原子物理学题解

杨 德 田

83—

147页

安徽大学物理系

前　　言

这本《原子物理学题解》包括四个部分，第一部分是对北京大学物理系褚圣麟教授编的《原子物理学》（人民教育出版社，1979年版）书中全部习题所作的解答；第二部分，收集了国内部分高校的研究生入学试题，并给出了详解；第三部分，是从《美国研究生统考物理试题与题解》（计量出版社，1980年版）中选编的部分美国研究生成绩考试（GRE）题解；最后一部分，是从《PROBLEMS IN OPTICS》（1973年英文版）等中摘编的部分法国光学学士学位题解。目的是为了帮助同学加深对本课程内容的理解和提高解题能力。由于水平有限，加之编写时间仓促，错误之处在所难免，请批评指正。

在编写这本“题解”的过程中，得到了许多同志的支持和鼓励。系主任岳德铨同志和理论物理教研室主任孙增灼同志仔细地审阅了手稿，提出了很多宝贵意见。此书的编辑和出版，得到了我系普通物理第一教研室全体同志的支持和协助，特别是李汉东同志的多方协助，他不仅对书稿提出些宝贵的意见，还承担了书稿的抄写等工作。本书的排印工作还得到了我校印刷厂的热情支持。在此，对他们一并表示感谢。

杨德田

一九八一年八月于安徽大学

目　　录

（一）

《原子物理学》（褚圣麟编）习题解

第一章　原子的基本状况

1. 若卢瑟福散射用的α粒子是放射性物质镭c′放射的，其动能为7.68×10^{6}电子伏特。散射物质是原子序数z＝79的金箔。试问散射角θ＝150°所对应的瞄准距离b多大？

解：∵偏转角θ与瞄准距离b有如下关系：

$$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}=4\pi\varepsilon_0\frac{Mv^2}{2Ze^2}b,$$

$$\therefore\quad b=9\times10^{9}\times\frac{79\times(1.60\times10^{-19})^2}{7.68\times10^{6}\times1.60\times10^{-19}}\ \mathrm{ctg}\frac{150^\circ}{2}$$

$$=3.97\times10^{-15}[\mathrm{m}]。$$

2. 已知散射角为θ的α粒子与散射核的最短距离为：

$$r_m=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{2Ze^2}{Mv^2}\left(1+\frac{1}{\sin\theta/2}\right),$$

试问上题α粒子与散射的金原子核之间的最短距离r_m多大？

解：代入已知数值得：

$$r_m=9\times10^{9}\times\frac{2\times79\times(1.60\times10^{-19})^2}{2\times7.68\times10^{6}\times1.60\times10^{-19}}\left(1+\frac{1}{\sin75^\circ}\right)$$

$= 3.01 \times 10^{-14}$〔m〕。

3．若用动能为1兆电子伏特的质子射向金箔。问质子与金箔原子核可能达到的最小距离多大？又问如用同样的能量的氘核（氘核带一个$+e$电荷而质量是质子的二倍，是氢的一种同位素的原子核。）代替质子，其与金箔原子核的最小距离多大？

解：当散射角为θ的入射粒子与散射核的最短距离公式中$\theta = 180°$时，即得入射粒子与散射核之间可能达到的最小距离：

$$r_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q_1q_2}{Mv^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1q_2}{E_k},$$

式中q_1、q_2分别为入射粒子和靶核所带的电荷，E_k为入射粒子的动能。

可见，只要入射粒子所带电荷相同，动能相同，则与靶核的最小距离就相同。故质子与同样能量的氘核与金箔原子核的最小距离相同，均为：

$$r_m = 9 \times 10^9 \times \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 79 \times 1.60 \times 10^{-19}}{10^6 \times 1.60 \times 10^{-19}}$$

$$= 1.14 \times 10^{-13}〔m〕。$$

4．钋放射的一种α粒子的速度为1.597×10^7米/秒，正面垂直入射于厚度为10^{-7}米、密度为1.932×10^4公斤/米^{3}的金箔。试求所有散射在$\theta > 90°$的α粒子占全部入射粒子的百分比。已知金原子量为197。

