何迎晖　钱伟民　编著

随机过程简明教程

同济大学出版社

随机过程简明教程

何迎晖　钱伟民　编著

同济大学出版社

内容提要

本书介绍随机过程的基本理论和应用，内容包括随机过程的基本概念、马尔可夫链、平稳过程、平稳时间序列分析和随机过程的统计分析。在选材上强调实用性。本书实例丰富，每章附有相当数量的习题（书末附有答案）。帮助读者加深对基本概念和基本方法的理解。

本书可作为工科院校各专业研究生和应用数学专业本科生的教材，也可作为工程硕士类各专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程简明教程/何迎晖，钱伟民编著. —上海：同济大学出版社，2004.1

ISBN 7-5608-2614-8

Ⅰ.随… Ⅱ.①何… ②钱… Ⅲ.随机过程—高等学校—教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 107847 号

随机过程简明教程

何迎晖　钱伟民　编著

责任编辑　李炳钊　　责任校对　郁　峰　　封面设计　李志云

出版发行　同济大学出版社

（上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂印刷

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　19

字　数　380000

印　数　1—4000

版　次　2004 年 1 月第 1 版　　2004 年 1 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 7-5608-2614-8/O・246

定　价　20.00 元

前　言

随机过程是工科各专业研究生和应用数学专业学生的一门重要的基础课程。随机过程研究的是客观世界中随机现象演变过程的统计规律性，它在工科各专业中被广泛地应用。我们在多年教学实践的基础上编写了这本教材，企望能满足教学的需要。

本书在撰写过程中力求反映以下三方面的特点：

(1) 强调基本概念和基本方法的阐述和训练

尽管本书是学习随机过程的入门教材，但在随机过程的基本概念上力求讲清讲透，为此，安排了大量的例题和习题帮助学生理解基本概念和基本方法。

(2) 对学生的数学基础不作过高的要求

学习本书只需具有线性代数和高等数学的基础知识即可。我们在附录中给出了概率论的内容要点，供学生在学习时查用。本书不追求数学上的严格论证，对有些定理只就连续型或离散型随机变量的情形给出证明。

(3) 强调随机过程的应用

书中不仅介绍了随机过程理论在各专业中的应用实例，例如线性时不变系统、马尔可夫链用于岩性分析和市场占有率研究等；还介绍了数理统计在随机过程中的应用，如马尔可夫链的齐次性检验、平稳性检验等，使学生能真正做到学以致用。

使用本书作为教材，教学总时数约为 54 学时(每周 3 学时)。结合学生的实际情况，可用 2～3 学时学习附录中有关概率论的内容要点。

在本书的编写和出版过程中，我们得到了同济大学应用数学系领导和教师的大力支持，同济大学研究生院和同济大学出版社给予了大力帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中一定还会有不少缺点和错误，恳请读者指正。

编者

2003.7

目　录

第四章 平稳时间序列分析

第五章 随机过程的统计分析

附录 概率论内容综述

附 表

第一章　随机过程的基本概念

随机过程是随机数学的一个分支，它研究客观世界中随机现象演变过程的统计规律性。随机过程理论不仅广泛地应用于自然科学的各个领域（例如物理学、生物学、电子技术等），而且在社会科学的许多领域也日益受到重视。

本章介绍随机过程的定义，随机过程的分布与随机过程的数字特征，在此基础上，我们将给出一些常用的随机过程。

§1.1　随机过程

概率论的主要研究对象是随机变量。我们用一个或有限个随机变量来描述随机试验所产生的随机现象。但是，现实世界中的许多现象是随着时间的进展而变化发展的，这些现象表现为一个过程，对这类随机现象仅有一个或有限个随机变量来描述是不够的，必须用无限多个随机变量来描述这一过程。

下面来考察几个例子。

例 1.1　某人不断地掷一颗骰子。设 $X(n)$ 表示第 n 次掷骰子时出现的点数，$n=1,2,\cdots$。对任意一个 n，在第 n 次掷骰子前不知道试验结果会出现几点，因此，$X(n)$ 是一个随机变量。这样，随机现象可以用一族随机变量 $\{X(n),n\geqslant 1\}$ 来描述。

