# 中学数学题解

合肥市教育局教研室

# 说　　明

为了帮助中学生切实打好数学基础，提高他们综合运用数学基础设识，独立地分析问题和解决问题的能力，我们参照《全日制中学数学教学大纲》（试行草案）所规定的内容，结合一九七九年会国高考《复习大纲》的要求，组织部分数学教师，将平时在教学中积累的资料，选编成这本《中学数学题解》。全书分代数、平面几何与立体几何、三角、解析几何四个部分。共汇集684道难度较大的习题，均附有详解，有的一题多解。着重介绍一些解题方法和技巧，供中学生课外学习参考。同时可供教师在教学中选用。

参加本书编写的有：戈子文、程健生、田明刚、方炳荣、李祥伦、郭之尔、周祥裕、房西康、唐广宏、王世芳十位同志，并由戈子文、方炳荣、田明刚、程健生、李祥伦、吴荣发等同志负责审订和校对工作。但由于时间仓促、水平有限，在选题和校对等方面缺点、错误一定不少，请批评指正。

本书由肥西县印刷厂承印，对该厂的领导和工人师傅的大力支持表示感谢。

合肥市教育局教研室

一九七九年五月廿五日

# 勘 误 表

| 页 | 行 | 误 | 正 |
| --- | --- | --- | --- |
| 87 | 1 | $2y_1=ax^{2-3x+1}$ | $y=a^{2x^2-3x+1}$ |
| 88 | 4 | 100项与…… | 第100项与…… |
| 94 | 1 | 化简整理得：$xy-2)^2+$…… | 化简整理得$(xy-2)^2+$…… |
| 94 | 倒3 | $2^{6a}=3^{3b}=6$ | $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$ |
| 95 | 倒8 | $2\log_2{}^2=og_a(b+c)+\cdots$ | $2\log_a{}^a=\log_a(b+c)+\cdots\cdots$ |
| 97 | 5 | $2txyz=2\log_a x+\cdots\cdots$ | $2txyz=z\log_a x+\cdots\cdots$ |
| 101 | 倒7 | $x_2=2\cdots\cdots$ | $x_2=-2\cdots\cdots$ |
| 101 | 倒5 | $(\log\sqrt{5})^2+3\lg^x\sqrt{5}$ | $(\log_x\sqrt{5})^2+3\log\sqrt{5}\cdots\cdots$ |
| 101 | 倒3 | $(2\log_x\sqrt{5})+5(2\log_x\sqrt{5})+1$ | $(2\log_x\sqrt{5}+5)(2\log_x\sqrt{5}+1)=0$ |
| 101 | 倒2 | $\log=-\frac{5}{2}$ | $\log_x\sqrt{5}=-\frac{5}{2}$ |
| 104 | 倒8 | $\begin{cases}2^{\frac{x}{10}}\cdot2^{\frac{x}{10}}=2^{\frac{7}{x}}\\(x=y)(x-y)=40\end{cases}$ | $\begin{cases}2^{\frac{x}{10}}\cdot2^{\frac{y}{10}}=2^{\frac{7}{x}}\\(x+y)(x-y)=40\end{cases}$ |
| 105 | 6 | $\lg(1+g)=\cdots\cdots$ | $\lg(1+y)=\cdots\cdots$ |
| 106 | 倒7 | $\cdot3\cdot4-\cdots\cdots$ | $2\cdot3\cdot4-\cdots\cdots$ |
| 107 | 倒4 | 乘①得 | x乘①得 |

# 勘误

| 页 | 行 | 误 | 正 |
|---|---|---|---|
| 111 | 12 | （略） | $S_{m+n}=\frac{[2a_1+d(m+n-1)](m+n)}{2}=0$ |
| 117 | 1 | $\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\cdots\cdots$ | $\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_1)+\cdots\cdots$ |
| 122 | 11 | $\cdots\cdot\cos B$ | $\cdots\cdots\cos\frac{B}{2}$ |
| 123 | 倒8 | $2\sqrt{M^2-RS}=2\sqrt{\left(\frac{x+y}{}\right)^2-xy}$ | $2\sqrt{M^2-RS}=2\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}$ |
| 123 | 倒6 | $x-y=2\sqrt{M^2-RS}$ | $x-y=\sqrt{M^2-R}$ |
| 131 | 7 | $\cdots+\frac{}{a}$ | $\cdots+\frac{1}{a}$ |
| 139 | 倒4 | $'q=q^2+2q^3+\cdots$ | $S'q=q^2+2q^3\cdots$ |
| 139 | 倒3 | $\cdots=(n-1)q^n$ | $\cdots=(n-1)q^{}$ |
| 138 | 倒10 | $\cdots q=\pm 1$ | $\cdots q=\pm\frac{1}{2}$ |
| 169 | 11 | $6\times2+6\times3+6\times4\times6\times5=6\times14$ | $6\times2+6\times3+6\times4+6\times5=6\times14$ |
| 179 | 倒1 | …选出正副组长各人 | …选出正副组长各1人 |
| 192 | 8 | $\cdots+(C^3_{n+3}-C^3_{n+3})$ | $\cdots+(C^3_{n+3}-C^3_{n+2})$ |

