理科现代科技研究丛书

集论拓扑学引论

戴牧民　编著

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

集论拓扑学引论

集论拓扑学引论

戴牧民　编著

广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

集论拓扑学引论／戴牧民编著．—桂林：广西师范大学出版社，2003．2

ISBN 7-5633-3852-7

Ⅰ．集…　Ⅱ．戴…　Ⅲ．集论拓扑　Ⅳ．0189.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 005939 号

广西师范大学出版社出版发行

（桂林市育才路 15 号　邮政编码:541004
网址:http://www.bbtpress.com.cn）

出版人:萧启明

全国新华书店经销

广西师范大学出版社印刷厂印刷

（广西桂林市临桂县金山路 168 号　邮政编码:541100）

开本:890 mm×1 240 mm　1/32

印张:8.75　插页:2　字数:252 千字

2003 年 2 月第 1 版　2003 年 2 月第 1 次印刷

印数:001～500　定价:15.00 元

序　言

在拓扑学发展的早期阶段，就曾出现过一些令拓扑学家们绞尽脑汁也难以回答的问题．例如，第一可数的紧 Hausdorff 空间是否一定具有连续统的势，有没有正则的、遗传可分的、非 Lindelöf 的空间或者正则的、遗传 Lindelöf 的不可分的空间，是否每个序完备的、满足可数链条件的、自密的全序集都同构于一个区间，是否每一个正规 Moore 空间都是可度量的，等等．由于没有找到好的方法或者强有力的工具，这些问题要么长期以来得不到解决，要么得借助一些纯属于集论的命题给出一些答案，而这些命题的合理性在当时尚未得到确认．后来由于集论的发展，首先是 Gödel 证明了连续统假设与 ZFC 公理系统的相容性，然后是 Cohen 证明了连续统假设与 ZFC 公理系统的独立性，以及像 Devlin 和 Jensen 等人关于 L 的精细构造的研究，使一大批集论命题获得了独立的地位．20 世纪 60 年代以来，运用这些独立的集论命题来解答点集拓扑学提出的问题成了点集拓扑学研究的一个重要趋势，取得了丰硕成果并导致了“集论拓扑学”这一名词的出现（然而它似乎不能看成是从点集拓扑学派生出来的独立分支）．点集拓扑学中许多问题在 ZFC 公理系统中往往是得不到或很难得到解答的．集论假设则是一种解决这类问题的有力工具．有时一个拓扑学问题一时在 ZFC 公理系统中找不到肯定或否定的答案，然而通过运用某个集论公理可以得出一个证明或一个反例．尽管从某种意义上说它还不算很圆满，但至少也是一个相容性的结论，它可以增强对这个问题是非判断的倾向性．拓扑学中不乏这样的事例．例如，是否存在仿紧空间其乘积是正规而非仿紧？Przymusinski 1973 年首先在 MA + ¬ CH下给出一个反例，之后到 1980 年才给出绝对的反例．又如，人们早就知道 Suslin 线是具有 $\mathrm{Cal}(\omega_1,\omega)$而其平方没有 $\mathrm{Cal}(\omega_1,\omega)$的例子，后来又有了 CH 下的反例，1986 年周浩旋在MA + ¬ CH下又作出了反例，这样人们就产生了存在绝对反例的

强烈信念.果不其然,这种反例于 1993 年被 Watson 和周浩旋得到了.再如,关于仿紧,甚至是紧空间的可数箱乘积是否正规的问题,杨守廉最近得到了一个非常漂亮的结果.而在此之前,有关这方面的正面结论全都是相容性的.可以想象,若是没有前人在各种集论假设下做的大量工作作基础,杨守廉的漂亮结果恐怕是出不来的.众多事例说明,一个从事点集拓扑学研究的人如果对这些集论工具掌握得越多,领会得越深,研究起来就越会显得左右逢源,得心应手.所以,一个攻读拓扑学专业方向的研究生不应当对集论拓扑学一无所知,至少也需要有一个初步的了解.这就是我们编写这一作为拓扑学方向高年级研究生集论拓扑学课程的入门性讲义的目的.同时,鉴于目前国内还没有出版过集论拓扑学方面的著作或教材,这本书也算是填补了一项国内的空白.

