初等数学习题汇编

—平面几何—

新 蕾 出 版 社

初等数学习题汇编

—平面几何—

〔苏〕Д·С·莫坚诺夫　著
周概容　译
萧慧敏　校

新 蕾 出 版 社

初等数学习题汇编
—平面几何—
〔苏〕П·С·莫坚诺夫 著
周楙容 译
萧惠敏 校

新蕾出版社 出版
天津新华印刷一厂印刷
新华书店天津发行所发行
开本787×1092毫米 1/32 印张 14.375 字数 260,000
1984年3月第1版 1984年3月第1次印刷
印数：1—54,300
统一书号：13213·9 定价：1.14 元

内 容 简 介

本习题汇编分为三册：代数（第1—16章），几何（第一篇，平面几何：第17—22章；第二篇，立体几何：第23—27章），三角（第28—31章）。全书共有习题近10000个，每册备有相应习题的解答。

本书内容丰富而系统，适合中学数学教师、师范院校数学专业学生、高中学生以及数学爱好者参考使用。

中译本序

学习数学必须做一定的练习。通过练习，才能较好地掌握所学的知识和方法，才能逐步把书本的东西化为自己头脑里的东西。这是人所共知的道理。

学生之间的差异是客观存在的。有些学生对数学有较浓厚的兴趣，不满足于只做课本上的习题，又有时间和精力做更多更难的习题，这种愿望是好的。这部习题汇编中译本的出版，希望能对这些学生有所帮助。有些业余的数学爱好者，也可以利用它来提高自学水平。对于中学数学教师，本书也是一部较好的参考书。

我们鼓励青年们做一定数量的综合题，这有助于他们融会贯通数学中各分科的内容和方法，以及在以后工作中解决实际问题。

我们说学数学要做练习，决不是说做得越多越好。做多少才适当，这是因人而异的。有人立志要以数学为自己的专业（这总是少数），有的人只是要以数学为钻研其它学科的工具；有的人做少量典型的题，就能举一反三，有的人要多做几个才能达到同样目的；有的人要求掌握更多的技巧，有的人没有这种要求。因此不能划一要求，每人要根据自己的情况来确定选做多少，选做哪些才适当。

做数学练习要求运算熟练而准确，逻辑严密而简明，作图正确而整洁。达到这些要求是要有个过程的。我们希望有

志于学好数学的青少年以严肃的科学态度来对待练习的写作，一丝不苟，错了就改，发现更好的方法就重写（只要有时间），精益求精。好的练习应有简明扼要的文字说明，使人一看就懂，不费猜测。科学态度和逻辑表达能力都是一切科学工作者应当具备的品质。

吴大任

1979年6月于南开大学

翻译说明

这部习题汇编是根据〔苏〕П·С·莫坚诺夫著《初等数学专门教程习题汇编》第二版翻译而成的。中译本分为三册：

《代数》：第一——第十六章；

《几何》：第十七——第二十七章；

《三角》：第二十八——第三十一章。

每册中包括相应的习题解答。全书共编进各科习题近10000个。习题解答包括提示、题解和答案三种形式。有的章节附有简短的说明和例题。在编写这部习题汇编时，原作者参阅了国内外的大量文献，吸收了法国、英国、德国、意大利、波兰、美国、葡萄牙、西班牙、瑞士和中国等一系列国家的初等数学习题。这部习题汇编内容丰富而系统，适合中学数学教师、师范院校数学专业学生以及有一定基础的中学学生和数学爱好者参考使用。

全部习题根据内容划分章节。代数和三角的内容分别与С·И·诺渥塞洛夫著《初等代数专门教程》（赵慈庚等译《人民教育出版社》）和《三角学专门教程》（郑星华等译《人民教育出版社》）完全一致。几何部分的有关内容可参阅梁绍鸿编《初等数学复习及研究》（平面几何）和朱德祥编《初等数学复习及研究》（立体几何）（《人民教育出版社》）。

