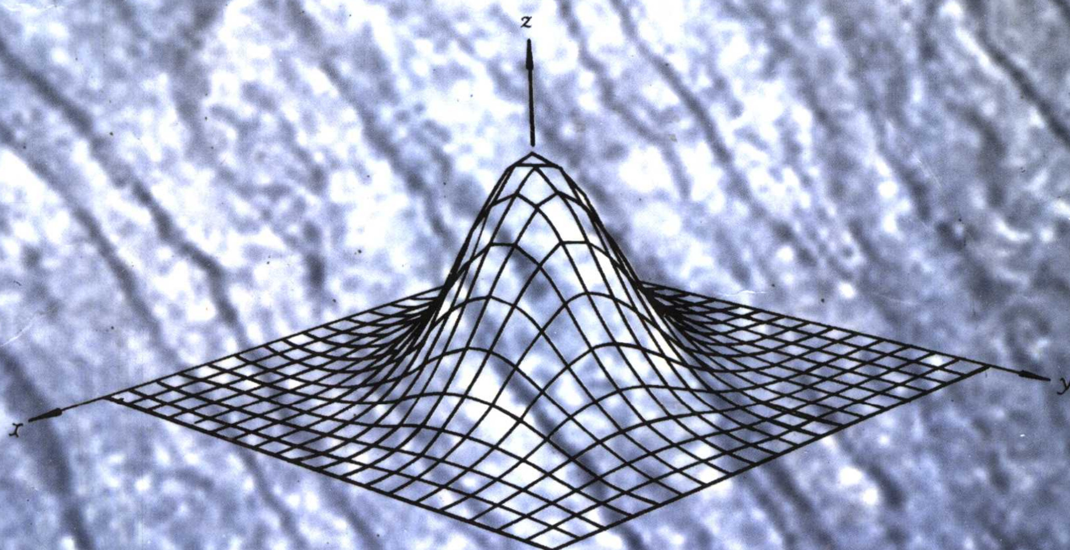
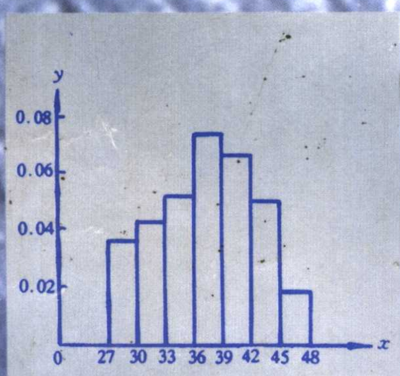
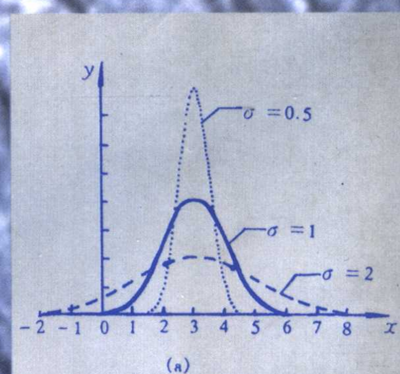
概率论与数理统计应用

施　雨　李耀武







西安交通大学出版社

概率论与数理统计应用

施　雨　　李耀武

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括概率论、数理统计两部分。第 1～4 章为概率论部分,介绍了概率论中的基本概念及基本原理:随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、极限定理等。第 5～9 章为数理统计部分,介绍了数理统计的基本概念及经典方法:参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等。在书末的附录中收编了部分统计方法的 C 语言程序。本书可作为工科各专业的本科生教材,也可供工程技术人员及报考工科类硕士研究生人员参考。

(陕)新登字 007 号

概率[redacted]与数理统计应用

施[redacted]雨　　李耀武

[redacted]任编辑　[redacted]景蓉　陆诗娣

[redacted]交[redacted]出版社出版发行

(西安市咸宁西[redacted]　[redacted]码:710049　电话:(029)3268316)

陕西省轻工印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:787×1092　1/16　印张:16　字数:384 千字