# 勘 误 表

| 页 | 行 | 误 | 正 |
|---|---|---|---|
| 205 | 12 | $\|\sin kx\| \leqslant k\|\sin\|$ | $\|\sin kx\| \leqslant k\|\sin x\|$ |
| 208 | 9 | 共有$V_m$…… | 共有$V_n$…… |
| 209 | 倒5 | …其他不同重量的码， | …其他不同重量的砝码 |
| 222 | 1 | $\cos\Lambda\theta=$…… | $\cos n\theta=$…… |
| 227 | 10 | ……湖足 | ……满足 |
| 228 | 倒8 | $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AD}$ | $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ |

# 说　　明

为了帮助中学生切实打好数学基础，提高他们综合运用数学基础设识，独立地分析问题和解决问题的能力，我们参照《全日制中学数学教学大纲》（试行草案）所规定的内容，结合一九七九年会国高考《复习大纲》的要求，组织部分数学教师，将平时在教学中积累的资料，选编成这本《中学数学题解》。全书分代数、平面几何与立体几何、三角、解析几何四个部分。共汇集684道难度较大的习题，均附有详解，有的一题多解。着重介绍一些解题方法和技巧，供中学生课外学习参考。同时可供教师在教学中选用。

参加本书编写的有：戈子文、程健生、田明刚、方炳荣、李祥伦、郭之尔、周祥裕、房西康、唐广宏、王世芳十位同志，并由戈子文、方炳荣、田明刚、程健生、李祥伦、吴荣发等同志负责审订和校对工作。但由于时间仓促、水平有限，在选题和校对等方面缺点、错误一定不少，请批评指正。

本书由肥西县印刷厂承印，对该厂的领导和工人师傅的大力支持表示感谢。

合肥市教育局教研室

一九七九年五月廿五日

# 目　　录

# 第一部分　代　　数

## 第一章　代数的恒等变换

1．分解因式：$x^3+6x^2+11x+6$。

**解**　原式 $=(x^3+3x^2)+(3x^2+9x)+(2x+6)$

$=x^2(x+3)+3x(x+3)+2(x+3)$

$=(x+3)(x^2+3x+2)$

$=(x+3)(x+1)(x+2)$。

2．分解因式：$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$。

**解**　原式 $=[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$=(x^2+8x+7)^2+8(x^2+8x+7)+15$

$=(x^2+8x+7+3)(x^2+8x+7+5)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$。(有理数范围内)

3．分解因式：$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$。

**解**　原式 $=4[(x+6)(x+10)][(x+5)(x+12)]-3x^2$

$=4(x^2+16x+60)(x^2+17x+60)-3x^2$

$=4(x^2+16x+60)(x^2+16x+60+x)-3x^2$

$=4(x^2+16x+60)^2+4x(x^2+16x+60)+x^2-4x^2$

$=[2(x^2+16x+60)+x]^2-(2x)^2$

$=(2x^2+35x+120)(2x+15)(x+8)$。

(有理数范围内)

4. 分解因式：$(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$。

**解** 原式 $=3a^2bxy^2+3ab^2yx^2+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2$

$=3abxy\,[(ax+ay)+(bx+by)]$

$=3abxy\,[a(x+y)+b(x+y)]$

$=3abxy(a+b)(x+y)$。

5. 分解因式：$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$。

**解** 原式 $=b^2c+bc^2-a^2b-ab^2+ca(c-a)$

$=b^2(c-a)+b(c+a)(c-a)+ca(c-a)$

$=(c-a)(b^2+bc+ab+ca)$

$=(c-a)\,[b(a+b)+c(a+b)]$

$=(c-a)(a+b)(b+c)$。

6. 分解因式：$x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$。

**解法一** 根据双十字相乘法有

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \times & y \\ x^2 & & -3y \end{array} \quad \therefore\ x^4-2x^2y-3y^2=(x^2+y)(x^2-3y),$$

$$\begin{array}{ccc} x^2+y & \times & -2 \\ x^2-3y & & +2 \end{array} \quad \therefore \text{原式}=(x^2+y-2)(x^2-3y+2)。$$