关于集论拓扑学的参考书籍,迄今见到的有三种.一种是 Rudin 的 *Lectures on Set-theoretic Topology* (1975).一种是由 Kunen 和 Vaughan 主编,二十多位著名拓扑学家分别撰写的 *Handbook of Set-Theoretic Topology* (1984,以下简称《手册》).一种是 Fremlin 的 *Consequences of Martin's Axiom*(1984).Rudin 的书是一本起过很大作用的经典之作,而 Kunen 和 Vaughan 主编的《手册》却是一部百科全书式的鸿篇巨制,Fremlin 的书则是专门论述 Martin 公理的.它们作为入门性教材似乎都不太适宜.Rudin 的讲义是由她在一个学术会议上所作的专题报告整理而成的,在条理和系统上都不太像一本教科书,再则 1974 年以后的许多成果未能编入,而《手册》一书就其编纂目的、材料取舍和篇幅大小而言都不能算是一本教科书.而且这两本书的一个共同点是在论证上不少地方失之简略,不便于初学者阅读.至于 Fremlin 的书,一则它仅限于介绍 Martin 公理,不够全面,再则由于作者是一位集论专家,编书时其叙述及论证方式往往遵循集论的习惯,初学者一时恐怕难以适应.最后还应指出,20 世纪 80 年代以来,我国的拓扑学者在集论拓扑学方面也做了一些工作,由于种种原因,在这三本书中基本上都没有得到反映.所以本讲义的编写意图可以归结为以下五点:(1) 适量的篇幅;(2) 恰当的起点;(3) 一定的系统;(4) 较详的论证;(5) 尽可能反映我国学者的某些成果.

在编排上，本书没有采取像 Rudin 的书或《手册》那样按拓扑问题来分类的方法．我们是以常用的几条集论假设作为主线，围绕它们在各种拓扑学问题上的应用来展开的．我们认为这样做的好处是通过把同一集论假设的应用方法相对集中，也许能使读者便于比较，获得较深的印象，更好地领会其精神和技巧．在每一章的编排上，我们则尽可能遵循由浅入深、由简单到复杂的原则．

全书共分四章．第一章介绍连续统假设的应用，第二章介绍 Martin 公理的应用，第三章介绍弱连续统假设和 Q 集的应用，第四章介绍 Suslin 线和◇原理的应用．每一章又分为若干节，每一节大致围绕着某个拓扑问题及相近问题进行讨论．每章最后一节，对本章集论假设其他方面的应用成果及与之有关的问题的进展情况就我们所知的作一些介绍，以扩大知识面．书末列出了大约 400 篇参考文献．

阅读本书所需的预备知识，一般拓扑学方面，我们希望读者能熟悉 Engelking 的 *General Topology* 一书，另外也希望读者能读过前述《手册》中 Burke 的"Covering Properties"和 Gruenhage 的"Generalized Metric Spaces"两章．高国士的《拓扑空间论》、蒋继光的《一般拓扑学专题选讲》和林寿的《广义度量空间与映射》也是很好的参考书．王世强和杨守廉著的《独立于 ZFC 的数学问题》一书也可以参考．少数地方需要参考一些初始文献．至于集论方面，只需要一些初等知识即可(大体上相当于 Enderton 的 *Elements of Set Theory* 一书或 Kunen 的 *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs* 第一章)，不要求对 Gödel 模型和 forcing 方法有何种了解．

这本书实际上也是作者学习和从事集论拓扑学教学的一点心得．由于编者学识有限，以及作为一本入门性教学用书的编写宗旨，在材料取舍上不可能做到全面、深入，许多方面的问题都未作深入介绍，特别像 $\beta\mathbf{N}$ 研究和箱乘积研究的成果，集论公理在拓扑测度理论中的应用以及大基数公理在拓扑学中的应用，直接用 forcing 方法构造拓扑空间等都没有介绍．读者如欲在这些方面作进一步了解，需要学习更深入一些的集论知识，阅读一些专门的文献著作．

本书的撰写纳入了国家自然科学基金项目和广西壮族自治区教育

厅科研项目,它的写作和出版获得了这两个项目的支持.

最后,由于作者在集论拓扑学方面所涉不深,书中一定存在某些错谬之处,诚望读者不吝赐正.同时也借此机会向多年来关怀、支持我的国内拓扑学界前辈和同行们表示衷心的感谢.我特别要感谢原四川大学的周浩旋同志和我的学生及同事陈海燕与刘川同志,他们在我编写此书的过程中提供了许多资料和很多有价值的建议,同时,我也要感谢我的同学余鑫晖同志为本书的出版面世所付出的辛勤劳动.

