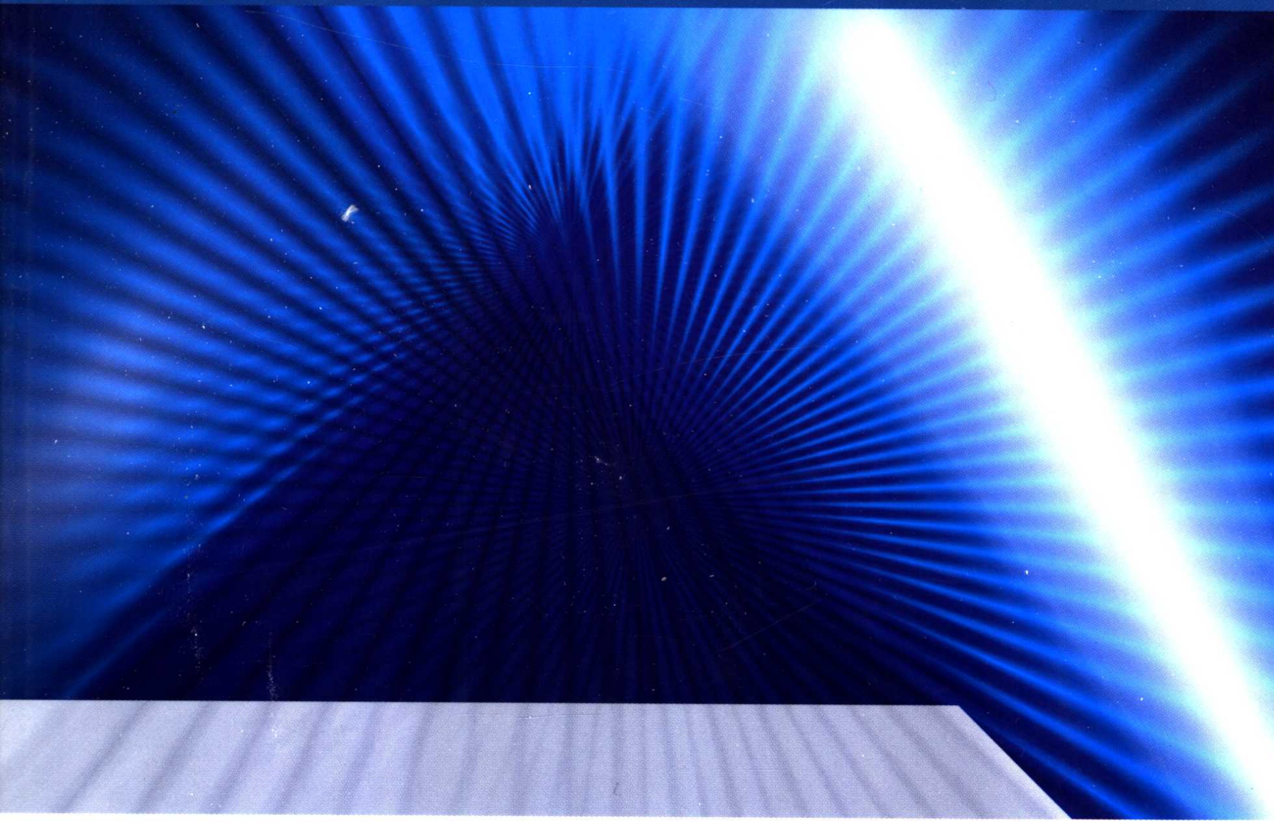
College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书



复变函数与积分变换
学习辅导与习题选解

苏变萍　王一平　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

复变函数与积分变换
学习辅导与习题选解

苏变萍　王一平　编

高等教育出版社

内容提要

本书内容分为第一篇、第二篇、知识点滴三部分。第一篇为复变函数，共六章，主要内容是：复变函数、导数、积分、级数、留数、保形映照。第二篇为积分变换，共两章，主要内容是：傅里叶变换、拉普拉斯变换。第一、二篇各章均包括五部分：本章的内容要点、教学要求和学习注意点、释疑解难、典型例题及习题选解。知识点滴部分包括三个方面的内容：人物介绍，学科介绍和数学软件介绍。