（有理数范围内）

**解法二** 原式 $=(x^2-y)^2-4(y-1)^2$

$=(x^2-y+2y-2)(x^2-y-2y+2)$

$=(x^2+y-2)(x^2-3y+2)$。 （有理数范围内）

7. 分解因式：$3x^2-7xy-6y^2-10x+8y+8$。

**解** 根据双十字相乘法，

$$\because\ \begin{array}{ccc} 3x & \times & 2y \\ x & & -3y \end{array}$$

$\therefore\ 3x^2-7xy-6y^2=(3x+2y)(x-3y)$，

再根据双十字相乘法，

$$\begin{matrix} 3x+2y & & -4 \\ & \times & \\ x-3y & & -2 \end{matrix}$$

原式 $=(3x+2y-4)(x-3y-2)$。

8. 分解因式：$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$。

**解** 由+字相乘法，得

$$\begin{matrix} x^2+x+4 & & 3x \\ & \times & \\ x^2+x+4 & & 5x \end{matrix}$$

原式 $=(x^2+x+4+3x)(x^2+x+4+5x)$

$=(x^2+4x+4)(x^2+6x+4)$

$=(x+2)^2(x^2+6x+4)$。（有理数范围内）

$=(x+2)^2(x+3-\sqrt{5})(x+3+\sqrt{5})$。

（实数范围内）

9. 分解因式：$x^6-7x^4-26x^2+72$。

**解** 原式 $=(x^6-2x^4)-(5x^4-10^2)-(36x^2-72)$

$=x^4(x^2-2)-5x^2(x^2-2)-36(x^2-2)$

$=(x^2-2)(x^4-5x^2-36)$

$=(x^2-2)(x^2-9)(x^2+4)$

$=(x+3)(x-3)(x^2-2)(x^2+4)$

（有理数范围内）

$=(x+3)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+4)$

（实数范围内）

$=(x+3)(x-3)(x-\sqrt{2})$

$\times(x+\sqrt{2})(x+2i)(x-2i)$。（复数范围内）

10. m为何值时，$12x^2-10xy+2x^2+11x-5y+m$ 能分解成两个一次因式的乘积。

**解** 据题意，令：原式 $=(6x-2y+L)(2x-y+n)$

$=12x^2-10xy+2y^2+(2L+6n)x-(L+2n)y+Ln$，

比较系数，得

$$\begin{cases}2L+6n=11\\ L+2n=5\\ Ln=m\end{cases}$$
解得 $m=2$，$n=\frac{1}{2}$，$L=4$。

当$m=2$时，原式能分解成两个一次因式的乘积，

即原式 $=(6x-2y+4)(2x-y+\frac{1}{2})$

$=(3x-y+2)(4x-2y+1)$。

11.分解因式 $x^2-3y^2-8z^2+2xy+2xz+14yz$。

**解** $\because x^2+2xy-3y^2=(x-y)(x+3y)$，

故可令：原式 $=(x-y+Lz)(x+3y+mz)$

$=x^2-3y^2+2xy+Lmz^2+(L+m)$

$zx+(3L-m)zy$，

比较系数，得

$$\begin{aligned}Lm&=-8\\ L+m&=2\\ 3L-m&=14\end{aligned}$$
解得：$\begin{cases}L=4\\ m=-2\end{cases}$

$\therefore$原式 $=(x-y+4z)(x+3y-2z)$。

12. 如果a，d，c表示三角形三边长，且$a^3+b^3+c^3=3abc$，

**求证**：这个三角形是等边三角形。

**证明** $\because a^3+b^3+c^3=3abc$，

$\therefore a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2-3abc-3a^2b-3ab^2$