作　者

目　录

第一章　连续统假设及其应用

引　言

连续统假设(Continuum Hypothesis),简记为 CH,是指 $2^{\omega}=\omega^{+}=\omega_1$ 成立.广义连续统假设(Generalized Continuum Hypothesis),简记为 GCH,是指对任何基数 $\kappa\geqslant\omega$,有 $2^{\kappa}=\kappa^{+}$.这两个命题早在 Cantor 对集论开展的最初研究中就提出来了.Cantor 坚信他自己能够证明上述命题的正确性,并且好几次都自以为证出来了,然而随后又总是发现论证中出了差错.因此,它们的正确与否就成了数学中一个重大悬案.1900 年,Hilbert 在国际数学家大会上的著名讲演提出了 23 个意义深远的导向性问题,连续统假设的求证就是其中的第一个问题.后来他又拟定了一个着手解决这个问题的纲领,然而相当长的一段时间内未能取得突破性进展.1902 年,Russell 发现了著名的 Russell 诗论,给当时的数学造成了猛烈的震撼,以至一部分数学家惊呼数学出现了"危机".这也促使一部分数学家对数学的基础进行严肃的、深刻的分析与批判.1908 年,Zermelo 提出了第一个关于集论的公理系统,而后又由 Freankel 加以完善,成为今日为数学界公认的 ZF 系统.ZF 系统加上也是由 Zermelo 提出的选择公理(Axiom of Choice,简记为 AC),通称为 ZFC 系统.这样,集论开始实现了由 Cantor 时代的"朴素"集论(Naive Set Theory)向"公理"集论(Axiomatic Set Theory)的转化,其研究也更加深化了.在此基础上,Gödel 于 1937 ~ 1938 年在连续统问题上取得了第一个突破.他采用内模型方法,由一个 ZF 集论模型 **V** 出发,用一定的处理程序从 **V** 中划出一个子模型 **L**(可构成集模型),然后证明在模型 **L** 中,ZF 公理系统、AC、GCH 都能成立.这便说明,若 ZF 公理系统是相容的(consistent,或译协调的),则 ZF 加上 AC 和 GCH 也是相容的.用符号语言写出来,就是

$$\mathrm{Con\ ZF} \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{AC} + \mathrm{GCH}).$$

又过了20多年,1964年,美国P.Cohen又以他独创的forcing方法,从一个满足ZF的可数传递模型M出发,扩张出一个满足ZF的更大的模型M[G],使得在M[G]中AC、CH不再成立.这便证明了

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \neg\ \mathrm{CH}),$$

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\ \mathrm{CH}).$$

综合Gödel和Cohen的结果,可以看出,CH、GCH与ZFC是独立的(independent).换言之,CH或GCH成立与否在ZFC公理系统中是不可判定的(undeciable),即既不能证明它们正确,也不能证明它们不正确.

CH早在20世纪初到20世纪30年代就在集论和拓扑学中零零星星地得到了一些应用,波兰学者Sierepinski[1956]作了一个很好的总结.然而大量的、卓有成效的应用还是在第二次世界大战后,特别是20世纪60年代以后才出现的.本章将分十二节介绍它的一些应用情况.

§1 Lusin集和Sierepinski集

1.1.1 定义 记全体实数的集为$\mathbf{R}$,$M \subset \mathbf{R}$称为Lusin集,如果它满足:(1) $|M| > \omega$;(2) 对每个无处稠密集(nonwhere dense,简记为nwd)A,有$|A \cap M| \leqslant \omega$.

如果M满足:(1) $|M| > \omega$;(2) 对每个Lebesgue测度为零的集(零测度集)A,有$|A \cap M| \leqslant \omega$,则称$M$为Sierepinski集. □

1.1.2 定理(CH) $\mathbf{R}$中存在Lusin集和Sierepinski集.

证明 为了证明Lusin集存在,只需造出一个不可数集M,它与每个闭的无处稠密集(简记为cnwd)A有$|A \cap M| \leqslant \omega$即可.