例 1.2　设 $X(t)$ 表示某流水线从开工 $(t=0)$ 到时刻 t 为止的累计次品数。在开工前不知道时刻 t 时累计次品数将有多少，因此，$X(t)$ 是一个随机变量。假定流水线不间断地工作，随机现象可以用一族随机变量 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 来描述。

例 1.3　由于热岛效应，上海的气温在不断转暖，设 $X(n)$ 表示从 21 世纪开始第 n 天的最高气温（单位：℃）。对于生活在 21 世纪的人来说，他们不知道 $X(n)$ 的确切值是多少，因此，$X(n)$ 是一个随机变量。这样，随机现象可以用一族随机变量 $\{X(n),n\geqslant 1\}$ 来描述。

例 1.4　设 $X(t)$ 表示从年初 $(t=0)$ 到时刻 t 为止全国累计货运量（单位：万吨）。在前一年不知道下一年中 $X(t)$ 的确切值是多少，因此，$X(t)$ 是一个随机变量。假定统计工作不间断地进行，随机现象可以用一族随机变量 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 来描述。

上述例子的共同特点是，不是静止地关心某种随机现象，从而研究个别的随机变量，而是动态地关心某种随机现象如何随着时间的进展而变化发展的，这需要研究由

许多随机变量组成的一族随机变量。一般而言，这族随机变量包含无限多个随机变量。如果这族随机变量仅含有限多个随机变量(例如，在例 1.1 中仅打算掷骰子 10 次)，那么，这类问题可以用概率论中的多维随机变量来解决。一族随机变量描述了随机现象的变化发展过程。

考察某个随机试验。设**样本空间**为 Ω，$\mathscr{A}$ 是全体随机事件组成的 σ 域，P 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的概率。$(\Omega,\mathscr{A},P)$ 构成一个**概率空间**[①]。

定义 1.1 给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 与集合 $T\subset(-\infty,\infty)$。如果对每一个 $t\in T$，$X(t)$ 是一个随机变量，那么，称随机变量族 $\{X(t),t\in T\}$ 为**随机过程**。

在不致引起混淆时，随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 也可以记作 $\{X(t)\}$ 或 $X(t)$。

定义 1.1 中的 T 称为**参数集**(或**指标集**)，称 t 为**参数**(或**指标**)。由于在绝大多数应用场合下，t 表示**时间**，因此也称 T 为**时间集**，在例 1.1 与例 1.3 中，$T=\{1,2,\cdots\}$；在例 1.2 与例 1.4 中，$T=[0,\infty)$。如果 T 是由有限个或可列无限个元素组成的集合，那么，称 $\{X(t),t\in T\}$ 为**离散时间**(或**离散参数**)的随机过程。例 1.1 与例 1.3都是离散时间的随机过程，当 T 是有限集时，$\{X(t),t\in T\}$ 就是概率论中的多维随机变量。如果 T 是一个区间，那么，称 $\{X(t),t\in T\}$ 为**连续时间**(或**连续参数**)的随机过程，例 1.2 与例 1.4 都是连续时间的随机过程。

在离散时间的随机过程中，不妨记参数集 $T=\{t_1,t_2,\cdots\}$。对每一个参数 $t_1,t_2,\cdots$，得到随机变量 $X(t_1),X(t_2),\cdots$。这样，随机过程由一个随机变量序列组成。通常称它为**随机序列**(或**时间序列**)。随机序列 $\{X(t_n),n\geqslant1\}$ 记作 $\{X(n),n\geqslant1\}$ 或 $\{X_n,n\geqslant1\}$。在不致引起混淆时，也可以记作 $\{X_n\}$ 或 X_n。时间序列常用的参数集还有 $\{0,1,2,\cdots\}$，$\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$。