本书可作为高等院校相关专业的学生及自学人员学习《复变函数与积分变换》的课外辅导书，也可作为教师讲授《复变函数与积分变换》课程的教学参考书，以及科技工作者科研、撰写论文的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换学习辅导与习题选解/苏变萍，王一平编．—北京：高等教育出版社，2003.12

ISBN 7-04-012962-0

Ⅰ．复… Ⅱ．①苏…②王… Ⅲ．①复变函数—高等学校—自学参考资料②积分变换—高等学校—自学参考资料 Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第090439号

策划编辑 张忠月 **责任编辑** 薛春玲 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 马静如 **责任校对** 尤 静 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2003年12月第1版
印 张	12.25	印 次	2003年12月第1次印刷
字 数	220 000	定 价	13.40元

前　　言

本书是为配合教育科学“十五”国家规划课题研究成果《复变函数与积分变换》教材的使用而编写的辅导书。本书的主要特点是:

1. 系统地总结了《复变函数与积分变换》教材各部分的内容,指明了各部分内容学习的要求重点和难点。使学习者对自己应该学什么,怎么学,学到怎样的深度有了一个清晰的概念。

2. 在编写的过程中立足于读者,整理、归纳、释疑解难了近几年教学中学生及自学人员经常产生困惑的疑难点及典型例题。

3. 查阅了大量中外相关资料,分析、整理、挑选了约260道覆盖了各种题型的题目,按基本题目、逻辑与推理型题目、扩展思维及精彩题目构成,并对各类题目进行了详细的解答。

总之,鉴于目前人们学习工作的高效率、快节奏,这本书将为《复变函数与积分变换》的学习提供帮助。

本书在书的编写过程中得到了学校、理学院、数学教研室和广大同仁的大力支持和帮助,谨在此一并致以深切的谢意。同时,由于作者水平有限,不妥之处还望读者批评指正。

作　者

2003年9月

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇 积分变换

第一篇　复变函数

第1章　复数与复变函数

1.1　内容要点

1. 复数的各种表示法

代数表示法：$z=x+\mathrm{i}y$.

三角表示法：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

指数表示法：$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. 复数的代数运算及几何意义

复数的加减法：$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$.

复数的乘法：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$.

复数的除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\qquad(z_2\neq 0)$.

定理1　两个复数乘积的模等于它们模的乘积;两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理2　两个复数商的模等于它们模的商;两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角差.

3. 扩充复平面、平面点集

4. 复变函数的概念及其几何意义

定义1　设 D 是一个给定的复数集,如果有一法则 f,对于每一个数 $z\in D$,总有确定的复数 w 和它对应.则称 f 是 D 上确定的复变数函数(简称复变函数),记作 $w=f(z)$.数集 D 叫做这个函数的定义域.

5. 初等函数的定义及性质

1.2　教学要求和学习注意点

1. 教学要求

牢固掌握复数的各种表示方法及其运算，了解区域的概念，理解复变函数的概念，了解指数函数、对数函数、幂函数和三角函数的定义及它们的主要性质.

重点：复数的运算，复变函数的概念.

难点：初等函数中的多值函数的理解.

2. 学习注意点

(1) 下面的证明过程错在何处？

题目：证明　若 $z_1z_2z_3=0$，则 z_1,z_2,z_3 中至少有一个为零.

证：设 $z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$　$(k=1,2,3)$，则

$$z_1z_2z_3=r_1r_2r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=0.$$

$\therefore$　r_1,r_2,r_3 中至少有一个为零，

$\therefore$　z_1,z_2,z_3 中至少有一个为零.

答：证明过程的设是错误的，当 $z=0$ 时，z 不具有指数表达式. 正确的证明为：

若 $z_3\neq0$，则 $z_1z_2=z_1z_2\left(z_3\cdot\dfrac{1}{z_3}\right)=0$，

若 $z_2\neq0$，则 $z_1=z_1\left(z_2\cdot\dfrac{1}{z_2}\right)=0$，

故　z_1,z_2,z_3 中至少有一个为 0.

(2) 下面的解题过程错在何处？

题目：求 $8^{\frac{1}{6}}$ 的全部单根.