在翻译过程中，除代数习题增加了《复数》一章（第十

五章）之外，保留了原著的章节顺序和内容。另外，还参照俄文版。

沙赫诺《高难度初等数学习题集》，

列曼《莫斯科数学竞赛题集》，

雅格洛姆《非初等问题的初等解法》。

莫坚诺夫、诺渥塞洛夫《投考高校数学参考书》等书，调整了少量习题，选择了一些新题，增补了部分题解。

考虑到部分读者的情况，译者对一些不常见的概念和性质作了注释和说明。在翻译的过程中改正了原书中的一些贻误之处。

吴大任教授、胡国定教授对我们的工作始终关心和鼓励。吴大任教授为本书写了“中译本序”。王大璲同志和袁著祉等同志对本书的翻译工作始终给予很大支持。周学光教授、赵殿兴先生和侯自新同志分别审阅了代数，几何和三角部分的译稿，并提了不少宝贵意见。在此，我们对以上同志深表谢意。

由于我们水平所限，译文中定有不少不妥之处，恳请读者批评指正。

译　者

目　录

关于平面几何 ……………………………………………1

关于二次曲线的某些知识 ……………………………16

§1. 椭圆 ……………………………………………16

§2. 双曲线 …………………………………………20

§3. 抛物线 …………………………………………25

第十七章　计算题……………………………………29（198）

§1. 三角形 …………………………………………29（198）

§2. 多边形 …………………………………………38（204）

§3. 圆 ………………………………………………40（205）

第十八章　证明题……………………………………46（207）

§1. 三角形 …………………………………………46（207）

§2. 多边形 …………………………………………70

§3. 圆 ………………………………………………77

第十九章　点的轨迹 …………………………………85（209）

第二十章　作图题……………………………………89（212）

§1. 轨迹法 …………………………………………89

§2. 相似法 …………………………………………91

§3. 反求法 …………………………………………92

§4. 对称法和求长法 ………………………………93

§5. 平移法 …………………………………………94

§6. 旋转法 …………………………………………95

§7. 反演法 …………………………………………96

§8. 代数法 ……………………………………………97
§9. 缩并,移位,透视,透射（证明和作图综合题）
……………………………………………………98
§10. 混合题 …………………………………………113（212）
第二十一章　综合题 ……………………………………123（216）
第二十二章　杂题……………………………………………194（448）

注：前一个数码为正文页数，后一个数码为解答页数。

关于平面几何

在一些几何问题中，通常给同一直线上各有向线段的长附带上相应的符号．这样可以使讨论具有一般性，并使得在所考虑的图形中，论述与点、直线、圆的特殊位置无关．

为了给直线上的有向线段附带上符号，在直线上选择一个方向作为它的正向（又称给直线定向）．那么对于直线上的线段，若其方向和直线的方向一致，则认为线段的长是正的，否则认为线段的长是负的．用 $\overline{AB}$ 表示线段 AB 的长带有符号．如果直线的两个方向哪个为正哪个为负无关紧要，则在题设（或题解）条件中不再特别说明．

例如，我们看“点M对于圆（O）的幂”的定义．过M点作任意一条直线交圆（O）于A和B两点；数

$$\sigma=\overline{MA}\cdot\overline{MB}$$

叫做点M对于圆(O)的幂．（这里割线的方向不起作用）．

由此可见，当点M在圆外时，$\sigma>0$，而当点 M 在圆内时，$\sigma<0$，等等．

下列关系式（沙尔定理）在证明和解题中非常重要：对同一直线上的任意三个点 A,B,C，

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

由于这个关系式具有一般性，故在实际进行推导时往往可以不用图形．几何问题的解带有分析的特点，然而这并不失解的几何特点．

关于角的度量问题也与上述问题类似．首先应该指出，在几何中我们将从各种不同的角度使用《角》的概念．

1）初等几何中关于两直线夹角的概念．这时，如果两条直线相交，则它们组成四个角；而若两条直线不垂直，则这四个角有两个不同的角（一个是锐角，另一个是钝角）（图1）．还需指出，这里和以后提到《角》时往往是指角的度量（大小）．

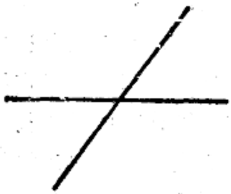

图 1

图 2

2）两个向量的夹角．这是一个完全确定的角，在0到π之间取值（图2）．

如果两个向量平行且方向相同，则认为它们之间的夹角等于0，而若方向相反，则它们的夹角等于π．

3）从无向直线（a）到无向直线（b）的有向角．指的是使直线（a）绕它的任意一点旋转到与直线（b）平行或重合所转过的角．这时以向某一确定方向的旋转作正向，而以相反的方向作负向．这时分别用正数和负数表示角的大小（通常把逆时针方向当作正向）．