在定义 1.1 中，规定指标集 $T\subset R$，这并非是必要的，T 可以是任意一个集合。例如，$X(t)$ 表示一位赛车手比赛过程中的车速，指标 $t=(t_1,t_2,t_3)$，其中，t_1 表示风速，t_2 表示风向，t_3 表示时间。这时，指标集 $T\subset R$ 不成立，但 $X(t)$ 仍是一个随机过程。限于本书的性质，今后，总是在 $T\subset R$ 的前提下来研究随机过程。

给定一个随机过程 $\{X(t),t\in T\}$，对任意一个固定的 $t\in T$，随机变量 $X(t)$ 所取的值称为随机过程 $X(t)$ 在时刻 t 所处的**状态**。随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 中所有随机变量可能取值的全体称为随机过程 $X(t)$ 的**状态空间**，记作 E。状态空间 E 就是全体状态组成的集合。在例 1.1 中，$E=\{1,2,\cdots,6\}$；在例 1.2 中，$E=\{0,1,2,\cdots\}$；在例 1.3 中，$E=(-\infty,\infty)$；在例 1.4 中，$E=[0,\infty)$。不难看出，在上述例子中，把状态空间作了适当扩大，这仅仅是为了数学上处理的方便。如果 E 是由有限个或可列无限个元素组成的集合，那么，称 $\{X(t),t\in T\}$ 为**离散状态**的随机过程。例 1.1 与例 1.2 都

① 有关概念见附录 §1。对此不感兴趣的读者可以略去不读，这不会影响对本书内容的理解。

是离散状态的随机过程。如果 E 是一个区间，那么，称 $\{X(t),t\in T\}$ 为**连续状态**的随机过程。例 1.3 与例 1.4 都是连续状态的随机过程。

在概率论中引进随机变量时，曾经强调随机变量 $X=X(\omega)$ 是样本点 ω 的函数，$\omega\in\Omega$。这表明，对于一个随机变量 $X(\omega)$，在试验前，$X(\omega)$ 的取值是随机的；在试验后 $X(\omega)$ 是一个普通的实数，这个实数值由试验结果 ω 决定。对于随机过程 $\{X(t),t\in T\}$，要作同样的理解。要把随机过程 $X(t)=X(\omega,t)$ 看作是定义在 Ω 与 T 上的二元函数。在试验前，对任意一个 $t_0\in T$，$X(\omega,t_0)$ 的取值是随机的，因而随机过程 $X(\omega,t)$ 表现为一族随机变量。在试验后，即给定表达试验结果的样本点 ω_0 时，$X(\omega_0,t)$ 是一个普通的函数 $x(t)\triangleq X(\omega_0,t)$，$t\in T$，它以参数 t 为自变量、状态 $x(t)$ 为因变量，参数集 T 为定义域、状态空间 E 为值域。称函数 $x(t)(t\in T)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的一个**样本函数**，它的图像称为**样本曲线**（或一条**轨道**）。每作一次观测（即完成一次随机试验），可以得到一个样本函数。由于在试验前，无法确切地知道将会得到怎样的一个样本函数，因此，随机过程也称为**随机函数**。

例 1.5　给定随机相位正弦波

$$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta),-\infty<t<\infty$$

其中，a 与 ω 都是正常数，Θ 服从区间 $[0,2\pi)$ 上的均匀分布 $R(0,2\pi)$，随机过程 $X(t)$ 的参数集 $T=R$，状态空间 $E=[-a,a]$。这是一个参数连续状态连续的随机过程。对任意一个 $t\in T$，$X(t)$ 是随机变量 Θ 的函数，因此，$X(t)$ 是一个随机变量。另一方面，如果在试验后得到随机变量 Θ 的一个观测值 θ，相应地便有一个样本函数 $x(t)=a\cos(\omega t+\theta)$，$-\infty<t<\infty$。对于 θ 的不同的三个值 $\theta_1=0,\theta_2=\frac{3\pi}{2},\theta_3=\pi$，图 1.1 给出了三条不同的样本曲线 $x_i=a\cos(\omega t+\theta_i),i=1,2,3$。