$=0$，

$(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=0$，

$(a+b+c)[a^2+b^2+2ab-ac-bc+c^2-3ab]$

$=0$，

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0,$$

但 $a+b+c\neq 0$,

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$,

等式两边同乘以2，得

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0,$$

$\therefore a=b=c$，即三角形是等边三角形。

**13.** 如果a，b，c，d都是实数，且满足关系式

$$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd,$$

**求证**：以a，b，c，d为边的四边形是菱形。

**证明** $\because a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$,

$\therefore (^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd=0$,

$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2[(ab)^2-2abcd+(cd)^2]=0$,

$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$,

$\therefore\ a^2-b^2=0\cdots(1)$; $c^2-b^2=0\cdots(2)$; $ab-cd=0\cdots(3)$

由(1)，(2)，(3)，知 $a=b=c=d$,

∴以a，b，c，b 为边的四边形是菱形。

**14. 证明**：$7^{2n+1}-48n-7$ 能被288整除。

**证明** $7^{2n+1}-48n-7$

$=7(7^{2n}-1)-48n$

$=7(49-1)(49^{n-1}+49^{n-2}+\cdots\cdots+1)-48n$

$=48[7(49^{n-1}+49^{n-2}+\cdots\cdots+1)-n]$

$=48[7^{2n-1}+7^{2n-3}+\cdots\cdots+7-n]$

$=48[(7^{2n-1}-1)+(7^{2n-3}-1)+\cdots\cdots+(7-1)]$

$=48\times 6\times[M]$（M为整数）

$=288\times[M]$,

∴ 原式能被288整除。

***15. 试证：** 对任何自然数a，n，数$a^{4n+1}-a$必被30整除。

**证明** (1)当n = 1时，

$$a^5-a=a(a^4-1)=a(a^2-1)(a^2+1)$$
$$=a(a^2-1)(a^2-4+5)$$
$$=a(a^2-1)(a^2-4)+5a(a^2-1)$$
$$=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$$
$$+5(a-1)a(a+1)$$

第一项为五个连续自然数的乘积可被３０整除，第二项为三个连续自然数乘积的五倍，故也可被３０整除，∴ $a^5-a$ 能被３０整除。

(2)当n>1时，则有

$$a^{4n+1}-a=a(a^{4n}-1)=a\,[(a^4)^n-1],$$
$$=a(a^4-1)\,[(a^4)^{n-1}+(a^4)^{n-2}$$
$$+(a^4)^{n-3}+\cdots\cdots+1]$$
$$=(a^5-a)\,[(a^4)^{n-1}+\cdots\cdots+1]$$

可见，$a^{4n+1}-a$ 也能被30整除。

〔标有 * 者为难度较大或大纲中暂未列入的内容，供参考。〕

***16. 求证：** $f(x)=x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}$可被$x^4+x^3+x^2+x$整除。

**证明** $\because x^4+x^3+x^2+x=x(x^3+x^2+x+1)$

$$=x\,[(x^3+x^2)+(x+1)]$$
$$=x(x+1)(x^2+1)$$
$$=x(x+1)(x+i)(x-i),$$

由于 $f(o)=0.$

$$f(-1)=(-1)^{4444}+(-1)^{3333}+(-1)^{2222}$$

$$+(-1)^{1111}=0,$$

$$f(-i)=1-i-1+i=0,$$

$$f(i)=1+i-1-i=0,$$

根据余数定理，$f(x)$可同时被$x$，$(x+1)$，$(x+i)$，$(x-i)$整除，故可被 $x^4+x^3+x^2+x$ 整除。

***17.** 多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n(a_0\neq0)$ 的系数均为有理数，求证这个多项式能被$x-1$所整除的必要与充分条件是 $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots a_n=0$。

**证明** (1)必要性：

设多项式$f(x)$能被$x-1$整除，设其商为$Q(x)$，（$Q(x)$为$n-1$次多项式），则必有$f(x)=Q(x)(x-1)$，

在此式中，令$x=1$，得$f(1)=Q(1)(1-1)=0$，

即$f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=0$；

(2)充分性：

设$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=0$，

若 $f(x)$不能被$x-1$整除，

于是，应有 $f(x)=Q(x)(x-1)+R$，这里，$R\neq0$是一个常数，以$x=1$代入，应有$f(1)=R\neq0$，

即 $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\neq0$，这与所设矛盾，故得证。

*** 18.** 任给五个整数，证明必能从其中选出三个，使得它们的和能被3整除。

**证明** 因为任一整数被3除，余数只可能是0，1，2中的一个，在五个整数被3除后所得的五个余数中，如果0，1，2都出现，则余数为0，1，2的三个数的和一定能被3整除，

如果5个余数中，只出现0，1，2中两个或一个，则其

中必有一个余数至少出现3次，那末余数相同的三个数的和一定能被3整除。

综上所述，从任意五个整数中，一定可以取出三个整数，使它们的和能被3整除。

* **19.** 从任意给定的n个自然数中，总可以找到k个数（其中k为自然数 $1\leqq k\leqq n$）且每个数至多取一次，使它们的和能被n整除。

**证明** 设n个自然数为 $M_1$，$M_2$，……，$M_n$，则总可以表成：$M_1=a_1n+b_1$，$M_2=a_2n+b_2$……，$M_n=a_nn+b_n$，

其中 $a_i$ 为零或自然数，若 $b_i$ 中有为0的，则结论已得证。因此不妨设：$1\leqq b_i\leqq n-1$ $(i=1,2\cdots\cdots n)$，