1998 年 2 月第 1 版　　1998 年 2 月第 1 次印刷

印数:1—5000

ISBN7－5605－0945－2/O·131　定价:15.00 元

前　言

概率论与数理统计是从数量上研究随机现象内在规律性的数学学科。随着科学技术的发展以及人们对随机现象规律性认识的需要，概率统计的思想方法正日益渗透到自然科学和社会科学的众多领域中。它的应用范围已遍及气象、水文、地质、物理、生物、医学、管理等领域，并且还在不断拓广。

本书是我们在 1994 年所编讲义的基础上，经过几年教学实践、做了数次修改写成的。针对工科学生学习概率统计的实际需要，根据教学大纲的要求，编写中力求简明准确地阐述概率论的基本概念与思想方法，在 48～52 学时内尽可能多地介绍一些数理统计的原理与方法。基于同样的考虑，我们在书末的附录 A 中收集、编写了统计方法的 C 语言程序，希望这些程序能有助于读者把概率统计的理论与方法直接应用到各自的工作实践中。

本书由概率论、数理统计两部分组成，共 9 章。其中施雨编写第 1,2,3,4,8,9 章和附录 A，并负责全书的定稿，李耀武编写第 5,6,7 章和各章的习题及答案。打 * 号部分，可根据需要予以取舍。

我们感谢范金城教授，他于百忙之中审阅了书稿，提出了许多中肯的意见。我们特别感谢周家良教授，他在组织我们编写书稿、详细审阅书稿及热心推荐本书的出版等方面做了许多工作，给了我们极大的支持和帮助。本书的出版还得到西安交通大学教材科和西安交通大学出版社的热情支持和帮助，向他们致以由衷的谢意。

限于我们的水平，疏误和不妥之处，诚恳地希望读者指正。

编者　1997 年 3 月

目 录

第1章　随机事件与概率

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象与随机试验

客观世界中存在着这样一类现象：在一定条件下它可能发生，也可能不发生，具有不确定性。例如，掷一枚硬币，其结果可能是有国徽的一面（以后称为正面）朝上，也可能是有数字的那一面（以后称为反面）朝上，在每次投掷之前，无法确定会出现何种结果。又如，从一批产品中任意抽出一件来检验，其结果可能是合格品，也可能是不合格品，事先不能肯定。在现实生活中，类似的例子还可以举出许多，如养鱼场的一万尾鱼苗能成活几许？明年的中秋节能观赏到月亮吗？下一届世界杯赛的冠军得主为谁？……这类现象称为随机现象。一般而言，随机现象具有以下特征：在一定的试验条件下，其试验结果不止一个；对于一次试验，可能出现这种结果，也可能出现那种结果，事先无法确定会出现何种结果。

尽管就一次试验而言，随机现象的发生与否表现出不确定性，似乎捉摸不定，然而人们经过长期的实践并深入研究之后，发现在大量重复试验或观察下，随机现象呈现出某种规律性。例如，抛掷一枚匀称硬币，一次抛掷不能断定它会出现哪一面，但如果对同一枚硬币进行成百上千次的抛掷，将会发现，"正面朝上"与"反面朝上"的出现次数大致各占一半。从一大批产品中，任意抽取一件产品，抽到合格品或不合格品是随机的。但当重复抽取时，抽到不合格品的次数与抽取总次数之比呈现出某种稳定性。随机现象的这种内在规律性叫做**统计规律性**。概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科。

随机现象的统计规律，一般可在相同条件下，通过大量重复试验而获得，这里的试验在概率统计中指的就是随机试验。那么，什么是随机试验呢？如果一个试验具备以下特征：(1)可以在相同条件下重复进行，(2)每次试验的可能结果不止一个，但事先能明确全部可能的结果，(3)进行一次试验之前不能肯定哪一个结果会出现，则称这种试验为**随机试验**，简称为试验。以后用 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 来表示（随机）试验。例如：

E_1：　抛掷一枚硬币，观察正面、反面的出现情况。

E_2：　投掷一颗骰子，观察出现的点数。

E_3：　记录车站售票处一天内售出的车票数。

E_4：　从一大批元件中任意抽取一个，测试其使用寿命。

上述这些试验都是随机试验。

1.1.2　样本空间与随机事件

做试验的目的在于研究试验结果出现的统计规律。对于一个试验 E，虽然在试验之前不能肯定哪个结果会发生，但试验的一切可能结果是已知的，我们把 E 的所有可能的试验结果