相对上述含意，从直线（a）到直线（b）的角有无穷多个值：如果α是该角的一个值，则

$$\varphi = \alpha + k\pi$$

包含该角的全部值，其中 k 为任意整数．上式常写为

$$\varphi = \alpha (\mathrm{mod} \cdot \pi)$$

读作：《φ 关于模 π 等于 α》（图 3）

4）向量 $\overrightarrow{a}$ 到向量 $\overrightarrow{b}$ 的有向角，或有向直线（a）到有向直线（b）的有向角，指的是为使 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的方向一致，向量 $\overrightarrow{a}$ 所需转动的角；这里关于正向旋转和负向旋转的规定，以及与此相应的关于角的正负度量的规定和上面相同．如果 α 是从向量 $\overrightarrow{a}$ 到向量 $\overrightarrow{b}$ 的角的一个值，则（图 4）

$$\varphi = \alpha (\mathrm{mod} \cdot 2\pi)。$$

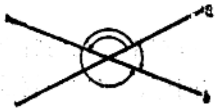

图 3

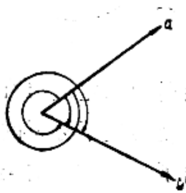

图 4

沙尔定理用于有向角*)：对任意无向直线（a），（b），（c）

$$(a,b) + (b,c) = (a,c) \qquad (\mathrm{mod} \cdot \pi),$$

而对任意向量（或有向直线）$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$

$$(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) \quad (\mathrm{mod} \cdot 2\pi).$$

相对使用无向角的情形而言，有向角的概念使一些问题的提法和解法显得更为自然．

例如，M 点和线段 AB 的连线 MA 和 MB 的夹角为 $45°$，那么 M 点的轨迹由两个圆的弧组成；这里的角应按第二个定

*) 符号 (a,b) 表示从无向直线 a 到无向直线 b 的有向角——译者注．

理理解为向量$\overrightarrow{MA}$和$\overrightarrow{MB}$的夹角（图 5）．而若题设条件要求（根据角的第三个定义）从直线MA到直线MB的角等于45°，则M点的轨迹就是一个圆（图 6）．

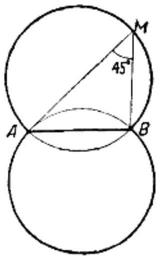

图 5

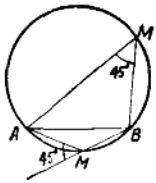

图 6

利用沙尔定理和有向角的概念可以在不失几何特点的情况下，使用近于分析的方法解决几何问题．在这一篇的题解中给出了相当数量的类似解法，因此作为一般提示只看一个例子．

例．设点 A'，B'，C' 关于平面上任意一点分别和三角形ABC的顶点A，B，C对称．求

证：圆（$AB'C'$），（$BC'A'$），（$CA'B'$）交于圆（ABC）上的一点；而圆（$A'BC$），（$AB'C$），（ABC'）交于圆（$A'B'C'$）上一点．（图 7）

解．圆（ABC）和（$AB'C'$）的一个公共点是A，故还有另外一个公共点记作P．点A，B，C，P在同一个圆上，因而

$$(PA,PB)=(CA,CB)(\bmod\cdot\pi) \quad (1)$$

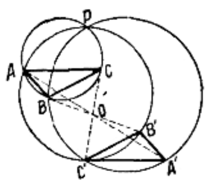

图 7

同理，A'，B'，C'，P四个点在同一个圆上，故

$$(PA,PC')=(B'A,B'C'). \qquad (2)$$

由（2）式逐项减（1）式，得

$$(PA,PB)-(PA,PC')=(CA,CB)-(B'A,B'C') \quad (\mathrm{mod}\cdot\pi),$$

注意到$B'C' \parallel BC$，由此得

$$(PC',PB)=(CA,AB') \qquad (\mathrm{mod}\cdot\pi). \qquad (3)$$

但由对称性 $CA \parallel C'A', AB' \parallel A'B$；因而（3）可化为：

$$(PC',PB)=(A'C',A'B) \qquad (\mathrm{mod}\cdot\pi). \qquad (4)$$

由此可见，A'，B，C'，P四个点在同一圆上，故P点在圆$(BA'C')$上。同理可以证明，P在圆$(CA'B')$上。同理(因为关于点O的对称性)，如果圆$(AB'C')$，$(BC'A')$，$(CA'B')$交于圆(ABC)上一点，则圆$(A'BC)$，$(B'AC)$，$(C'AB)$交于圆$(A'B'C')$上一点。