显然，$M_1<M_1+M_2<M_1+M_2+M_3<\cdots\cdots<\sum\limits_{i=1}^{n}M_i$

记 $R_I=\sum\limits_{i=1}^{I}M_i$ 假设这n个数中，存在某个数被n整除，则命题证毕。若不然，于是它们除以n后的余数，总是1,2……，n－1，中某一数，因此存在 $I_o$，$k_o$，使 $R_{I_o}$，$R_{k_o}$ 的余数相同，$(1\leqq I_o<k\leqq n)$ 于是

$$R_{k_o}-R_{I_o}=\sum_{i=1}^{k_o}M_i-\sum_{i=1}^{I_o}M_i=\sum_{i=I_o+1}^{k_o}M_i=Gn$$

（G为自然数）

即 $\sum\limits_{i=I_o+1}^{k_o}M_i$ 能被n整除，证毕。

* **20.** 七位数235xy54能被99整除，求x、y。

**解** 由于此数能被99整除，故可被11与9整除；

由被11整除得：$(2+5+y+4)-(3+x+5)=11m$，

即 $3-x+y=11m$，……(1) （m为整数）

由于 x，y 取 0,1……，9 中一个数字，

$\therefore\quad -9\leqq y-x\leqq 9,\quad -6\leqq 3-x+y\leqq 12,$

故m只可取0,1，

又由被9整除得：

$$2+3+5+x+y+5+4=9k,$$

即 $19+x+y=9k$……(2) （k为整数）

$$(1)+(2),\quad y=\frac{11m+9k}{2}-11,$$

令：$11m+9k=2S$，（S为整数）

则 $y=S-11$，

$\because\quad 0\leqq y\leqq 9,\qquad \therefore 11\leqq S\leqq 20$。

$$k=\frac{2s-11m}{9}=\frac{2s-2m}{9}-m$$

$$=\frac{2(s-m)}{9}-m,$$

$\therefore S-m$要能被9整除，

当$m=0$时，S可为 9，18，但$S=9$时，$y<0$，不合题意，

$S=18$时，$X=10$，不合题意，

当$m=1$时，S可为10,19，但$S=10$时，$y<0$仍不合题意，

仅当$S=19$时，$y=8$，$x=0$，符合题意，

∴原数中 x，y 分别为 0,8。

**21.**(1)试证明任意一个整数与它的数字和的差必能被9整除。

**证明** 设整数的个位、十位、百位……，的数字分别为，

$a_1$，$a_2$，$a_3$，……$a_n$，

则此整数与其数字和之差可表示为

$$a_n 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_3\times 10^2+a_2\times 10+a_1$$
$$-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$
$$=a_n(10^{n-1}-1)+a_{n-1}(10^{n-2}-1)+\cdots\cdots$$
$$+a_3(10^2-1)+a_2(10-1)+(a_1-a_1),$$

$\because 10^i-1=\underbrace{99\cdots\cdots9}_{i个}\quad(i=1,2,\cdots\cdots n-1)$能被9整除，

$\therefore$任一个整数与其数字和之差可被9整除。

（2）将上述整数按逆序重新排列，得一新数，新数与原数的差是9的整数倍。

**证明** 设原数为$N=a_n10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+\cdots\cdots$
$$+a_2 10+a_1,$$

按逆序排列得$N^1=a_1 10^{n-1}+a_2 10^{n-2}+\cdots\cdots$
$$+a_{n-1}10+a_n,$$

作差$M=N^1-N$（设$N^1>N$，若$N>N^1$可作$N-N^1$），

$$M=(a_1 10^{n-1}+a_2 10^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}10+a_n)$$
$$-(a_n 10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\cdot 10+a_1)$$
$$=a_1(10^{n-1}-1)+a_2(10^{n-2}-10)$$
$$+a_3(10^{n-3}-10^2)+\cdots\cdots-a_{n-1}(10^{n-2}-10)$$
$$-a_n(10^{n-1}-1)$$
$$=a_1(10^{n-1}-1)+a_2\cdot 10(10^{n-3}-1)+\cdots\cdots$$
$$-a_{n-1}\cdot 10(10^{n-3}-1)-a_n(10^{n-1}-1),$$

因为上述式中每一项都是9的倍数，

$\therefore$ $M=N^1-N$一定是9的倍数。

（3）将上述整数数字作任意调换，所成的差也能被9整除。

**证明** 设原数为$N=a_n 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_2\cdot 10+a_1$

现将$a_1$，$a_2$，$\cdots\cdots a_n$按随意的一种顺序排成