组成的集合叫做它的样本空间。今后用 Ω 或 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots$ 表示样本空间。例如,试验 E_1 至 E_4 的样本空间分别是:

$\Omega_1=\{\omega_0,\omega_1\}$,其中 ω_0 表示“正面朝上”,ω_1 表示“反面朝上”。

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$,其中数 i 表示“出现 i 点”, $i=1,2,3,4,5,6$。

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n\}$,这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数。

$\Omega_4=\{\omega\mid\omega\geqslant 0\}$ 或者 $\Omega_4=[0,+\infty)$。

在随机试验中,可能发生、也可能不发生的事件叫做**随机事件**,简称事件。以后用 $A,B,C,\cdots$ 表示随机事件。

在试验 E_2 中,如果用 A 表示“掷出奇点数”,那么 A 是一个随机事件。由于在一次投掷中,当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时才称事件 A 发生了,所以我们把事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$。同样地,若 B 表示事件“掷出偶点数”,那么 $B=\{2,4,6\}$ 也是一个随机事件。若 C 表示“掷出的点数为素数”,那么 $C=\{2,3,5\}$,它同样是一个随机事件。

由此可见,一个试验 E 的随机事件是由该试验的一部分试验结果组成的集合,在一次试验中,当且仅当这个事件所包含的任一可能结果出现时,才称该事件在这一次试验中发生了。

对于一个试验 E,它的样本空间 Ω 是由 E 的全部可能结果组成的集合,而它的一个随机事件 A 只是由 E 的一部分可能结果组成的集合,因而事件 A 是样本空间 Ω 的子集,记作 $A\subset\Omega$。

对于一个试验 E,在每次试验中必然发生的事件,称为 E 的**必然事件**;在每次试验中都不发生的事件,称为 E 的**不可能事件**。例如,在 E_2 中,“掷出的点数不超过 6 点”是必然事件,若用试验结果的集合来表示,这一事件就是 E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$。而事件“掷出的点数小于 1”是不可能事件。这个事件不包含 E_2 的任何一个可能结果,故我们用空集的记号 $\varnothing$ 表示不可能事件。

一般地,对于试验 E,包含它的所有可能的试验结果的样本空间 Ω 是必然事件;不包含它的任何一个试验结果的事件 $\varnothing$ 是不可能事件。今后我们就用 Ω 表示必然事件,用 $\varnothing$ 表示不可能事件。

必然事件与不可能事件已无随机性可言,但在概率论中,常把它们当作两个特殊的随机事件,这样做自有数学处理上的方便之处。正如在高等数学中,常量可当作特殊的变量那样。

1.1.3 事件的关系与运算

在理论和应用中,经常会提出这样的问题:已知某个复杂事件与若干个简单事件有关联。这些简单事件的概率都比较容易获得,应当如何确定这个复杂事件的概率?不难想到若能利用它们之间的这种关联,或许就能从这些简单事件的概率去推算出复杂事件的概率。为此,我们需要搞清楚事件之间的关系与运算。下面,在讨论两个事件之间的关系和对若干个事件进行运算时,均假定它们是同一个随机试验下的随机事件。

1. 事件的包含与相等

设有两个事件 A,B,若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 B 包含事件 A**,或者事件 A 含于事件 B,记作 $B\supset A$,或者 $A\subset B$。此时亦称 A 是 B 的子事件。

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出奇点数$\}$,则 $A=\{1,3,5\}$。记 $B=\{$掷出的点数不超过

5}，则 $B=\{1,2,3,4,5\}$。显然，若事件 A 发生，那么事件 B 必发生，因为事件 A 所包含的试验结果只是事件 B 包含的试验结果中的一部分，故 A 是 B 的子集，所以 $A\subset B$。为了直观起见，考虑如下试验：向一个矩形靶面射击，假定每次射击都能击中该矩形区域 Ω，若以 Ω 表示事件"击中矩形 Ω"，以 A 表示事件"击中圆 A"，以 B 表示事件"击中圆 B"（见图 1.1）那么事件 Ω 是必然事件。而击中了圆 A 就意味着击中了圆 B，所以事件 A 发生时，事件 B 必然发生。这个图形十分形象地说明了事件 B 包含事件 A 的这种说法的来由。