因为$\mathbf{R}$中cnwd的全体有势2^{ω},由CH,我们可以把它们排列成$\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.注意$\mathbf{R}$是Baire空间(实际上它是完备度量空间),而对每个$\alpha < \omega_1$,$B_\alpha = \bigcup\{A_\xi : \xi < \alpha\}$是一个meager集,即可数个nwd集之并,所以$\mathbf{R} - B_\alpha$是不可数的.于是我们可以归纳地作出$M = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$如下:任取$x_0 \in \mathbf{R} - A_0$,设$\forall\, \xi < \alpha$,$x_\xi$已经选出,使$x_\xi \in B_\xi$.这时取$x_\alpha \in \mathbf{R} - B_\alpha - \{x_\xi : \xi < \alpha\}$,则$M$就是一个Lusin集.

要证 Sierepinski 集的存在性,只需注意,由 Lebesgue 测度的正则性,每个零测度集都被包含在一个测度为零的 G_δ 集内. 而 $\mathbf{R}$ 中这样的 G_δ 集刚好有 2^ω 个. 将它们排列成 $\{E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$,再按上述方法就可以作出一个 Sierepinski 集. □

下面我们介绍 Rothberger 定理. 它给出了一个与 CH 等价的命题. 为此先证明一个引理.

1.1.3 引理 若 $X \subset \mathbf{R}$ 不是一个 meager 集(零测度集),而 $|X| = \kappa$,则 $\mathbf{R}$ 是 κ 个零测度集(meager 集)之并.

证明 设 G 是一个测度为 0 的余 meager 集. 若存在 y,对每个 $x \in X$, $y \notin \{x + G : x \in X\}$,即 $x \notin y - G$,则 $X \cap (y - G) = \varnothing$. 因为 $y - G$ 仍是一个余 meager 集,所以 X 是 meager 集. 这与引理的假设矛盾,于是有 $\mathbf{R} = \bigcup \{x + G : x \in X\}$,而每个 $x + G$ 都是零测度集.

设 G 是一个其余集测度为零的 meager 集,类似的论证可得 $\mathbf{R} = \bigcup \{y + G : y \in X\}$,其中每个 $y + G$ 都是 meager 集.

因此,论证的关键转化为具有上述性质的集 G 的存在性. 我们先从$[0,1]$区间作出一个集 C. 对每个 $n \in \mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 是全体自然数的集),我们作 C_n. 其作法与作Cantor集相仿. 第 1 步,从$[0,1]$中取出一个以$[0,1]$中点为中心,长为$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$的开区间……第 k 步,从余下的 2^k 个闭区间中取出一个以区间中点为中心,长为$\frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{n}$的开区间. 记所有这些开区间之并为 E_n,则 E_n 是 $I = [0,1]$的一个开稠密集. $m(E_n) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. 记 $C_n = I - E_n$,则 C_n 是 cnwd,并且 $m(C_n) = 1 - \frac{1}{n}$. 现在令 $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$,则 C 是 meager 集,而 $m(C) = 1$. 最后令 $A = \bigcup \{n + C : n \in \mathbf{Z}\}$. A 是 $\mathbf{R}$ 中的 meager 集, $m(\mathbf{R} - A) = 0$. A 或 $\mathbf{R} - A$ 即为我们所要的 G. □

1.1.4 定理 设 X, Y 分别是 $\mathbf{R}$ 中的 Lusin 集和 Sierepinski 集,则 $|X| = |Y| = \omega_1$. (Rothberger, 1938)

证明 因为 Lusin 集的任何不可数子集仍是 Lusin 集,所以可取 $X_0 \subset X$,使 $|X_0| = \omega_1$. 由引理 1.1.3,$\mathbf{R}$ 是 ω_1 个零测度集之并. 设 $\mathbf{R} = \bigcup\{E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$,其中 $m(E_\alpha) = 0$,则 $Y = \bigcup\{Y \cap E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 因为每个 α 有 $|Y \cap E_\alpha| \leqslant \omega$,所以 $|Y| = \omega_1$. 再次应用引理 1.1.3 就可以推出 $|X| = \omega_1$. □

1.1.5 推论

$$\mathrm{CH} \equiv [\exists \text{Lusin 集 } X \subset \mathbf{R}] \wedge [\exists \text{Sierepinski 集 } Y \subset \mathbf{R}] \wedge [(|X| = 2^\omega) \vee (|Y| = 2^\omega)].$$ □

从 1.1.2 的证明可以看出,在 CH 下,Lusin 集和 Sierepinski 集的存在性并不是 $\mathbf{R}$ 的专有品. 实际上这两种集可以在更广泛的拓扑空间中找到.

