.$$

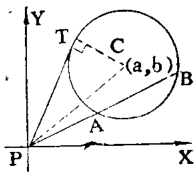

图 1-2（丙）

（法 5）如图 1-2（丙）建立坐标系。P 为原点，圆心 $C(a,b)$，圆半径 r，

$$\therefore \quad |PT|^2 = a^2 + b^2 - r^2,$$

PB 直线方程 $\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \end{cases}$（$t$ 是参数）代入圆的方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$，

整理得 $\quad t^2 - 2t(a\cos\theta + b\sin\theta) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

此一元二次方程的 t 是 P 点到 A 或 B 的距离，

$$\therefore \quad t_1 \cdot t_2 = |PA| \cdot |PB| = a^2 + b^2 - r^2 = |PT|^2.$$

（法 6）如图 1-2（丁），设 P 为极点，圆心 C 在极轴上，建立极坐标系。

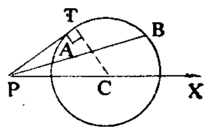

图 1-2（丁）

设圆 C 半径为r,$C(\rho_0,\theta)$,$A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta)$。 $\therefore$ $|PT|^2 = \rho_0^2 - r^2$，由余弦定理，$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\theta$。

即 $\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos\theta + \rho_0^2 - r^2 = 0$。 ρ_1,ρ_2 是此方程两个根， $\therefore$ $|PA||PB| = \rho_1 \cdot \rho_2 = \rho_0^2 - r^2 = PT^2$。

（此题还有其它证明方法）

说明：一道几何题可有多种证法。除传统证法外，还有代数、三角、解析等证法，这些证法都能够正确地运用基础知识推导出正确结论。在实际证明问题时，从多方面考虑是有益的，取其中之一即可，尤其是在解综合性问题时，这些证明方法，有利于分析问题和解决问题。

§2 代数证法

用代数法证明几何问题，就是根据图形的性质，把图形中的线段（或角）间的关系式转化为代数式（或用简单文字

代替线段或角)，经恒等变形、解方程或运用函数的性质，逐步推导出所要寻求的结论.

1．利用等量代换证明问题

例1 四边形 $ABCD$ 中，AC 和 BD 交于 E，$\angle ACB$、$\angle ADB$ 的平分线交于 O，求证：$\angle COD=\frac{1}{2}(\angle CAD+\angle CBD)$.

证明：如图1-3，设 $\angle COD=x$，$\angle CAD=2\alpha$，$\angle DBC=2\beta$，$\angle BCA=2\gamma$，$\angle ADB=2\delta$，连 OE，$\angle CED$ 是 $\triangle ODE$ 和 $\triangle OEC$ 的两外角和，

$\therefore\ \angle CED=\gamma+x+\delta$ （1）

又 $\angle CED$ 是 $\triangle ADE$、$\triangle EDC$ 的外角，

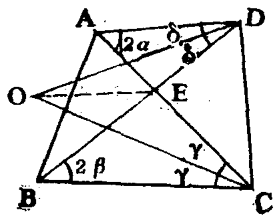

图 1-3

$$\therefore\ \angle CED=2\alpha+2\delta \quad (2)$$

$$\angle CED=2\beta+2\gamma \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{由(1)和(2)，得 } \gamma+x+\delta=2\alpha+2\delta \\ \text{由(1)和(3)，得 } \gamma+x+\delta=2\beta+2\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\quad x=\alpha+\beta$$

$$\therefore\ \angle COD=\frac{1}{2}(\angle CAD+\angle CBD).$$

例2 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A>\angle B>\angle C$，求证：$\angle A>60°$；$\angle C<60°$；$\angle B>45°$.

证明： $\because\ \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

又 $\angle A>\angle B>\angle C$，

$\therefore\quad 3\angle A>\angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore\quad \angle A>60°$;

同理可得　$\angle C<60°$;

又　$\angle B+\angle C=180°-\angle A$　（$\angle A$是锐角）

$\therefore\quad \angle B+\angle C>90°$

$2\angle B>\angle B+\angle C>90°$，　$\therefore\quad \angle B>45°$。

说明：由等量关系也可转化为不等量关系，这是解题思路之一。

例 3　$\triangle ABC$ 中，三条角平分线长分别是 t_a、t_b、t_c，三边长是 a、b、c，求证：$t_a \cdot t_b \cdot t_c<a\cdot b\cdot c$。

证明：如图 1-4，设　$AD=t_a$，延长 AD 与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 E，连 EC，　$\because\quad \angle BAD=\angle CAE$，$\angle ABD=\angle AEC$，

$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle AEC$，　得 $t_a\cdot AE=bc$。