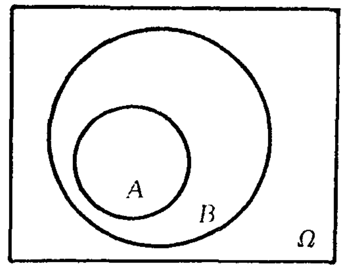


图 1.1　$A\subset B$

若事件 A,B 相互包含，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A,B 相等，记作 $A=B$。

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出 3 点或 6 点$\}$，$B=\{$掷出 3 的倍数点$\}$，这两个事件表面上看起来是不同的两种说法，其实表示了同一事件，因而 $A=B$。

2. 事件的和

设有两事件 A,B，称$\{A,B$ 中至少有一个发生$\}$的事件为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$。事件 $A\cup B$ 发生意味着或者事件 A 发生，或者事件 B 发生，或者两者都发生。

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇点数$\}=\{1,3,5\}$，$B=\{$掷出 3 的倍数点$\}=\{3,6\}$，那么事件 A 与事件 B 的和事件 $A\cup B=\{1,3,5,6\}$。从中不难看出：新事件 $A\cup B$ 是由组成各事件的那些试验结果合并而成(重复部分只计一次)的事件，因而有时也把事件的和称为事件的并。仍以打靶为例(见图 1.2)，此时 $A\cup B$ 表示"击中图 1.2 中阴影部分表示的区域"。这一区域是圆 A 与圆 B 合并而成的。事件 $A\cup B$ 发生，就意味着或者击中了圆 A，或者击中了圆 B。

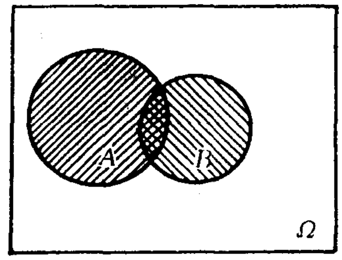


图 1.2　$A\cup B$

事件的和可以推广到多个事件的情形。设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，亦即 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$。类似地，可定义无限个事件的和：设有无限可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，定义它们的和事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\text{ 中至少有一个发生}\}$$

3. 事件的积

设有两事件 A,B，称$\{A,B$ 都发生$\}$的事件为 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$，简记为 AB，即

$$A\cap B=AB=\{A,B\text{ 都发生}\}$$

例如，在试验 E_2 中，令 $A=\{$掷出奇点数$\}=\{1,3,5\}$，$B=\{$掷出素数点$\}=\{2,3,5\}$，则 $AB=\{3,5\}$。从中可以看出，积事件 AB 是由组成事件 A,B 的那些试验结果中的公共部分所组成的。若以打靶为例(见图 1.3)，图中阴影部分表示

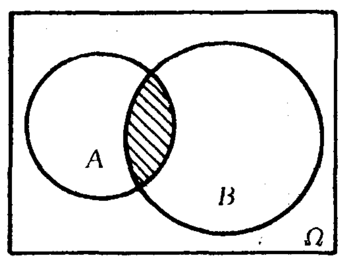


图 1.3　AB

圆 A 与圆 B 的交，打中这一阴影部分就意味着既击中了圆 A 又击中了圆 B，即事件 A 与事 B 都发生了。因而有时也把事件的积称为事件的交。

类似地，可以定义多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$（有限个或可列无限个）的积事件：

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 都发生}\}$$

及
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots \text{ 都发生}\}$$

4. 事件的互斥和对立

设有两事件 A,B，若事件 A,B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A,B 是互斥的，或称它们是互不相容的。若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥，则称这些事件是两两互斥的，或称它们是互斥事件组。

例如，在试验 E_2 中，令 $A=\{$掷出的点数至多为 3$\}$，$B=\{$掷出的点数大于 4$\}$，由于 $A=\{1,2,3\}$，而 $B=\{5,6\}$，在组成事件 A,B 的那些试验结果中并无公共（交叉）部分，故 $AB=\varnothing$，亦即事件 A,B 不会同时发生，所以 A,B 是互斥的。图 1.4 直观地表示了两事件互斥的含义。