解：$8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln2+\mathrm{i}\cdot2k\pi)}=\mathrm{e}^{\ln2^{\frac{1}{2}}}\cdot\mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}}=\pm\sqrt{2}$.

答：此解题过程在第二步到第三步的推导时出错了，正确的是：

在复数范围内

$$(2^3)^{\frac{1}{6}}=(2^3\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}})^{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{3}\mathrm{i}}\quad(k=0,1,2).$$

在实数范围内

$$(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}.$$

(3) 下面的解题过程错在何处？

题目：设 $z_1=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_2=-1+\mathrm{i}$. 求 $\arg z_1z_2$.

解：
$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}z_1z_2&=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\\&=\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{4}\pi+2k\pi\\&=\frac{17}{12}\pi+2k\pi,\end{aligned}$$

$\therefore$　$\arg z_1z_2=\dfrac{17}{12}\pi$.

答：$\because \quad -\pi < \arg z_1 z_2 \leqslant \pi$，

$\therefore \quad \arg z_1 z_2 = \frac{17}{12}\pi$ 是错误的.

正确答案：由 $\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -\frac{7}{12}\pi + 2k\pi$，得

$$\arg z_1 z_2 = -\frac{7}{12}\pi.$$

(4) 证明：(a) $\operatorname{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i = \frac{1}{2}\operatorname{Ln} i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$；

(b) $\operatorname{Ln} i^2 \neq 2\operatorname{Ln} i$.

证：(a) $\because \quad \operatorname{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = i\arg(i^{\frac{1}{2}}) + 2k\pi i$

$$= \begin{cases} \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)i, \\ \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right)i \end{cases}$$

$$= \left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)i,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Ln} i = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i,$$

$\therefore \quad \operatorname{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\operatorname{Ln} i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(b) $\because \quad \operatorname{Ln} i^2 = \operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$,

$2\operatorname{Ln} i = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = (4k+1)\pi i$,

$\therefore \quad \operatorname{Ln} i^2 \neq 2\operatorname{Ln} i$.

1.3 释疑解难

1. 复方程 $az^2 + bz + c = 0\ (a \neq 0)$ 的求根公式 $z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 中 $b^2 - 4ac$ 为什么要求不等于 0.

答：因为关于复数方根 $w = z^{\frac{1}{n}}$（即 $w^n = z$）的定义中要求 $w \neq 0$，若 $z = 0$ 必有 $w = 0$. 而 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ 为复数方根的形式，因此公式中 $b^2 - 4ac \neq 0$.

事实上，因为

$$az^2 + bz + c = 0,$$

所以

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0,$$

若 $b^2 - 4ac = 0$，则

$$z=-\frac{b}{2a}.$$

2. 证明:(a) 若 $\ln z=\ln r+\mathrm{i}\theta\left(r>0,\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{9}{4}\pi\right)$,那么

$$\ln \mathrm{i}^2=2\ln \mathrm{i};$$

(b) 若 $\ln z=\ln r+\mathrm{i}\theta\left(r>0,\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{11}{4}\pi\right)$,那么

$$\ln \mathrm{i}^2\neq 2\ln \mathrm{i}.$$

证:(a) $\because\quad \ln \mathrm{i}^2=\ln(-1)=\pi \mathrm{i},\quad 2\ln \mathrm{i}=2\left(\ln|\mathrm{i}|+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)=\pi \mathrm{i};$

$\therefore\quad \ln \mathrm{i}^2=2\ln \mathrm{i}.$

(b) $\because\quad \ln \mathrm{i}^2=\ln(-1)=\pi \mathrm{i},\quad 2\ln \mathrm{i}=2\left(\ln|\mathrm{i}|+\frac{10}{4}\pi \mathrm{i}\right)=5\pi \mathrm{i};$

$\therefore\quad \ln \mathrm{i}^2\neq 2\ln \mathrm{i}.$

由(a)、(b)可知,辐角主值的定义范围可由复平面上原点引出的任一条射线为起始边、终边来划分,随之相关的性质也可能发生变化.