$\because\quad t_a<AE$，$AE>0$，

$\therefore\quad t_a^2<bc$，

同理，可得　$t_b^2<ac$，$t_c^2<ab$。

因此，　$t_a^2\cdot t_b^2\cdot t_c^2<a^2\cdot b^2\cdot c^2$

$\therefore\quad t_a\cdot t_b\cdot t_c<a\cdot b\cdot c$。

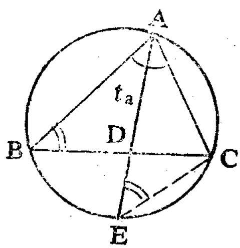

图 1-4

2．运用恒等变形、解方程证明有关问题

例 4　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$、$\angle C$ 平分线分别交对边 AC、AB 于 D、E，且 $BE=CD$，求证：$AB=AC$。

证明：如图 1-5，　设　$AB=c$，　$BC=a$，　$AC=b$，

$BE = CD = m$,　∴　$AE = c - m$,
$AD = b - m$.

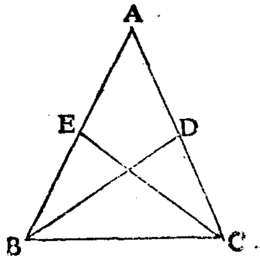

图 1-5

∵　BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore & \dfrac{c}{a} = \dfrac{b-m}{m} \Rightarrow m = \dfrac{ab}{a+c} \\ \text{同理} & \dfrac{b}{a} = \dfrac{c-m}{m} \Rightarrow m = \dfrac{ac}{a+c}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{ab}{a+c} = \frac{ac}{a+b}.$$

整理得　$(a+b+c)(b-c) = 0$，　∵　$a+b+c \neq 0$，

∴　$b = c$，　即　$AB = AC$.

3．利用参数证明有关问题

例 5　AB 是 $\odot O$ 的直径，　P 是 $\odot O$ 上一点，$PC \perp AB$ 交于 C，以 P 为圆心，　PC 为半径的 $\odot P$ 与 $\odot O$ 交于 D、E，DE 与 PC 交于 M，求证：M 是 PC 的中点。

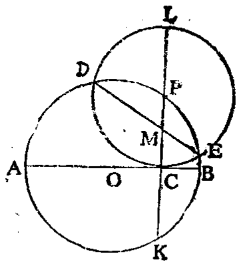

图 1-6

证明：如图 1-6，　延长 PC 交 $\odot O$ 于 K 交 $\odot P$ 于 L，∴ $CK = PC = PL = r$.

设　$MC = x$，$PM = y$，$DM = m$，　$EM = n$，（这里 m、n 是参数）

$$\left.\begin{array}{l}\text{在} \odot O \text{中，} mn = y(x+r) \\ \text{在} \odot P \text{中，} mn = x(y+r)\end{array}\right\} \Rightarrow ry = rx$$

∴　$x = y$，　M 是 PC 的中点。

说明：运用参量（或参数）便于列出方程式，消参过程就是推导出结论的过程。

> **例 6** A 是 $\odot O$ 外一点，过 A 作切线 AB、AC，B、C 是切点，D、E 是 AB、AC 的中点，P 是 DE 上一点，PT 是 $\odot O$ 的切线，T 是切点。
>
> 求证：$AP=PT$。

证明：如图 1-7，连 AO 交 DE 于 M、交 BC 于 N，连 OC，设 $AO=a$，$PM=x$，$NO=y$，$\odot O$ 半径为 r，在 $rt\triangle AOC$ 中，$r^2=y\cdot a$，

$$\therefore \quad y=\frac{r^2}{a},\quad AM=\frac{1}{2}\left(a-\frac{r^2}{a}\right).$$

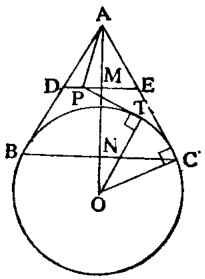

图 1-7

在 $rt\triangle APM$ 中，

$$PA^2=x^2+\left\{\frac{1}{2}\left(a-\frac{r^2}{a}\right)\right\}^2 \qquad (1)$$

在 $rt\triangle POM$ 中，

$$PO^2=x^2+\left\{a-\frac{1}{2}\left(a-\frac{r^2}{a}\right)\right\}^2=x^2+\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{r^2}{2}\right)\right\}^2$$

在 $rt\triangle POT$ 中，

$$PT^2=PO^2-r^2=x^2+\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{r^2}{a}\right)\right\}^2-r^2$$

$$=x^2+\left\{\frac{1}{2}\left(a-\frac{r^2}{a}\right)\right\}^2 \qquad (2)$$

由(1)、(2)得 $PA^2=PT^2$，即 $PA=PT$。

说明：这是运用等量代换的方法消去一些参量，从而得出结论的，这是比较简便的方法之一。

4．利用勾股定理证明有关问题

例 7 求证：两圆外切，外公切线长是两圆直径的比例中项。

证明：如图 1-8，设 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切于 P，外公切线长 $AB=a$，$\odot O_1$ 半径为 R，$\odot O_2$ 半径为 r。