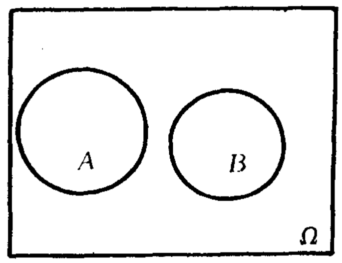


图 1.4　$AB=\varnothing$

互斥事件的一个特殊情况是对立事件。

设有事件 A，则事件

$$B=\{A \text{ 不发生}\}$$

称为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，即 $B=\overline{A}$。

例如，在试验 E_2 中，令 $A=\{$掷出奇点数$\}$，$B=\{$掷出偶点数$\}$，因为 $A=\{1,3,5\}$，而 $B=\{2,4,6\}$，于是 $B=\overline{A}$。此外，不难看出 $A=\overline{B}$，这说明对立事件是个相互的概念，B 是 A 的对立事件，那么 A 也是 B 的对立事件。由本例还可以发现，一方面有 $AB=\varnothing$，另一方面有 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$，即 B 包含的试验结果加上 A 包含的试验结果便补全了全部的试验结果，故对立事件 B 又叫做"补事件"。很明显，$\overline{\overline{A}}=A$。

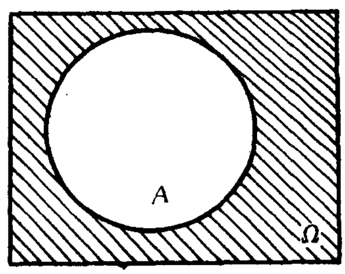


图 1.5　$\overline{A}$

一般地，若事件 A,B 互为对立事件，则必满足：

$$AB=\varnothing,\quad A\cup B=\Omega$$

上面的两个等式亦可作为对立事件的定义。对立事件 $\overline{A}$ 的几何表示是图 1.5 中的阴影部分。

5. 事件的差

设有两事件 A,B，称事件$\{A$ 发生，B 不发生$\}$为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$。

例如，在试验 E_2 中，令 $A=\{$掷出奇点数$\}$，$B=\{$掷出的点数为素数$\}$，即 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,5\}$，于是 $A-B=\{1\}$。

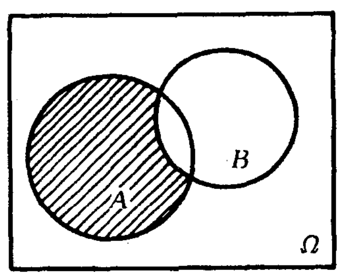


图 1.6　$A-B$

由差事件的定义可知：$A-B=A\overline{B}$　　(1.1)

图 1.6，图 1.7 中的阴影部分即表示 $A-B$。

在进行事件的运算时，经常要用到下述定律：

设有事件 A,B,C，则有

交换律 $A\cup B = B\cup A$； $AB = BA$

结合律 $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$； $(AB)C = A(BC)$

分配律 $(A\cup B)C = (AC)\cup(BC)$； $(AB)\cup C = (A\cup C)(B\cup C)$

对偶律 $\overline{A\cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$； $\overline{AB} = \overline{A}\cup\overline{B}$

现证明对偶律：

$$\overline{A\cup B} = \overline{\{A,B\text{ 中至少有一个发生}\}}$$
$$= \{A,B\text{ 都不发生}\}$$
$$= \{\overline{A},\overline{B}\text{ 同时发生}\}$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}$$

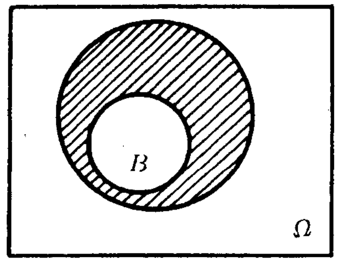


图 1.7 $A-B$

这就证明了第一个等式。利用已证明的等式不难证明第二个等式，因为

$$AB = \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$$

所以

$$\overline{AB} = \overline{\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}} = \overline{A}\cup\overline{B}$$