3. 证明:对任何非零复数 z_1 和 z_2

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi \mathrm{i}\quad (k=0,\pm 1).$$

证:因为当 $\mathrm{Re}(z_1)>0,\mathrm{Re}(z_2)>0$ 时,

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi \mathrm{i}\quad (k=0).$$

当 $\mathrm{Re}(z_1)>0$ 或 $\mathrm{Re}(z_2)>0$ 时,

$$\arg(z_1z_2)=\begin{cases}\arg z_1+\arg z_2, & |\arg z_1+\arg z_2|\leqslant\pi,\\ \arg z_1+\arg z_2\pm 2\pi, & |\arg z_1+\arg z_2|>\pi.\end{cases}$$

$$\ln|z_1z_2|=\ln|z_1|+\ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi \mathrm{i}\quad (k=0,\pm 1).$$

当 $\mathrm{Re}(z_1)<0$ 且 $\mathrm{Re}(z_2)<0$ 时,

$$\arg(z_1z_2)=\begin{cases}\arg z_1+\arg z_2, & |\arg z_1+\arg z_2|\leqslant\pi,\\ \arg z_1+\arg z_2\pm 2\pi, & |\arg z_1+\arg z_2|>\pi.\end{cases}$$

$$\ln|z_1z_2|=\ln|z_1|+\ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi \mathrm{i}\quad (k=0,\pm 1).$$

综上所述,对任何非零复数 z_1 和 z_2 都有

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi \mathrm{i}\quad (k=0,\pm 1).$$

4. 求证:三个复数 z_1,z_2,z_3 成为等边三角形顶点的必要与充分条件是:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

证:三角形 $z_1z_2z_3$ 是等边三角形的必要与充分条件为:向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 绕 z_1 旋转

$\frac{\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$得向量$\overrightarrow{z_1 z_3}$,即 $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$或

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \quad \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

两边平方化简得结论.

1.4 典型例题

例 1 将复数$\frac{2i}{-1+i}$化为三角表示式和指数表示式.

解: $\because \quad \frac{2i}{-1+i} = 1 - i, |1-i| = \sqrt{2}, \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4},$

$\therefore \quad \frac{2i}{-1+i}$的三角表示式为: $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$,

$\frac{2i}{-1+i}$的指数表示式为: $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

例 2 若$(1+i)^n = (1-i)^n$,试求 n 的值.

解: 由$(1+i)^n = (1-i)^n$ 可得:

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{-n\pi}{4}\right),$$

即

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \sin\frac{-n\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{n\pi}{4} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi.$$

则得 $$n = 4k \quad (k \text{ 为整数}).$$

例 3 判断 $\mathrm{Im}(z) = 1$ 是否为区域?

答: 点集$\{z \mid \mathrm{Im}(z) = 1\}$不是区域.因为此点集的每一个点都不是内点,依照区域的定义知其不是区域.

例 4 判断 $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ 是开区域还是闭区域,有界否?

答: 依平面点集部分有关开区域、闭区域、有界集和无界集的概念,$\mathrm{Im}(z) > 0$为无界的开区域,$\mathrm{Im}(z) = 0$ 为 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 的边界,故 $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ 为无界的闭区域.

例 5 如果复数 $a + ib$ 是实系数方程 $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ 的根,那么 $a - ib$ 也是它的根.

证: 因为

$$\begin{aligned}
& a_0(\bar{z})^n + a_1(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\bar{z} + a_n \\
&= a_0\,\overline{(z^n)} + a_1\,\overline{(z^{n-1})} + \cdots + a_{n-1}\bar{z} + a_n \\
&= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} \\
&= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以,若 $z=a+\mathrm{i}b$ 为上述方程的根,则其共轭复数 $\bar{z}=a-\mathrm{i}b$ 也为方程的根.

例 6 为什么在复数范围内 $|\cos z|\leqslant 1$, $|\sin z|\leqslant 1$ 未必总成立?

答: 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\cos z=\cos x\operatorname{ch}y-\mathrm{i}\sin x\operatorname{sh}y,$$

$$\begin{aligned}|\cos z|&=\sqrt{(\cos x\operatorname{ch}y)^2+(\sin x\operatorname{sh}y)^2}\\&=\sqrt{(1+\operatorname{sh}^2y)\cos^2x+\sin^2x\operatorname{sh}^2y}\\&=\sqrt{\cos^2x+\operatorname{sh}^2y}.\end{aligned}$$

当 $\operatorname{sh}y>1$ 时,有 $|\cos z|>1$;当 $y\to\infty$ 时, $|\cos z|\to\infty$. 所以, $|\cos z|\leqslant 1$ 未必总成立. 同理 $|\sin z|\leqslant 1$ 也未必总成立.