解：$$\eta = \int \frac{dn}{n} = \int \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 Nt \left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 Nt \left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 4\pi \int_{90°}^{180°} \frac{\cos\theta/2}{\sin^3\theta/2} d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 Nt\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 4\pi\left[\frac{-1}{\sin^2 90^\circ}-\frac{-1}{\sin^2 45^\circ}\right]$$

$$=4\times3.142\times(9\times10^9)^2\times\frac{1.932\times10^4\times6.02\times10^{23}}{197\times10^{-3}}\times$$

$$\times10^{-7}\times\left[\frac{79\times(1.60\times10^{-19})^2}{4\times1.60\times10^{-27}\times(1.597\times10^7)^2}\right]^2\times$$

$$\times(2-1)$$

$$=8.54\times10^{-6}。$$

式中N为靶单位体积里的原子数，t 为靶的厚度。

5．α 粒子散射实验的数据在散射角很小（$\theta\leqslant45^\circ$）时与理论值差得较远，是什么原因？

答：卢瑟福的散射公式是假定α粒子通过金属箔只经过一次散射，而实际是要受到好多原子核的多次散射，因为一张合用的金属箔也有几百个到几千个原子层厚。但由于原子核很小（10^{-14}m），核间空间很大，因此，α粒子通过金属箔时，多次很接近原子核的机会不大。只有瞄准距离 b 小时，散射角才大。实际观察到的较大的θ角可以设想是由于一次大角散射和多次小角散射合成的。但多次小角散射左右上下各方向都有可能，合并起来会抵消一部分，因此有大角散射存在情况下，小角散射可以不计。一次散射理论可以适用。至于实际观察到较小的θ角，那是多次小角散射合成的。既然都是小角散射，哪一个也不能忽略，一次散射理论就不适用。所以α 粒子散射实验的数据在散射角很小时与理论值差得较远。

6．已知α粒子质量比电子质量大7300 倍。试利用中性粒子弹性碰撞来证明：α粒子散射“受电子的影响是微不足道的”。

证：设v_α和v'_α分别为α粒子碰撞前后的速度，而电子碰撞前后的速度分别为$v_e=0$和v'_e。

若令m_α和m_e分别代表α粒子和电子的质量，则$m_\alpha = 7300m_e$，由能量、动量守恒定律：

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha'^2 + \frac{1}{2}m_e v_e'^2,$$

$$m_\alpha v_\alpha = m_\alpha v'_\alpha + m_e v'_e。$$

联立解得：　　$v'_\alpha \doteq v_\alpha$。

7．能量为3.5兆电子伏特的细α粒子束射到单位面积上质量为1.05×10^{-2}公斤/米²的银箔上（图1—1），α粒子与银箔表面成60°角。在离α入散线成θ＝20°的方向上，离银箔散射区距离L＝0.12米处放一窗口面积为6.0×10^{-5}米²的计数器。测得散射进此窗口的α粒子是全部入射α粒子的百万分之29，若已知银的原子量为107.9。试求银的核电荷数Z。

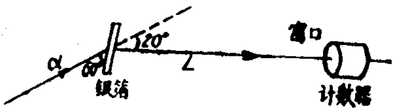

图 1-1

解：∵　$$\frac{dn}{d\Omega}\sin^4\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)Nnt\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2,$$

∴　$$Ze = \sqrt{\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2}{\frac{\rho}{A}N_0\frac{t}{\sin\varphi}}\,\frac{(2E)^2}{e^2}\,\eta\,\frac{\sin^4\theta/2}{\frac{S}{L^2}}}$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 \frac{2EL\sin^2\theta/2}{e}\sqrt{\frac{\eta A\sin\varphi}{\rho tSN_0}}$$

$$= \frac{1}{9\times10^9}\frac{2\times3.5\times10^6\times1.6\times10^{-19}\times0.12\sin^2 10^\circ}{1.6\times10^{-19}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2.9\times\overset{10^{-5}}{\cancel{10^{8}}}\times107.9\times10^{-3}\sin60^\circ}{1.05\times10^{-2}\times6.0\times10^{-5}\times6.0\times10^{23}}}$$

$$= 7.5\times10^{-18}〔C〕。$$

故银的核电荷数

$$Z = \frac{7.5\times10^{-18}}{1.6\times10^{-19}} = 47。$$

8．设想铅（Z = 82）原子的正电荷不是集中在很小的核上，而是均匀分布在半径约为10^{-10}米的球形原子内，如果有能量为10^6电子伏特的α粒子射向这样一个“原子”试，通过计算论证这样的α粒子不可能被具有上述设想结构的原子产生散射角大于90°的散射。这个结论与卢瑟福实验结果差得很远，这就说明原子的汤姆逊模型是不能成立的（原子中电子的影响可以忽略）。

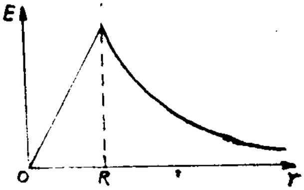

图1-2

解：利用高斯定理对于电荷均匀分布的球体，电场为：

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze}{r^2}, & r\geqslant R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Zer}{R^3}, & r\leqslant R \end{cases}$$