过 O_2 作 $O_2C \perp AO_1$ 交于 C，

在 $rt\triangle CO_1O_2$ 中，$OC_1=R-r$，$O_2C=AB$，$O_1O_2=R+r$。

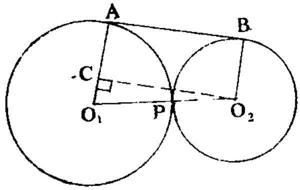

图 1-8

$\therefore \quad AB^2=a^2=(R+r)^2-(R-r)^2=2R\cdot 2r$。

即外公切线长是相切两圆直径的比例中项。

例 8 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 上的高，且 $AD=BC$，H 是垂心，M 为 BC 的中点，求证：$HM+DH=\frac{1}{2}BC$。

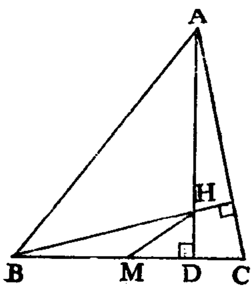

图 1-9

证明：设 $AD=BC=2a$，$HD=m$，$HM=n$，$DM=x$，$\therefore$ $DC=a-x$，$BD=a+x$。

在 $rt\triangle ADC$ 和 $rt\triangle BHD$ 中，$\angle DAC=\angle HBD$，

$\therefore \quad rt\triangle ADC \backsim rt\triangle BHD \Rightarrow$

$$m=\frac{a^2-x^2}{2a} \qquad (1)$$

在 $rt\triangle HMD$ 中，

$$n^2 = x^2 + m^2 \qquad (2)$$

将(1)代入(2) $\therefore\ n^2 = x^2 + \left(\frac{a^2 - x^2}{2a}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + x^2}{2a}\right)^2$

$$\therefore\ n = \frac{a^2 + x^2}{2a} \qquad (3)$$

由(1)+(3)，得 $m + n = a$，

即 $MH + HD = \frac{1}{2}BC$。

说明：设 $BC = 2a$，$DM = x$，是为了在推导过程上创造方便条件，$DM = x$ 又是参数，利用它根据勾股定理就可顺利得到结论。

例 9 $\odot O$ 的弦 DE 垂直于直径 AB 交于 C，以 AC 为直径的 $\odot O_1$ 半径为 r_1，以 CB 为直径的 $\odot O_2$ 半径为 r_2，$\odot P$ 半径 R_1 与 $\odot O_1$ 外切，与 $\odot O$ 内切，与 DE 切于 N。求证：$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$。

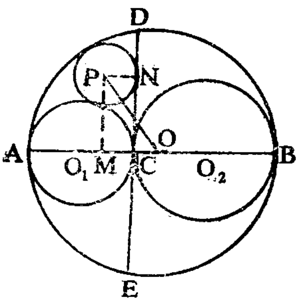

图 1-10

证明：如图 1-10，设 $\odot O$ 半径是 R，$OP = R - R_1$，作 $PM \perp AB$，$PN \perp DE$，$\therefore\ PN = R_1$，$\therefore\ PM = CN$，CN 是 $\odot P$ 和 $\odot O_1$ 的外公切线长，

$\therefore\ CN^2 = PM^2 = 4r_1 \cdot R_1$，

又 $MO = AO - AM = R - 2r_1 + R_1 = R - (2r_1 + R_1)$，

在 $rt\triangle PMO$ 中，

$$OP^2 = PM^2 + MO^2$$

即 $(R - R_1)^2 = 4R_1 r_1 + \{R - (2r_1 + R_1)\}^2$

将　$R=r_1+r_2$ 代入整理得　$r_1r_2=(r_1+r_2)R_1$

$$\therefore\quad \frac{1}{R_1}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}.$$

说明：勾股定理是数学中最重要的定理之一，应用范围很广，作用也很大，在解题时，可根据具体情况充分运用。

5．正确掌握、熟练运用有关定理证明问题

（1）运用三角形面积公式证明有关问题

例10　半圆的圆心 O 在 $rt\triangle ABC$ 的斜边 BC 上，且和两直角边相切，两直角边为 a、b，半圆半径为 r，求证：$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

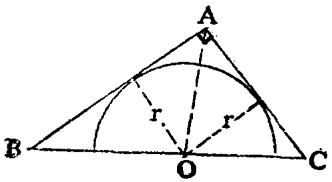

图 1-11

证明：如图 1-11，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$$

又　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OAC}$

$$=\frac{1}{2}(a+b)r$$

$\therefore\quad ab=(a+b)r,$

即　$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

例11　设 X、Y、Z 分别是 $\triangle ABC$ 内一点 P 到三边的距离，h_1、h_2、h_3 分别是 BC、CA、AB 上的高，求证：$\dfrac{X}{h_1}+\dfrac{Y}{h_2}+\dfrac{Z}{h_3}=1$.

证明：由同底两三角形面积比等于高的比，