例 7 证明: 若 z 在圆周 $|z|=2$ 上,那么 $\left|\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

证: $\because$ $|z^4-4z^2+3|\geqslant\Big||z^4-4z^2|-3\Big|\geqslant\Big||z^4|-|4z^2|-3\Big|=3$,

$\therefore$ $\left|\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

例 8 求 $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$ 的所有的根、单根,并说明几何意义.

解: 所有的方根: $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=(2\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}})^{\frac{1}{3}}$

$$=\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\left(\frac{2k}{3}+\frac{1}{4}\right)\pi\mathrm{i}}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

单根: $\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$, $\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}}$, $\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{19\pi}{12}\mathrm{i}}$.

几何意义: 半径为 $\sqrt[3]{2}$ 的圆内接等边三角形的三个顶点.

1.5 习题选解

1.1.4 证明: (a) $\dfrac{1}{z_1z_2}=\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}$ $(z_1\neq 0, z_2\neq 0)$;

(b) $\dfrac{z_1z_2}{z_3z_4}=\dfrac{z_1}{z_3}\cdot\dfrac{z_2}{z_4}$ $(z_3\neq 0, z_4\neq 0)$.

证: $\because$ $\dfrac{zz_1}{zz_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$, $z\cdot\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{z}{z_1}$,

$\therefore$ (a) $\dfrac{1}{z_1z_2}=\dfrac{1}{z_1z_2}\cdot\left(z_2\cdot\dfrac{1}{z_2}\right)=\dfrac{z_2}{z_1z_2}\cdot\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}$;

(b) $\dfrac{z_1z_2}{z_3z_4}=(z_1z_2)\left(\dfrac{1}{z_3}\cdot\dfrac{1}{z_4}\right)=\dfrac{z_1}{z_3}\cdot\dfrac{z_2}{z_4}$.

1.1.5 证明: $(z_1+z_2)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kz_1^{n-k}z_2^k$,其中 z_1,z_2 为任意的复数, n 为正整数.

证：当 $n=1$ 时，等式显然成立.

设 $n=m$ 时，$(z_1+z_2)^m=\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m-k}z_2^k$ 成立，则

当 $n=m+1$ 时，

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)^{m+1}&=(z_1+z_2)\sum_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m-k}z_2^k\\&=\sum_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m+1-k}z_2^k+\sum_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m-k}z_2^{k+1}\\&=z_1^{m+1}+\sum_{k=0}^{m-1}C_m^{k+1}z_1^{m-k}z_2^{k+1}+\sum_{k=0}^{m-1}C_m^k z_1^{m-k}z_2^{k+1}+z_2^{m+1}\\&=z_1^{m+1}+\sum_{k=0}^{m-1}(C_m^{k+1}+C_m^k)z_1^{m-k}z_2^{k+1}+z_2^{m+1}\\&=z_1^{m+1}+\sum_{k=0}^{m-1}C_{m+1}^{k+1}z_1^{m-k}z_2^{k+1}+z_2^{m+1}\\&=z_1^{m+1}+\sum_{k'=1}^{m-1}C_{m+1}^{k'}z_1^{m+1-k'}z_2^{k'}+z_2^{m+1}\\&=\sum_{k'=0}^{m+1}C_{m+1}^{k'}z_1^{m+1-k'}z_2^{k'}.\end{aligned}$$

故结论成立.

1.1.7　证明：(a) $\overline{\bar{z}+3\mathrm{i}}=z-3\mathrm{i}$；　(b) $\overline{\mathrm{i}z}=-\mathrm{i}\bar{z}$；　(c) $\overline{(2+\mathrm{i})^2}=3-4\mathrm{i}$；

(d) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-\mathrm{i})|=\sqrt{3}|2z+5|$.