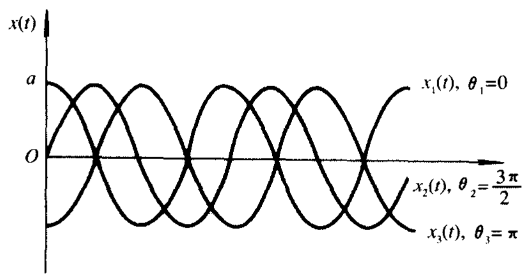

图 1.1　随机相位正弦波的样本曲线

样本函数包含了随机过程统计特性的许多有用信息。在实际应用问题中，样本函数为随机过程的研究提供了统计推断的基础，犹如数理统计中样本为总体的研究

提供了统计推断的基础。有关这方面的内容，将在第五章中作详细介绍。

为了说明随机过程应用的广泛性，下面再给出一些例子。

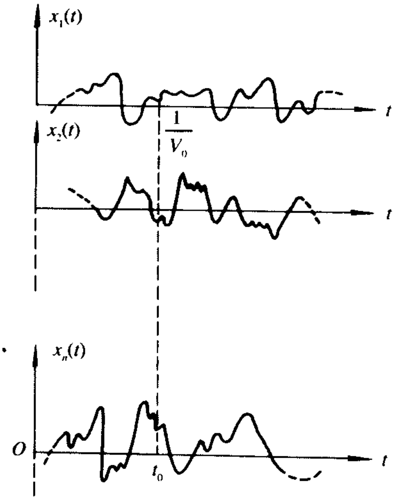

图 1.2　热噪声电压的样本曲线

例 1.6　电子元件由于内部微观粒子(如电子)的随机热运动所引起的端电压称为热噪声电压。以电阻的热噪声电压为例，设 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 表示热噪声电压。进行一次长时间测量得到一条时间-电压曲线 $x_1(t)$；再作一次观测，得到另一条曲线 $x_2(t)$，…；第 n 次观测得到曲线 $x_n(t)$。这 n 条样本曲线示意图见图 1.2。在 $t=t_0$ 处，从图 1.2 看到 $x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)$ 的值是不同的，这体现了固定 $t=t_0$ 时，随机变量 $X(t_0)$ 的随机性。随机过程为热噪声电压的研究提供了数学模型。对于这类物理现象的研究奠定了统计物理的数学基础。

例 1.7　一个生物群体的大小(例如我国存活大熊猫的总数)是随机的。设 $X(t)$ 表示时刻 t 时该生物群体的大小。$\{X(t), t\in T\}$ 是一个随机过程。对这个随机过程的研究有助于了解该生物群体的数量遗传规律，进而对该生物群体的灭种现象有所防范。

例 1.8　设 $X(t)$ 表示在时间段 $[0,t]$ 内到达某无线寻呼台的呼叫次数，$\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是一个随机过程。在交通工程中，$X(t)$ 可以表示在时间段 $[0,t]$ 内到达某路口的车辆数，$\{X(t), t\geqslant 0\}$ 也是一个随机过程。对这类随机过程的研究有助于了解等候时间的数量变化规律等随机现象。这些构成了**排队论**的主要内容。排队论是随机过程的一个重要的应用分支。

例 1.9　设 $X(n)$ 表示第 n 年的国内零售消费总量，$n=1,2,\cdots$。$\{X(n), n\geqslant 1\}$ 是一个随机序列。如何根据已有的统计数据 $X(1)=x_1, \cdots, X(k)=x_k$ 来预测下一年度的国内零售消费总量 $X(k+1)$？这类预测对政府有关部门了解经济景气程度并制订相应的财政货币政策是十分重要的。

例 1.10　某商店销售一种商品，设 $X(t)$ 表示在时间段 $[0,t]$ 内该商品的销售量；$Y(t)$ 表示时刻 t 发出的订货单到最终得到所订货物所需要的时间。$\{X(t), t\geqslant 0\}$ 与 $\{Y(t), t\geqslant 0\}$ 都是随机过程。对这两个随机过程的研究(包括对这两个随机过程之间互相联系的研究)为该商店建立最优的存储控制提供了依据。