1.1.6 定义 1. 设 X 是一个拓扑空间,$M \subset X$. 如果 $|M| > \omega$,并且对每个 nwd 集 $A \subset X$,有 $|A \cap M| \leqslant \omega$,就称 M 为 X 中的一个 Lusin 集.

2. 设 X 是一个测度空间,$M \subset X$. 如果 $|M| > \omega$,并且对每个零测度集 $E \subset X$,有 $|E \cap M| \leqslant \omega$,就称 M 为 X 中的一个 Sierepinski 集. □

利用 1.1.2 中的论证方法可以证明下面的定理 1.1.7 和定理 1.1.8.

1.1.7 定理 若 X 是一个没有孤立点的 Baire 空间,并且存在一个由 cnwd 集组成的、势 $\leqslant 2^\omega$ 的集族 $\mathscr{A}$,使得对每个 nwd 集 S,都有 $A \in \mathscr{A}$,使 $S \subset A$,则 CH$\Rightarrow X$ 有 Lusin 集. □

1.1.8 定理 若 X 是一个拓扑空间,m 是 X 上一个正则 Borel 测度,使得 $m(X) > 0$,而对每个 $x \in X$,有 $m(\{x\}) = 0$. 如果 X 只有 2^ω 个开集,则 CH$\Rightarrow X$ 有 Sierepinski 集.

特别地,若权 $w(X) \leqslant 2^\omega$,X 是遗传 Lindelöf 空间,则 CH$\Rightarrow X$ 有 Sierepinski 集.

证明 我们来证明 $w(X) \leqslant 2^\omega$,X 是遗传 Lindelöf 空间的情形. 设 E 是一个零测度集,由正则性,存在开集序列 $\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$,使 $E \subset G_n$. $m(G_n) < \frac{1}{n}$. 设 $\mathscr{B}$ 是一个势 $\leqslant c\,(= 2^\omega)$ 的基. 对每个 n,$\{U \in \mathscr{B} : U \subset G_n\}$ 是 E 的一个开覆盖. 由假设存在 $\mathscr{U}_n(E) \in [\mathscr{B}]^\omega$,使 $E \subset \bigcup \mathscr{U}_n(E)$

$\subset G_n$. 于是 $E \subset \bigcap_n (\bigcup \mathscr{U}_n(E)) = A(E)$. 其中 $A(E)$是 G_δ 集, $m(A(E)) = 0$. 但这种形式的测度为零的 G_δ 集不会超过 2^ω 个. 这是因为 $\{\mathscr{U}_n(E) : n \in \mathbf{N}\} \in [[\mathscr{B}]^\omega]^\omega$. 而 $|[[\mathscr{B}]^\omega]^\omega| \leqslant (c^\omega)^\omega = 2^\omega = c$. □

1.1.9 定义 设 X 是一个拓扑空间. X 中的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的一个 π 基. 如果对 X 的每个不空开集 G, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使 $B \neq \varnothing$, $B \subset G$.

$$\pi(X) = \omega \cdot \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{是 } X \text{ 的 } \pi \text{ 基}\}$$

称为 X 的 π 权. □

每个基都是 π 基, 所以一般地有 $\pi(X) \leqslant w(X)$, 但 π 基不一定是基. 比如设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基, $A \subset X$ 是任一个 cnwd, 则 $\{B - A : B \in \mathscr{B}\}$ 是一个 π 基但不是 X 的基. 再者, 若 $\mathscr{B}$ 是一个 π 基, f 是 $\mathscr{B}$ 的任一选择函数(即 $f: \mathscr{B} \to X$, $\forall B \in \mathscr{B}, f(B) \in B$), 则 $\operatorname{ran} f$ 是 X 的一个稠密集. 故 $d(X) \leqslant \pi(X)$, 即 X 的稠密度 $\leqslant X$ 的 π 权. 另外也容易看出 $\pi(X) \leqslant \chi(X) \cdot d(X)$. 而 Sorgenfrey 线 S 则是满足 $\pi(S) = \chi(S) \cdot d(S) = \omega < w(S) = c$ 的例子.