证：(a) $\overline{\bar{z}+3\mathrm{i}}=\bar{\bar{z}}+\overline{3\mathrm{i}}=z-3\mathrm{i}$；

(b) $\overline{\mathrm{i}z}=\bar{\mathrm{i}}\cdot\bar{z}=-\mathrm{i}\bar{z}$；

(c) $\overline{(2+\mathrm{i})^2}=(\overline{2+\mathrm{i}})^2=(2-\mathrm{i})^2=3-4\mathrm{i}$；

(d) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-\mathrm{i})|=|\sqrt{2}-\mathrm{i}||2\bar{z}+5|=\sqrt{3}|\overline{2\bar{z}+5}|=\sqrt{3}|2z+5|$.

1.1.8　应用数学归纳法证明：当 $n=2,3,\cdots$ 时，

(a) $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}$；　　(b) $\overline{z_1z_2\cdots z_n}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\cdots\overline{z_n}$.

证：(a) $\because$　$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

设 $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_m}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_m}$，而

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2+\cdots+z_m+z_{m+1}}&=\overline{z_1+z_2+\cdots+z_m}+\overline{z_{m+1}}\\&=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_m}+\overline{z_{m+1}}.\end{aligned}$$

$\therefore$　结论成立.

(b) $\because$　$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

设 $\overline{z_1z_2\cdots z_m}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\cdots\overline{z_m}$，而

$$\overline{z_1z_2\cdots z_m\cdot z_{m+1}}=\overline{z_1z_2\cdots z_m}\cdot\overline{z_{m+1}}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\cdots\overline{z_m}\cdot\overline{z_{m+1}}.$$

$\therefore$ 结论成立.

1.1.9 证明：$\sqrt{2}|z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

证：$\because$ $x^2 + y^2 \geqslant 2|x||y|$,

$\therefore$ $2(x^2 + y^2) \geqslant x^2 + 2|x||y| + y^2$,

$\therefore$ $2|z|^2 \geqslant (|x| + |y|)^2$,

$\therefore$ $\sqrt{2}|z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

1.1.10 证明：当 z_2, z_3 为非零复数时，

(a) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;　　(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

证：(a) $\because$ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{1}{z_2}\cdot z_1\right| = \left|\dfrac{1}{z_2}\right|\cdot|z_1|$,

$$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{x_2 + \mathrm{i}y_2}\right| = \left|\frac{x_2 - \mathrm{i}y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2} = \frac{1}{|z_2|},$$

$\therefore$ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2 z_3|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

1.1.11 证明：当 $|z_3| \neq |z_4|$ 时，不等式 $\left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leqslant \dfrac{|z_1| + |z_2|}{\big||z_3| - |z_4|\big|}$ 成立.

证：$\left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| = \dfrac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \leqslant \dfrac{|z_1| + |z_2|}{\big||z_3| - |z_4|\big|}$.

1.1.12 证明：当 $|z| < 1$ 时，$|\mathrm{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$.

证：$|\mathrm{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| = |\mathrm{Im}(1 - x + \mathrm{i}y + x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i})|$

$$= |y + 2xy| \leqslant |y| + 2|x||y| \leqslant 3 \quad (|z| < 1).$$

1.1.15 证明：以 z_0 为中心，R 为半径的圆的方程 $|z - z_0| = R$ 可以写成：

$$|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2.$$

证：$\because$ $|z - z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z - z_0}) = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)$

$$= z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0$$

$$= |z|^2 - (\overline{\bar{z}_0 z} + z\bar{z}_0) + |z_0|^2$$

$$= |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2,$$

$\therefore$ 以 z_0 为心，R 为半径的圆的方程可以写为：

$$|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2.$$

1.1.16 证明：双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 可以写成 $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

证：∵ $x^2 - y^2 = \left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2$

$$= \frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}+z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{4}$$

$$= \frac{z^2+\bar{z}^2}{2},$$

∴ 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 可以写为：$z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

1.1.18 就以下各种情况，分别求 $\arg z$.

(a) $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$；　(b) $z = \dfrac{i}{-2-2i}$；　(c) $z = (\sqrt{3}-i)^6$.

解：(a) $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

∴ $\arg z = \dfrac{2\pi}{3}$；

(b) $z = \dfrac{i}{-2-2i} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$,

∴ $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$；

(c) $z = (\sqrt{3}-i)^6 = 2^6 e^{6\left(-\frac{\pi}{6}i + 2k\pi i\right)}$,

∴ $\arg z = \pi$.