当b⩾R时，由卢瑟福公式

$$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{Eb}{Ze^2}$$

$$= \frac{1}{9\times10^{9}}\cdot\frac{10^{6}\times1.6\times10^{-19}\times10^{-10}}{82\times(1.6\times10^{-19})^{2}}$$

$$= 846.9,$$

得$\theta \doteq 8'$。可见，这种情况只能得到很小的散射角。

对于$b<R$的情况，库仑斥力随r减少而线性减少（参见图1—2），这时散射角公式中的核电荷（Ze）要用有效核电荷（Zeb^3/R^3）替代，（见图1—3），则得：

$$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{Eb}{Ze^2b^3/R^3} = 4\pi\varepsilon_0\frac{E}{Ze^2}\frac{R^3}{b^2},$$

恒大于846.9，散射角θ也就恒小于$8'$。当$b=0$时，$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\to\infty$，$\theta=0°$。可见汤姆逊模型不管在什么情况下，都不可能产生散射角大于90°的散射，所以不得不抛弃它。

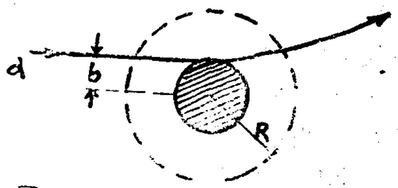

图1-3　阴影部分为有效电荷

第二章　原子的能級和輻射

1. 试计算氢原子的第一玻尔轨道上电子绕核转动的频率、线速度和加速度。

解：由于电子绕核作园周运动，其向心力等于库仑力：

$$m\frac{v^2}{a_1} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_1^2},$$

其中 $a_1 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{4\pi^2 me^2} \doteq 0.529\times10^{-10}$〔m〕。由此求得电子的线速度

$$v = 2.18\times10^6 \quad 〔m/s〕。$$

电子绕核转动的频率

$$f = \frac{v}{2\pi a_1} = 6.56\times10^{15} \quad 〔s^{-1}〕。$$

电子的加速度

$$a = \frac{v^2}{a_1} = 8.98\times10^{22} \quad 〔ms^{-2}〕。$$

2. 试由氢原子的里德伯常数计算基态氢原子的电离电势和第一激发电势。

解：$\because \quad \tilde{v} = R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$，

电离情况对应于 $n=\infty$，即 $\tilde{v}_\infty = R_H$。

$$\therefore \quad U_\infty = \frac{hcR_H}{e} = 13.6〔v〕。$$

第一激发态对应于 $n=2$，即 $\tilde{v}_1 = \frac{3}{4}R_H$，

$$\therefore \quad U_1 = \frac{3}{4}V_\infty = \frac{3}{4}\times13.6 = 10.2 \ 〔v〕。$$

3. 用能量为12.5电子伏特的电子去激发基态氢原子。问受激发的氢原子向低能级跃迁时，会出现哪些波长的光谱线？

解：$\because \quad hc\tilde{v} = hc\,R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$，

$$\therefore \quad n = \sqrt{\frac{hcR_H}{hcR_H - hc\tilde{v}}}$$

$$=\sqrt{\frac{6.626\times10^{-34}\times3\times10^{8}\times1.0967858\times10^{7}}{6.626\times10^{-34}\times3\times10^{8}\times1.0967858\times10^{7}-12.5\times1.6\times10^{-19}}}$$

$=3.48$。

因n只能取正整数、故 $n=3$，所以能发出 $\frac{n(n-1)}{2}=$ $=\frac{3(3-1)}{2}=3$ 种波长的光谱线，其波长值如下：

$$\frac{1}{\lambda_1}=R_H\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)，即\quad \lambda_1=1025.7\,\text{Å}.$$

$$\frac{1}{\lambda_2}=R_H\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)，即\quad \lambda_2=1215\,\text{Å}.$$

$$\frac{1}{\lambda_3}=R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)，即\quad \lambda_3=6563\,\text{Å}.$$

4．试估算一次电离的氦离子 H_e^+、二次电离的锂离子 L_i^{++} 的第一玻尔轨道半径、电离电势、第一激发电势和赖曼系第一条谱线波长分别与氢原子的上述物理量之比值。

解：H_e^+、L_i^{++} 都是类氢原子、由玻尔理论可列表如下：

	r_1(Å)	V_∞(V)	V_1(V)	λ_1(Å)
H	0.529	13.6	10.2	1215
He^+	0.265	54.6	40.8	304
L_i^{++}	0.176	122.5	91.5	135