1.1.10 定理(CH) 若 X 是一个不可数的, 自密的 CCC, Baire 空间, 并且 $\pi(X) \leqslant 2^\omega$, 则 X 有 Lusin 集, 而且还可以作出一个稠密的 Lusin 集.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个 π 基, $|\mathscr{B}| \leqslant 2^\omega$. 又设 A 是 X 的一个cnwd. 记 $\mathscr{B}(A) = \{B \in \mathscr{B} : B \cap A = \varnothing\}$. 取 $\mathscr{B}(A)$ 的一个极大互斥族 $\mathscr{U}(A)$, 则 $A \subset X - \bigcup \mathscr{U}(A)$. 由 $\mathscr{U}(A)$ 的极大性知 $X - \bigcup \mathscr{U}(A)$ 是 cnwd. X 满足 CCC, 故有 $|\mathscr{U}(A)| \leqslant \omega$. 所以, 形如 $X - \bigcup \mathscr{U}(A)$ 的集不超过 $(2^\omega)^\omega = 2^\omega$ 个. 由定理 1.1.7, X 有 Lusin 集.

如果要求作出一个稠密的 Lusin 集, 可以按如下方法实现. 记 $\mathscr{B} = \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 又记 $\{X - \bigcup \mathscr{U} : \mathscr{U} \subset \mathscr{B} \text{是极大互斥族}\} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 当 $\alpha = 0$ 时, 取 $x_0 \in B_0$. $\alpha > 0$ 时, 取 $x_\alpha \in B_\alpha - \bigcup\{A_\xi : \xi < \alpha\} - \{x_\xi : \xi < \alpha\}$. 令 $M = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, 则 M 是稠密的 Lusin 集, 注意 B_α 是 Baire 的, 而 $\bigcup\{A_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ 是 meager 集. 它们的差不空, 所以上述归纳步骤是可行的. □

1.1.11 推论(CH) 设 X 是第一可数, 自密的 CCC, Baire, T_2 空

间.若$|X|>\omega$,则 X 有稠密的 Lusin 子空间.

证明 由已知的基数不等式$|X|\leqslant 2^{\chi(X)c(X)}$(参看 Hodel[1984]的 4.7),可知$|X|\leqslant 2^{\omega}$,于是 $\pi(X)\leqslant w(X)\leqslant |X|\cdot\chi(X)=2^{\omega}$.再由定理 1.1.10 即得. □

在定理 1.1.2 中,我们证明了 CH⇒**R** 中存在 Lusin 集和 Sierepinski 集.通过更为细致的技巧,还可以进一步使作出的集关于加法构成一个子群.

***1.1.12 定理**(CH) (i) 存在 **R** 的一个 Sierepinski 集 Y,使$(Y,+)$是一个群,并且 Y 关于区间拓扑是一个 meager 集.

(ii) 存在 **R** 的一个 Lusin 集 X,使$(X,+)$是一个群.

证明 取 **R** 的一个子集 Z,使得 $0\in Z$,Z 是 **R** 中的稠密 G_δ 集,并且 $m(Z)=0$.(记 **R** 的全体有理数集为 **Q**,则 $m(\mathbf{Q})=0$.由 Lebesgue 测度的正则性,存在 G_δ 集M 使 $\mathbf{Q}\subset M$,并且 $m(M)=0$.令 $Z=M-\{0\}$ 即可.)记$\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是 **R** 中全体测度为零的 Borel 集的集,并假定 $F_0=Z$,令 $Y_0=\{0\}$,假设对每个 $\beta<\alpha$,$\alpha<\omega_1$,我们已定义了 Y_β,满足如下的条件:

(1) $Y_\beta\in[\mathbf{R}]^{\omega}$.

(2) $(Y_\beta-\bigcup_{\xi<\beta}Y_\xi)\cap(\bigcup_{\xi<\beta}F_\xi)=\varnothing$.

(3) $y\in Y_\beta\Rightarrow -y\in Y_\beta$,并且$\forall q\in\mathbf{Q}$,有 $qy\in Y_\beta$.