例 1.1 设 A,B,C 为三个事件，试利用 A,B,C 表达下列事件：

(1) $D_1 = \{$三个事件中至少有两个出现$\}$

(2) $D_2 = \{$三个事件中至多有两个出现$\}$

(3) $D_3 = \{$三个事件中恰有两个事件出现$\}$

解 (1) $D_1 = (AB)\cup(BC)\cup(CA)$

或 $D_1 = (AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)\cup(ABC)$

(2) $D_2 = \overline{ABC}$

或 $D_2 = (\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\cup(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$

(3) $D_3 = (AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$

例 1.2 简化下列各式

(1) $(A\cup B)-(A-B)$

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$

解 (1) $(A\cup B)-(A-B) = (A\cup B)\overline{(A-B)} = (A\cup B)\overline{(A\overline{B})}$

$= (A\cup B)(\overline{A}\cup B) = (A\overline{A})\cup(B\overline{A})\cup(AB)\cup B = B$

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B) = (A\cup(B\overline{B}))(\overline{A}\cup B)$

$= A(\overline{A}\cup B) = (A\overline{A})\cup(AB) = AB$

注意，对事件 A,B，若 $A\subset B$，则有

$$A\cup B = B,\quad AB = A$$

因此，对任意事件 A 有

$$A\cup\Omega = \Omega,\ A\Omega = A\ \text{以及}\ A\cup\varnothing = A,\ A\varnothing = \varnothing,$$

最后，我们指出，在进行事件运算时，运算的优先顺序是：补运算为先，积运算其次，和或差的运算最后，若有括号，则括号内的运算优先。

1.2 概　率

1.2.1 概率的古典定义

如果某随机试验只有有限个试验结果 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$，而且从该试验的条件及实施方法分析，我们又没有理由认为其中的某个结果比任一其他结果更容易发生，那我们只能认为每个试验结果在试验中都具有同等可能的出现机会，也即 $1/n$ 的出现机会。一般地，称具有以下两个特征的随机试验的数学模型为**古典概型**，若

(1) 只有有限个试验结果 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$；

(2) 每个试验结果在一次试验中发生的可能性相等。

古典概型也叫作**等可能概型**。由于它是概率论发展初期的主要研究对象，因而称之为"古典"概型。概率的古典定义便是在古典概型中引入的。

定义 1.1 设古典概型试验 E 的所有结果为$\{\omega_1\},\{\omega_2\}\cdots,\{\omega_n\}$，若事件 A 恰包含其中的 m 个结果，则事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2}$$

由古典概型的两个特征："有限性"及"等可能性"，我们不难看出(1.2)式的合理性。在一次试验中，每个结果的出现机会同为 $1/n$，现在事件 A 包含了 m 个结果，则在一次试验中，事件 A 发生的概率应为$m\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n}$。注意到(1.2)式中的分子是 A 所包含的试验结果的个数m，而分母是所有试验结果的总数 n，故(1.2)式又可以写成

$$P(A)=\frac{A\text{ 所包含的试验结果的个数}}{\text{试验结果的总数}}$$

由(1.2)式算得的事件 A 的概率称为古典概率。

例 1.3 在掷一颗骰子的试验中，求事件{恰掷出 3 的倍数点}的概率。

解 假定所掷的是一颗匀称骰子，若令

$$A_i=\{\text{掷出“}i\text{”点数}\},\qquad i=1,2,3,4,5,6$$

则 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 为试验的全部结果，且每一 A_i 发生的可能性相同。令

$$A=\{\text{恰掷出 3 的倍数点}\}$$

因为 A 恰含 A_3,A_6 两个结果，而试验结果总数为 6，故

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

计算古典概率离不开排列组合，因而，熟悉有关排列与组合方面的知识是必要的。我们将在 1.5 中介绍一些计算古典概率的常用技巧。

不难验证，由(1.2)式所定义的古典概率具有以下性质：(1)$P(A)\geqslant 0$； (2)$P(\Omega)=1$；(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