随机过程理论产生于 20 世纪初，它是由物理学、生物学、通讯与控制、管理科学

等方面的研究需要而逐步发展起来的。此外，随机过程在天文学、地质学、工程随机振动理论、随机系统理论、计量经济学与随机运筹学等领域都有着广泛的应用。随机过程应用的广泛性源于自然现象与社会现象的随机性，随机过程理论为大量复杂的随机现象的研究提供了数学工具。

§1.2　随机过程的分布

概率论的基本内容是研究随机变量的分布。随机变量的分布刻划了随机变量的统计规律性。分布的表现形式是分布函数(或离散型随机变量的概率函数，或连续型随机变量的密度函数)。随机过程$\{X(t),t\in T\}$由一族随机变量组成。如何描述这族随机变量的统计规律性(即分布)？当参数集 T 为有限集时，随机过程$\{X(t),t\in T\}$由有限个随机变量组成，它本质上与概率论中的多维随机变量相同，因此可以借助于多维随机变量的分布函数(或概率函数，或密度函数)来表达随机过程$\{X(t),t\in T\}$的分布。这在概率论中已经圆满解决了。当 T 是无限集时，可以借助于有限个随机变量的联合分布来刻划**随机过程$\{X(t),t\in T\}$的分布**。

给定一个随机过程$\{X(t),t\in T\}$。

对任意一个 $t\in T$，$X(t)$是一维随机变量。$X(t)$的分布函数为

$$F(x;t)\triangleq P(X(t)\leqslant x),\ x\in R$$

称 $F(x;t)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**一维分布函数**。对于不同的 t，$X(t)$是不同的随机变量，因此，$F(x;t)$一般也不同。全体一维分布函数组成的集合$\{F(x;t),x\in R:t\in T\}\triangleq\mathscr{F}_1$ 称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**一维分布函数族**。

对任意两个 $t_1,t_2\in T$，$(X(t_1),X(t_2))$是二维随机变量。$(X(t_1),X(t_2))$的分布函数为

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2)\triangleq P(X(t_1)\leqslant x_1,\ X(t_2)\leqslant x_2),(x_1,x_2)\in R^2$$

称 $F(x_1,x_2;t_1,t_2)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**二维分布函数**。对不同的 t_1,t_2，$(X(t_1),X(t_2))$是不同的二维随机变量，因此，$F(x_1,x_2;t_1,t_2)$一般也不同。全体二维分布函数组成的集合$\{F(x_1,x_2;t_1,t_2),(x_1,x_2)\in R^2:t_1,t_2\in T\}\triangleq\mathscr{F}_2$ 称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**二维分布函数族**。

一般地，对任意 n 个 $t_1,\cdots,t_n\in T$，$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$是 n 维随机变量。$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$的分布函数为

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)\triangleq P(X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n),(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$$

称 $F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 **n 维分布函数**。全体 n 维分布函数组成的集合 $\{F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n),(x_1,\cdots,x_n)\in R^n:t_1,\cdots,t_n\in T\}\triangleq\mathscr{F}_n$ 称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 **n 维分布函数族**。

定义 1.2 随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的全体一维分布函数族 $\mathscr{F}_1$，二维分布函数族 $\mathscr{F}_2,\cdots$ 的并集

$$\mathscr{F}\triangleq\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n=\{F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n):t_1,\cdots,t_n\in T,n\geqslant1\}$$

称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**有限维分布函数族**。

假定随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 是一个连续状态的随机过程。对任意一个 $t\in T$，$X(t)$ 通常是连续型随机变量，它的密度函数记作 $f(x;t)$。称 $f(x;t)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**一维密度函数**。全体一维密度函数组成的集合称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**一维密度函数族**。一般地，称 $(X(t_1),\cdots,X(t_n))$ 的密度函数 $f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 **n 维密度函数**。全体 n 维密度函数组成的集合称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 **n 维密度函数族**。随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的一维密度函数族、二维密度函数族、……的并集

$$\{f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n):t_1,\cdots,t_n\in T,n\geqslant1\}$$