记 $Z^\alpha=\bigcup\{qF_\beta+y:q\in\mathbf{Q},\beta<\alpha,y\in\bigcup_{\xi<\beta}Y_\xi\}$(其中 $qF_\beta+y=\{qx+y:x\in F_\beta\}$).易见 $m(Z^\alpha)=0$.任取 $h_\alpha\in\mathbf{R}-Z^\alpha$,令 $Y_\alpha=\{qh_\alpha+y:q\in\mathbf{Q},y\in\bigcup_{\beta<\alpha}Y_\beta\}$.显然有 $Y_\alpha\in[\mathbf{R}]^{\omega}$.今证$(Y_\alpha-\bigcup_{\xi<\alpha}Y_\xi)\cap(\bigcup_{\xi<\alpha}F_\xi)=\varnothing$.如若不然,假设它含有点 x,则存在 $\beta<\alpha$ 使$x\in F_\beta$,又存在 $q\in\mathbf{Q}$ 和 $y\in\bigcup_{\xi<\alpha}Y_\xi$,使 $x=qh_\alpha+y$.因为 $x\notin\bigcup_{\xi<\alpha}Y_\xi$,故 $q\neq 0$.于是 $h_\alpha=\frac{1}{q}x-\frac{1}{q}y\in\frac{1}{q}(F_\beta+(-y))\subset Z^\alpha$.这与 h_α 的取法矛盾.由 Y_α 的定义,易见条件(3)也是满足的.这样对所有的 $\alpha<\omega_1$,都定义了满足归纳条件(1)~(3)的 Y_α.

令 $Y=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}Y_\alpha$,则(1) Y 是域 $\mathbf{Q}$ 上的一个线性空间,因而是一个加法群.(2) 因为 $Y=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}(Y_\alpha-\bigcup\limits_{\beta<\alpha}Y_\beta)$,又 $F_0=Z$,所以 $Y\cap Z=\varnothing$.(3) 对每个零测度集 E,存在 α 使 $E\subset F_\alpha$.这时 $Y\cap E\subset F_\alpha\cap Y\subset(\bigcup\limits_{\beta<\alpha}Y_\beta)\cap F_\alpha$.故 $|Y\cap E|\leqslant\omega$.所以 Y 是 Sierepinski 集.(4) 因为 Z 是稠密的 G_δ 集,$Y\subset\mathbf{R}-Z$,故 Y 是 meager 集.

在上述论证中,若取 $\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 为全体 F_σ 型 meager 集的一个排列.令 $X_0=\{0\}$.按同样的归纳步骤进行,在第 α 步时,注意 Z^α 仍是一个 meager 集,故 $\mathbf{R}-Z^\alpha\neq\varnothing$.存在 $h_\alpha\in\mathbf{R}-Z^\alpha$.令 $X_\alpha=\{qh_\alpha+x:q\in\mathbf{Q},x\in\bigcup\limits_{\beta<\alpha}X_\beta\}$,$X=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$.则 X 即为所求的 Lusin 集. □

§2 用 Lusin 集构造 L 空间

1.2.1 定义 正则,遗传 Lindelöf 但不是(遗传)可分的空间称为 L 空间.正则,遗传可分但不是(遗传)Lindelöf 的空间称为 S 空间. □

下面的例子说明在 ZFC 中存在遗传 Lindelöf,不可分的 T_2 空间和遗传可分,非 Lindelöf 的 T_2 空间.

例如,在 $\mathbf{R}$ 中任取一个势为 ω_1 的子集 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.记 τ 为 X 作为 $\mathbf{R}$ 的子空间所继承的拓扑.定义

τ_L 为 X 的由 $\tau\cup\{\{x_\xi:\xi>\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$ 生成的拓扑.

τ_S 为 X 的由 $\tau\cup\{\{x_\xi:\xi<\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$ 生成的拓扑.

则 (X,τ_L) 与 (X,τ_S) 是两个 T_2 空间.因为 τ 是遗传 Lindelöf 和遗传可分的,而每个形如 $\{x_\xi:\xi>\alpha\}$ 的集的余集是可数的,所以不难验证 (X,τ_L) 是遗传 Lindelöf 空间而 (X,τ_S) 是遗传可分空间.然而 (X,τ_L) 却不是可分的;(X,τ_S) 不是 Lindelöf 的.

至于在正则条件下这种空间,即 L 空间或 S 空间的存在与否,则是一个十分困难的问题.事实表明,不借助一定的集论假设和精巧的集论技术,要回答这个问题几乎是不可能的.早在 1935 年,南斯拉夫的 Kurepa 曾经指出,若存在 Suslin 线,则由它可以作出一个紧的,无处可