在实际应用中，如果试验的结果有无限多个，那就不能按古典概型来计算概率。然而，在有些场合可用几何的方法来解决概率的计算问题。下面是一个典型的"会面问题"的例子。

例 1.4 两人相约 8 点至 9 点之间在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时不候。假定两人各自随意地在 8 点到 9 点之间选一时刻到达该地，试求这两个人能够会面的概率。

为简便起见，以 8 点钟为原点，建立直角坐标系，并令 x,y 分别为两人的到达时刻，把试验的所有可能结果标在坐标系上是图 1.8 中的正方形区域 Ω。"两人各自随意地在 8 点到 9 点之间选一时刻到达该地"可以理解为这正方形区域 Ω 内的任一点都是等可能的。若记事件 A = {两人能会面}，则 A 发生当且仅当 $|x-y|\leqslant 20$，也即点 (x,y) 落在图中阴影部分的区域 A 内。因 Ω 包含无限多个点，故不能用(1.2)式来计算 $P(A)$，然而，若我们把上述"等可能性"的含义引伸为：在正方形内点 (x,y) 落入某子区域中的概率与该子区域的面积成正比而与其位置及形状无关，则按此引伸了的"等可能性"的含义可用几何的方法确定出事件 A 的概率：

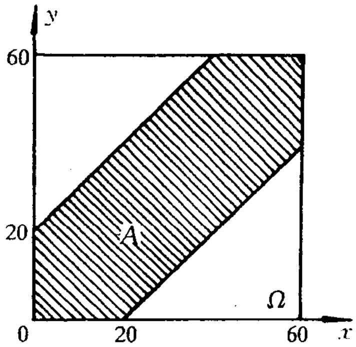


图 1.8

$$P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

用上述方法计算的概率称为**几何概率**。虽然在计算几何概率时取消了试验的所有可能结果的总数为有限的这一限制条件，但它们仍要求某种意义上的"等可能性"。当所遇到的问题不具备等可能性时，我们既不能用计算古典概率的方法也不能用计算几何概率的方法来确定某事件的概率。为了解决这类问题，人们从另一种角度来刻画事件的概率，这就引出了下面的定义。

1.2.2 概率的统计定义

设有随机试验 E，在相同的条件下，重复进行了 n 次试验。在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=n_A/n$。事件的发生频率有以下简单性质：

(1) $f_n(A)\geqslant 0$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若事件 A 与事件 B 互斥，即 $AB=\varnothing$，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$$

性质(1)，(2)是显而易见的。当事件 A,B 互斥时，在 n 次重复试验中，和事件 $A\cup B$ 发生的频数 $n_{A\cup B}$ 必等于 A 发生的频数与 B 发生的频数之和，即

$$n_{A\cup B}=n_A+n_B$$

在上式两端同除以 n 便证明了性质(3)。

由于事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 刻画了 A 发生的频繁程度，因而，$f_n(A)$ 愈大，事件 A 发生愈频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性也愈大。这似乎在提示我们可用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小。是否可以这样做呢？让我们先来考察下面的例子。

例 1.5 掷一枚均匀对称的硬币，以 A 表示事件{出现正面朝上}，记录事件 A 发生的频数及频率，得数据如表 1.1 所示。

从表 1.1 可以看出，当试验次数较少时，出现正面朝上的频率波动比较大，但是当试验次

数增多时，正面朝上的发生频率明显地在 0.5 这个数附近波动。历史上也曾有人做过类似的试验，所得数据见表 1.2

表 1.1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1.2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.2 可以看出，不管什么人掷一枚匀称硬币，当试验次数逐渐增多时，频率 $f_n(A)$ 总是在 $0.5=1/2$ 附近波动，并呈现出稳定于 0.5 的倾向。频率的这种“稳定性”就是通常所说的统计规律性，它揭示了隐藏在随机现象中的必然规律性，我们用频率的稳定值来刻画事件 A 发生的可能性大小是合适的。