称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**有限维密度函数族**。

对于离散状态的随机过程是类似的，相应地有随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**有限维概率函数族**。

随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布函数族、有限维密度函数、有限维概率函数族统称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**有限维分布族**。有限维分布族刻划了随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 取值的统计规律性。

下面举例说明如何求随机过程的一、二维分布，所用方法不超出概率论知识的范围。

例 1.11 设随机过程 $X(t)=tV,t\geqslant0$，其中，V 是随机变量，V 的概率函数为

V	-1	1
Pr	0.4	0.6

试求随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数 $F(x;\frac{1}{2})$ 与 $F(x;2)$ 及二维分布函数 $F(x_1,x_2;\frac{1}{2},2)$。

解 当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$X(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}V$ 是离散型随机变量，它的概率函数为

$X(\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
p_r	0.4	0.6

因此，$X(\frac{1}{2})$的分布函数为

$$F(x;\frac{1}{2})=\begin{cases}0, & x<-\frac{1}{2}\\ 0.4, & -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\\ 1, & x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

当 $t=2$ 时，$X(2)=2V$ 是离散型随机变量，它的概率函数为

$X(2)$	-2	2
p_r	0.4	0.6

因此，$X(2)$的分布函数为

$$F(x;2)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0.4, & -2\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

当 $t_1=\frac{1}{2}, t_2=2$ 时，$\left(X\left(\frac{1}{2}\right), X(2)\right)=\left(\frac{1}{2}V, 2V\right)$是二维离散型随机变量，它的取值范围是$\{(-\frac{1}{2},-2),(\frac{1}{2},2)\}$，它的概率函数为

$X(\frac{1}{2})$ \ $X(2)$	-2	2
$-\frac{1}{2}$	0.4	0
$\frac{1}{2}$	0	0.6

因此，$\left(X\left(\frac{1}{2}\right), X(2)\right)$的分布函数

$$F\left(x_1, x_2; \frac{1}{2}, 2\right)=P\left(X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x_1, X(2)\leqslant x_2\right)$$

$$=\begin{cases}0, & x_1<-\frac{1}{2}\text{或 } x_2<-2\\ 0.4, & -\frac{1}{2}\leqslant x_1<\frac{1}{2}\text{且 } x_2\geqslant -2, x_1\geqslant -\frac{1}{2}\text{且}-2\leqslant x_2<2\\ 1, & x_1\geqslant\frac{1}{2}\text{且 } x_2\geqslant 2\end{cases}$$

在例 1.11 中，当 $t=0$ 时，把 $X(0)$ 视作服从**退化分布**（见附录 §2）$P(X(0)=0)=1$ 的随机变量。

例 1.12 通过抛掷一枚均匀硬币定义一个随机过程 $\{X(t),-\infty<t<\infty\}$，其中

$$X(t)=\begin{cases}\cos t, & \text{出现正面}\\ t, & \text{出现反面}\end{cases}$$

试求随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数 $F\left(x;-\frac{\pi}{4}\right)$ 与 $F\left(x;\frac{\pi}{4}\right)$ 及二维分布函数 $F\left(x_1,x_2;-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$。

解 当 $t=-\frac{\pi}{4}$ 时，$X\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 是离散型随机变量，它的取值范围是 $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right),-\frac{\pi}{4}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\pi}{4}\right\}$。由于硬币出现正面与出现反面的概率都是 $\frac{1}{2}$，因此，$X\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 的概率函数为

$X\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
p_r	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

从而 $X\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 的分布函数为

$$F(x;-\frac{\pi}{4})=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{4}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1, & x\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

类似地，当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的取值范围是 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right\}$，它的概率函数为

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
p_r	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