其中 $\tilde{\nu}=Z^2R\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$。

	r_1	V_∞	V_1	λ_1
He^+/H	0.501	4.01	4	0.25
L_i^{++}/H	0.333	9.01	8.97	0.11

若只作粗略估算，则近似可取$R_H=R_{He}=R_{Li}=R$，于是由上述关系得所求各量的比值为：

	r_1	V_∞	V_1	λ_1
He^+/H	0.5	4	4	0.25
Li^{++}/H	0.33	9	9	0.11

5. 试问二次电离的锂离子L_i^{++}从其第一激发态向基态跃迁时发出的光子，是否有可能使处于基态的一次电离的氦离子H_e^+的电子电离掉？

解：$\because$ Li $hc\tilde{v}_1=9\,hc\,R_\infty\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{27}{4}hcR_\infty$， $Z=3$

He $hc\tilde{v}_\infty=4hcR_\infty\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty}\right)=4hcR_\infty$， $Z=2$

$hc\tilde{v}_\infty<hc\tilde{v}_1$。 $=\frac{16}{4}hcR_\infty$

$\therefore$不仅可使处于基态的H_e^+的电子电离掉，而且还使电离的电子具有$(11/4)hcR_\infty$焦耳的动能。

6. 氢与其同位素氘（质量数为2）混在同一放电管中，摄下两种原子的光谱线。试问其巴耳末系的第一条(H_α)光谱线之间的波长差$\Delta\lambda$有多大？已知氢的里德伯常数$R_H=1.0967758\times10^7$米$^{-1}$，氘的里德伯常数$R_D=1.0970742\times10^7$米$^{-1}$。

解： $\because\quad \dfrac{1}{\lambda}=R\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}\right)=\dfrac{5}{36}R,$

公式两端取微分，得

$$-\frac{1}{\lambda^2}d\lambda=\frac{5}{36}dR,\text{ 或 }-d\lambda=\frac{5}{36}\lambda^2 dR=\frac{dR}{\frac{5}{36}R^2}$$

因而近似地有：

$$\lambda_{H\alpha}-\lambda_{D\alpha}=\frac{R_D-R_H}{\frac{5}{36}R_H^2}$$

$$=\frac{1.0970742\times10^7-1.0967758\times10^7}{\frac{5}{36}\times(1.0967758\times10^7)^2}$$

$$=1.79\times10^{-10}[m]=1.79(\text{Å}).$$

7. 已知一对正负电子绕其共同的质心转动会暂时形成类似于氢原子结构的"正电子素"。试计算"正电子素"由第一激发态向基态跃迁发射光谱的波长λ为多少Å？

解：首先我们来确定"正电子素"或"电子偶素"的里德伯常数。因正电子的质量与电子质量相同，所以

$$R_P=\frac{R_\infty}{1+(m/M)}=\frac{R_\infty}{1+(m/m)}=\frac{R_\infty}{2}$$

$$=\frac{1.0973731\times10^7}{2}=0.5486866\times10^7[m^{-1}].$$

代入公式：

$$\frac{1}{\lambda}=R_P\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right]=\frac{3}{4}R_P,$$

得：　　$\lambda = 2430\,\text{Å}$。

8．试证明氢原子中的电子从n＋1轨道跃迁到n轨道，发射光子的频率ν_n，当$n\gg 1$时光子频率即为电子绕第n玻尔轨道转动的频率。

解：处于n态的旋转频率是

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{v_n}{2\pi r_n}$$

$$=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m r_n^3}}$$

$$=\frac{4\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^3 h^3}.$$

所发射光子的频率是

$$\nu_n=cR_\infty\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=cR_\infty\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

当$n\gg 1$时，

$$\nu_n\doteq cR_\infty\frac{2n}{n^2n^2}=\frac{4\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^3 h^3},$$

证得　　$\nu_n=f$.

9．Li原子序数Z＝3，其光谱的主线系可用下式表示：$\tilde{\nu}=\frac{R}{(1+0.5951)^2}-\frac{R}{(n-0.0401)^2}$. 已知Li原子电离成$Li^{+++}$离子需要203.44电子伏特的功。问如要把$Li^+$离子电离为$Li^{++}$离子，需要多少电子伏特的功？