1.1.19 利用复数的三角表达式或指数表达式证明：

(a) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$；　(b) $(1+\sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$.

证：(a) $(-1+i)^7 = \sqrt{2}^7 e^{7\left(\frac{3\pi}{4}i + 2k\pi i\right)} = \sqrt{2}^7 e^{-\frac{3}{4}\pi i}$

$$= -8(1+i);$$

(b) $(1+\sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-10} e^{\left(\frac{\pi}{3}i + 2k\pi i\right)(-10)} = 2^{-10} e^{\frac{2}{3}\pi i}$

$$= 2^{-11}(-1+\sqrt{3}i).$$

1.1.20 证明：(a) $|e^{i\theta}| = 1$；　(b) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$；

(c) $e^{i\theta_1} \cdot \cdots \cdot e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}$　$(n = 2,3,\cdots)$.

证：(a) $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = 1$；

(b) $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$；

(c) ∵ $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

设 $e^{i\theta_1} \cdot \cdots \cdot e^{i\theta_{n-1}} = e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1})}$，则

$$e^{i\theta_1} \cdot \cdots \cdot e^{i\theta_n} = (e^{i\theta_1} \cdot \cdots \cdot e^{i\theta_{n-1}}) e^{i\theta_n}$$

$$= e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1})} e^{i\theta_n}$$

$$= e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)},$$

∴ $e^{i\theta_1} \cdot \cdots \cdot e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}$　$(n = 2,3,\cdots)$.

1.1.21 当 $z_1\neq 0$ 时，求 $\mathrm{Arg}z$.

(a) $z=z_1^n\quad(n=1,2,\cdots)$；　　(b) $z=z_1^{-1}$.

解：(a) $\because\quad z=z_1^n=(r_1e^{i\theta_1})^n=r_1^ne^{in\theta_1}$,

$\therefore\quad \mathrm{Arg}z=n\mathrm{Arg}z_1$;

(b) $\because\quad z=z_1^{-1}=(r_1e^{i\theta_1})^{-1}=r_1^{-1}e^{-i\theta_1}$,

$\therefore\quad \mathrm{Arg}z=-\mathrm{Arg}z_1$.

1.1.22 证明：若 $\mathrm{Re}(z_1)>0,\mathrm{Re}(z_2)>0$，那么 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

证：$\because\quad \mathrm{Re}(z_1)>0,\quad \mathrm{Re}(z_2)>0$,

$\therefore\quad -\dfrac{\pi}{2}<\arg z_1<\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}<\arg z_2<\dfrac{\pi}{2}$,

$-\pi<\arg z_1+\arg z_2<\pi$,

$\therefore\quad \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

1.1.23 若 $z_1z_2\neq 0$，证明：$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1||z_2|$ 当且仅当

$$\theta_1-\theta_2=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

这里 $\theta_1=\mathrm{Arg}z_1,\theta_2=\mathrm{Arg}z_2$.

证：设 $z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\mathrm{Re}(r_1r_2e^{i(\theta_1-\theta_2)})=r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2),$$

$$|z_1||z_2|=r_1r_2,$$

$\therefore$ 当 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1||z_2|$ 时，

$$\cos(\theta_1-\theta_2)=1,$$

即

$$\theta_1-\theta_2=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

反之，当 $\theta_1-\theta_2=2k\pi$ 时，

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1||z_2|.$$

$\therefore$ 结论成立.

1.2.1 求下面各复数的所有的方根、单根，并说明几何意义.

(a) $(2i)^{\frac{1}{2}}$；　　(b) $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$；　　(c) $(-1)^{\frac{1}{3}}$；

(d) $(-16)^{\frac{1}{4}}$；　　(e) $8^{\frac{1}{6}}$；　　(f) $(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}$.

解：(a) 所有的方根：$(2i)^{\frac{1}{2}}=(2e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}e^{\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

单根：$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

几何意义：半径为$\sqrt{2}$的圆的直径的两端点.

(b) 所有的方根：$(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}(e^{-\frac{\pi}{3}i+2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$