定义 1.2　设有随机试验 E，若当试验的重复次数 n 充分大时，事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 稳定地在某数 p 附近摆动，则称数 p 为事件 A 的概率，记为

$$P(A)=p \tag{1.3}$$

概率的统计定义不要求随机试验必须具备“有限性”及“等可能性”，因而它的适用范围更广。其次，它提供了估算概率的方法，即在试验的重复次数很大时，可以用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 近似代替事件 A 的概率 $P(A)$。最后，它提供了一种检验理论或假说正确与否的准则。具体来说，如果我们依据某种理论或假说定出某事件 A 的概率为 p，但不知其是否与实际相符，为此，可做大量重复试验并算出 A 发生的频率 $f_n(A)$，若 $f_n(A)$ 与 p 相差很大，则认为该理论或假说可能不正确，若 $f_n(A)$ 与 p 很接近，则认为实验的结果支持了该理论或假说。我们将在第 7 章(假设检验)中专门来讨论这一类问题。

由频率的三条基本性质可知，作为频率稳定值的概率亦有相应的三条基本性质：

(1)　$P(A)\geqslant 0$;

(2)　$P(\Omega)=1$;

(3)　若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

尽管概率的统计定义有上述种种优点，然而，它的不足之处也是显而易见的：首先，依定义1.2要确定某事件的概率，就必须进行大量重复试验，这在实际中往往难以办到。其次，即便有条件进行大量重复试验，你也无法按本定义确切地指出何数为频率的稳定值。以例1.5来说，如果不是基于对匀称硬币的直观认识，我们如何能认定频率是稳定在0.5而不是0.502或别的什么数呢？

概率的古典定义和统计定义存在着这样或那样的不足，这些不足不仅妨碍了概率论自身的发展，也使人们对作为数学分支的概率论的科学性产生了怀疑。1933年前苏联数学家柯尔莫哥洛夫首先提出了概率的公理化定义，从此，概率论有了坚实的理论基础并得到迅速发展。限于本教材的大纲要求，在此，我们只能简单介绍概率公理化定义的一些内容。

*1.2.3 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，考虑由 Ω 的子集（包括 Ω 本身和空集 $\varnothing$）所构成的某种集类 $\mathscr{F}$，这里的 $\mathscr{F}$ 不必包括 Ω 的所有子集，但它必须满足一定的条件。$\mathscr{F}$ 中的每一元素称为“事件”，因而集类 $\mathscr{F}$ 称为“事件域”。对于 $\mathscr{F}$ 中的每个事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，若集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列三条公理：

公理1 对于每个 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)\geqslant 0$；

公理2 $P(\Omega)=1$；

公理3 设 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，且 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j;\quad i,j=1,2,\cdots)$ 有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1.4}$$

(1.4)式通常称为概率的加法公理（又称为概率的可列可加性）。

以掷骰子试验为例，其样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，其中元素 i 代表“掷出 i 点”，它反映了掷骰子试验的6个基本结果。取 $\mathscr{F}=\{\{1\},\{2\},\cdots,\{6\},\{1,2\},\{1,3\},\cdots,\{1,6\},\{1,2,3\},\cdots,\{4,5,6\},\cdots,\{1,2,3,4,5,6\},\varnothing\}$，$\mathscr{F}$ 中包括了 Ω 的所有子集，故 $\mathscr{F}$ 一共有 $C_6^0+C_6^1+\cdots+C_6^6=2^6=64$ 个事件，我们可根据骰子的具体情况给出概率 $P(\cdot)$，如果骰子是匀称的正六面体，则定义 $P(\cdot)$ 为

$$P(A)=A\text{ 中所含试验结果的个数}/6$$

其中 $A\in\mathscr{F}$。

于是，令 $A_i=\{\text{掷出 } i \text{ 点}\}$，$i=1,2,\cdots,6$，若令 $A=\{\text{掷出奇数点}\}$，则 $A=\{1,3,5\}$。由上述定义，$P(A_i)=1/6(i=1,2,3,4,5,6)$，而 $P(A)=3/6=1/2$。

如果骰子不匀称，则 A_i 发生的可能性 $p_i=P(A_i)$ 各不相同，此时，先确定出 $p_1,p_2,\cdots,p_6$，再对每个事件 A，把其中所含基本结果相对应的概率 p 加起来作为 $P(A)$。比如，若 $A=\{1,3,5\}$，则规定 $P(A)=p_1+p_3+p_5$。

1.2.4 概率的性质

概率有三条基本性质：

(1) 对任何事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2) 对必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$；

(3) 对于两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有