从而 $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$的分布函数为

$$F(x;-\frac{\pi}{4})=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x<\frac{\pi}{4}\\ 1, & x\geqslant\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

当 $t_1=-\frac{\pi}{4}, t_2=\frac{\pi}{4}$时，$\left(X\left(-\frac{\pi}{4}\right),X\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$是二维离散型随机变量，当硬币出现正面时，它取值$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$的概率为$\frac{1}{2}$；当硬币出现反面时，它取值$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$的概率为$\frac{1}{2}$。因此，$\left(X\left(-\frac{\pi}{4}\right),X\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$的概率函数为

$X(-\frac{\pi}{4})$ \ $X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

从而$\left(X\left(-\frac{\pi}{4}\right),X\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$的分布函数

$$F\left(x_1,x_2;-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=P\left(X\left(-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant x_1,X\left(\frac{\pi}{4}\right)\leqslant x_2\right)$$

$$=\begin{cases}0, & x_1<-\frac{\pi}{4}\text{或 }x_2<\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0, & -\frac{\pi}{4}\leqslant x_1<\frac{1}{\sqrt{2}}\text{且}\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x_2<\frac{\pi}{4}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{4}\leqslant x_1<\frac{1}{\sqrt{2}}\text{且 }x_2\geqslant\frac{\pi}{4},x_1\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\text{且}\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x_2<\frac{\pi}{4}\\ 1, & x_1\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\text{且 }x_2\geqslant\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

例 1.13 设随机过程 $X(t)=U+tV,-\infty<t<\infty$，其中，$U,V$ 是相互独立的随机变量，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$。由正态分布的性质知道，对任意一个 $t\in R$，

$$X(t)=U+tV\sim N(0,1+t^2)$$

因此，随机过程 $X(t)$ 的一维密度函数为

$$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}\right\},x\in R$$

在概率论中，正态分布 $N(\mu\sigma^2)$ 是一个重要的常用分布，它的函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},x\in R$$

正态分布可以推广成 n 维正态分布 $N(\vec{\boldsymbol{\mu}},\vec{\boldsymbol{C}})$，它的密度函数为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\vec{\boldsymbol{C}}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{\mu}})^T\vec{\boldsymbol{C}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{\mu}})\right\},\vec{x}\in R^n$$

其中，$\vec{\boldsymbol{x}}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，均值向量 $\vec{\boldsymbol{\mu}}=(EX_1,\cdots,EX_n)^{\mathrm{T}}$，T 表示向量或矩阵的转置，协方差矩阵

$$\vec{\boldsymbol{C}}=\begin{pmatrix}\mathrm{cov}(X_1,X_1) & \mathrm{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_n)\\ \mathrm{cov}(X_2,X_1) & \mathrm{cov}(X_2,X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathrm{cov}(X_n,X_1) & \mathrm{cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_n,X_n)\end{pmatrix}$$

$|\vec{\boldsymbol{C}}|$ 是矩阵 $\vec{\boldsymbol{C}}$ 的行列式。n 维正态分布的性质见附录 §6。直接判断 n 维随机变量是否服从 n 维正态分布是比较困难的。下面的引理 1.1 给出了一个较方便的判定准则。

引理 1.1 n 维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布的充分必要条件是：对任意实数 $l_1,\cdots,l_n$，随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}l_iX_i$ 服从一维正态分布。

熟悉**特征函数**知识的读者可在附录 §6 中找到这条引理的证明，在引理 1.1 中，当 $l_1=\cdots=l_n=0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}l_iX_i$ 服从退化分布，但也可以认为它服从**退化的正态分布** $N(0,0)$。严格说明需要用到特征函数概念。以后类似的情形不再一一指明。

正态分布在随机过程中也有相应的表现形式。

定义 1.3 给定随机过程 $\{X(t),t\in T\}$。如果 $X(t)$ 的任意有限维分布都是 n 维正态分布，即对任意的 $t_1,\cdots,t_n\in T(n\geqslant 1)$，$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$ 都服从 n 维正态分布，