解：第一步，由已知公式求出$Li\to Li^+$所需的功：

$$E_1=hc\tilde{\nu}_\infty=hc\frac{R}{(1+0.5951)^2}$$

$$= 6.6262 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8} \times \frac{1.09727 \times 10^{7}}{1.5951^{2}}$$

$$= 8.5728 \times 10^{-19}[J] = 5.358[eV]。$$

第二步，$Li^{++} \rightarrow Li^{+++}$ 所需之功，由类氢原子公式得：

$$E_3 = Z^2hcR = 9hcR$$

$$= 196.31 \times 10^{-19}[J] = 122.69[eV]。$$

最后，$Li^{+} \rightarrow Li^{++}$所需之功为：

$$E_2 = 203.44 - (E_1 + E_3) = 75.392[eV]。$$

10．具有磁矩的原子在横向均匀磁场和横向非均匀磁场中运动时有什么不同？

答：具有磁矩的原子在横向均匀磁场中运动时，每个磁矩只受到一个使它转向磁场方向的力矩作用，而不改变原子的运动路经。但在横向非均匀磁场中运动时，每个磁矩不仅受到一个力矩作用，而且还受到一偏转力的作用。若$\frac{dB}{dz}$是非均匀磁场的梯度，磁矩$\vec{\mu}_s$和$\vec{B}$之间的夹角为θ，则磁矩$\vec{\mu}_s$上所受的净偏转力为

$$F_z = \mu_s \cos\theta \frac{dB}{dz}$$

这个力将迫使原子偏离原来路径。

11．在史特恩—盖拉赫实验中，处于基态的窄银原子束通过不均匀横向磁场，磁场梯度为$\frac{\partial B}{\partial z} = 10^3$特斯拉/米，磁极纵向范围$L_1 = 0.04$米（图2—1），从磁极到屏距离$L_2 = 0.10$米，原子的速度$v = 5 \times 10^2$米/秒。在屏上两束分开的距离$d = 0.002$米。试确定原子磁距在磁场方向上投影$\mu_z$的大小（设磁场边缘的影响可忽略不计）。

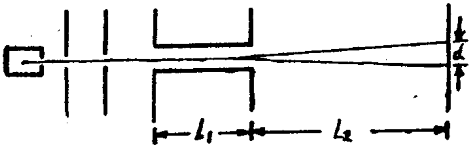

图 2-1

解：$\because \quad f=\mu\frac{dB}{dz}\cos\beta = \mu_z\frac{dB}{dz}$，

而 $\quad f = ma$，

$$\therefore \quad \mu_z = \frac{ma}{\frac{dB}{dz}}.$$

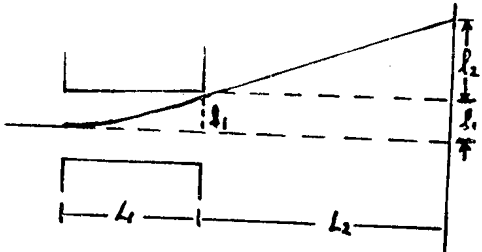

图 2-2

$\because \quad L_1 = vt_1, \quad l_1=\frac{1}{2}at_1^2$， 即 $\quad 2l_1 = a\left(\frac{L_1}{v}\right)^2$.

又 $\quad L_2 = vt_2$，$l_2 = v_1t_2 = at_1\cdot t_2$，即 $2l_2 = 2a\frac{L_1L_2}{v^2}$

则：$\quad d = 2l_1 + 2l_2 = \left[\left(\frac{L_1}{v}\right)^2 + 2\frac{L_1L_2}{v^2}\right]a$，

$$\therefore \quad a = \frac{v^2d}{L_1(L_1+2L_2)}.$$

$$\mu_z=\frac{mv^2d}{L_1(L_1+2L_2)\frac{dB}{dz}}$$

$$=\frac{107.88\times1.66\times10^{-27}\times(5\times10^2)^2\times0.002}{0.04(0.04+2\times0.10)\times10^3}$$

$$=0.927\times10^{-23}[J/T].$$

此值相当于一个玻尔磁子μ_B。

12．观察高真空玻璃管中由激发原子束所发光谱线的强度沿原子射线束的减弱情况，可以测定各激发态的平均寿命。若已知原子束中原子速度$v=10^3$米/秒，在沿粒子束方向上相距1.5毫米其共振光谱线强度减少到1/3.32。试计算这种原子在共振激发态的平均寿命。

解：∵激发态原子的数量随时间减少的规律为：

$$N=N_0e^{-t/\tau},$$

式中N_0是被激发原子的初始数量；τ是原子处在激发态的平均寿命。

由题意有：$\frac{N}{N_0}=e^{-t/\tau}$,

即：$$\frac{1}{3.32}=e^{-\frac{1.5\times10^{-3}/10^3}{\tau}}.$$

$$\therefore\ \tau=-\frac{1.5\times10^{-6}}{\ln\frac{1}{3.32}}=1.25\times10^{-6}[s].$$

第三章　　量子力学初步

1．波长为1Å的X光光子的动量和能量各为多少？

解：$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\frac{6.626\times10^{-34}\times3\times10^8}{10^{-10}}$