关于求点的轨迹问题，应指出：在这类问题中往往仅局限于必要条件的推导。例如，证明点M在某固定的直线上或圆上，当然，由此并不能得出结论：整个直线或整个圆都是轨迹。在十九章有很多题，其中点的轨迹是直线的一部分，或是圆周的一部分（包括一段或几段圆弧）。

因而，在得到（诸如点M在圆上，点M在直线上等等）必要条件之后应该进行讨论，以确定在满足必要条件的点中，哪些点满足轨迹所规定的最初条件。在这一篇提供了类似的习题（及其解答），所以就不在这里举例了。

还应指出，学生往往认为点的轨迹应该是一条曲线。这是一个错误的概念。满足这样或那样条件的点的轨迹，可以是平面的一部分，甚至也可能是整个平面。例如，若A和B

是平面上两个不同的点，则满足

$$MA>MB$$

的点M的轨迹，是线段 AB 垂直平分线一侧的整个半平面.

满足条件

$$MA<2MB$$

的点M的轨迹是以 CD 为直径的圆之外的整个平面，其中D和C是这样的两个点，使

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}=2.$$

（图 8）.

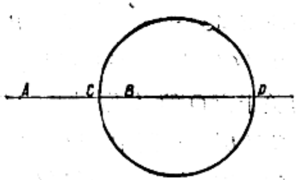

图 8

这一类轨迹问题未必和明显的几何不等式有关. 如对M点附加上相当广泛的条件，则它可以描绘出平面的一部分.

很难找到一个为本篇习题的分类所能遵循的一般的科学原则. 我们将习题分为以下几章：第十七章计算题，第十八章证明题，第十九章点的轨迹，第二十章作图题. 然而这样的分类不能把所有题分为上述三大类(计算，证明，作图)，因为很多题既是作图题又是计算题，同时包括一系列的证明. 这种类型的题归为第二十一章. 我们认为，在一个题中综合使用各种不同几何方法，将有助于对这种或那种几何方法效力的更深入了解. 在平面几何的最后一章，收集了所谓《杂题》，由于这些题的特点，我们无法把它归进平面几何的其它任何一章. 在解平面几何题时不应仅局限于通常在中学中使用的方法. 完全可以应用立体几何和三角解平面几何题. 这样做不但可以做到初等数

学许多分支的相互联系，而且可以比较各种方法的效力.

下面我们举几个例子。这些例子演示了透视法，立体几何方法在解平面几何题中的应用，同时还将演示一些解题技巧。读者可以了解到各种几何变换在解题中的应用。

例1．在平面上有三个圆C_1，C_2，C_3，其中任何一个圆都不在另一个圆之内。求证：C_1和C_2，C_2和C_3以及C_3和C_1各外公切线的（三个）交点在同一条直线上。

解．设P是三个已知圆所在平面。首先，过圆C_1和C_2的圆心O_1和O_2，向平面P的一侧分别作该平面的垂线。在两条垂线上分别截$O_1B_1=r_1$，$O_2B_2=r_2$，其中r_1和r_2各是圆C_1和C_2的半径。那么，我们证明直线B_1B_2过圆C_1和C_2外公切线的交点O'（图9）；事实上，因为点O_1，O_2和O'在一条直线

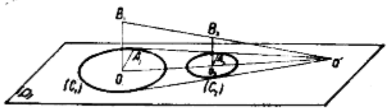

图 9

上，故三角形O_1A_1O'和O_2A_2O'相似，所以

$$\frac{O_1O_2}{O_2O'}=\frac{r_1-r_2}{r_2}.$$

设O''是直线B_1B_2和O_1O_2的交点。那么，由于三角形O_1B_1O''和O_2B_2O''相似，有

$$\frac{O_1O_2}{O_2O''}=\frac{r_1-r_2}{r_2}.$$

由以上两个等式得$O_2O'=O_2O''$，从而O'和O''重合。