高等学校教学参考书

物理学教程

习题分析与解答

马文蔚 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教学参考书

物理学教程
习题分析与解答

马文蔚　主编

周遥生　殷　实　沈才康　包　刚　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是为配合马文蔚教授主编的《物理学教程》而编写的教学参考书. 全书按主教材的章节顺序编排,对教材中的所有习题做了分析和解答. 全书力求突出对题目的分析,使学生在解题之前对相关的物理概念和物理规律有进一步的认识;在解题分析中结合物理学解题方法和技巧的介绍与运用,对于拓宽学生的解题思路、提高分析问题和解决问题的能力将极有帮助.

本书适合于普通高等学校工科各专业,特别是使用马文蔚教授主编的《物理学教程》的学校师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

物理学教程习题分析与解答/马文蔚主编.—北京:高等教育出版社,2003.7
ISBN 7-04-012816-0

Ⅰ.物… Ⅱ.马… Ⅲ.物理学-高等学校-解题
Ⅳ.04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 035554 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	河北新华印刷一厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 8 月第 1 版
印　　张	13.75	印　　次	2003 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	250 000	定　　价	17.60 元

前　言

本书是根据马文蔚教授主编的《物理学教程》一书中的习题而做的分析与解答.

物理学的基本概念和规律是在分析具体物理问题的过程中逐步被建立和掌握的，解题之前必须对所研究的物理问题建立一个清晰的图像，从而建立起解题思路.只有这样，才有可能使学生在解完习题之后留下一些值得回味的东西，体会到物理问题所蕴含的奥妙和含义，通过举一反三，提高自己分析问题和解决问题的能力.鉴于此，重分析、简解答的模式成为编写本书的指导思想.全书力求突出对题目的分析，使学生在解题之前，能通过分析对相关的物理规律有进一步的认识；结合物理学解题方法和技巧的介绍和运用，拓宽学生的解题思路，并通过讨论计算结果来进一步明确物理意义.对于解题过程，本书则尽可能做到简明扼要，让学生自己去完成具体计算.编者企盼这本书能对学生学习能力的提高和学习素质的培养有所帮助.

本书采用了 1996 年全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》和中华人民共和国国家标准 GB3100～3102－93 中规定的法定计量单位.

本书由马文蔚教授主编，由周遥生、殷实、沈才康、包刚编写，全书由周遥生统稿.在成书过程中，宋士贤教授提出了许多中肯的建议，谨致谢忱.

编者水平有限，错误、疏漏在所难免，敬请读者批评指正.

编者

2003 年 1 月于南京

目　　录

第一章　质点运动学

1-1　已知质点沿 x 轴作直线运动，其运动方程为 $x=2\ \mathrm{m}+(6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2-(2\ \mathrm{m\cdot s^{-3}})t^3$. 求：(1)质点在运动开始后 4.0 s 内位移的大小；(2)质点在该时间内所通过的路程.

分析　位移和路程是两个完全不同的概念. 只有当质点作直线运动且运动方向不改变时，位移的大小才会与路程相等. 质点在 t 时间内的位移 Δx 的大小可直接由运动方程得到：$\Delta x=x_t-x_0$，而在求路程时，就必须注意到质点在运动过程中可能改变运动方向，此时，位移的大小和路程就不同了. 为此，需根据 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ 来确定其运动方向改变的时刻 t_p，求出 $0\sim t_p$ 和 $t_p\sim t$ 内的位移大小 Δx_1、Δx_2，则 t 时间内的路程 $s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|$，如图所示.

解　(1) 质点在 4.0 s 内位移的大小

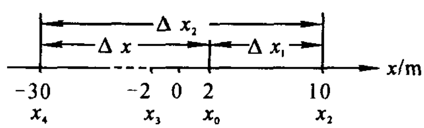
$$\Delta x = x_4 - x_0 = -32\ \mathrm{m}$$

(2) 由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(12\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t-(6\ \mathrm{m\cdot s^{-3}})t^2=0$$

得知质点的换向时刻为

$$t_p = 2\ \mathrm{s}(t = 0\ \text{不合题意})$$



则

$$\Delta x_1 = x_2 - x_0 = 8.0\ \mathrm{m}$$

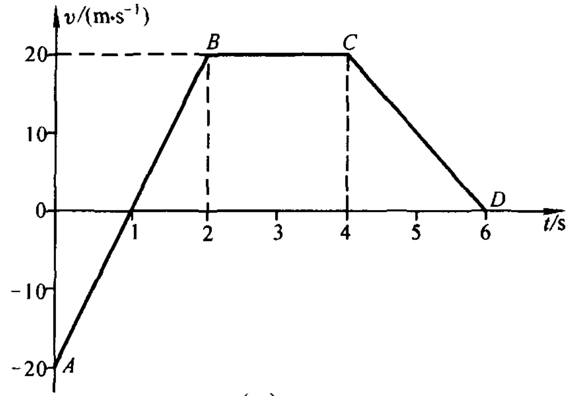
$$\Delta x_2 = x_4 - x_2 = -40\ \mathrm{m}$$

所以，质点在 4.0 s 时间间隔内的路程为

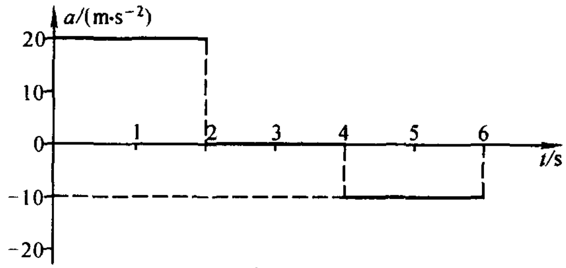
$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 48\ \mathrm{m}$$

1-2　一质点沿 x 轴方向作直线运动，其速度与时间的关系如图(a)所示. 设 $t=0$ 时，$x=0$. 试根据已知的 $v-t$ 图，画出 $a-t$ 图以及 $x-t$ 图.

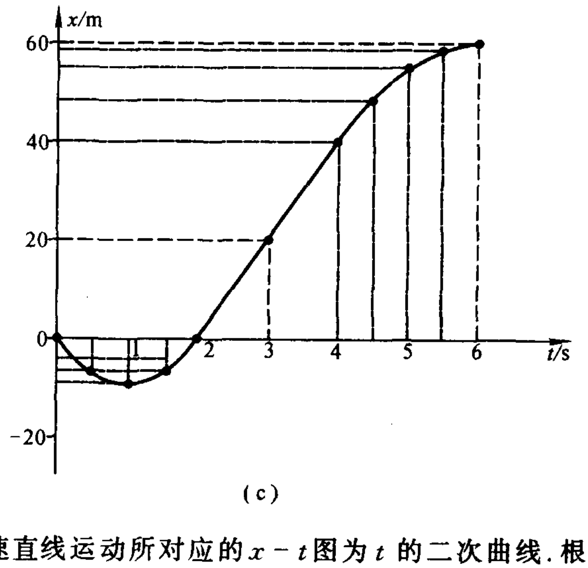
分析　根据加速度的定义可知，在直线运动中 $v-t$ 曲线的斜率为加速度的大小(图中 AB、CD 段斜率为定值，即匀变速直线运动；而线段 BC 的斜率为 0，加速度为零，即匀速直线运动). 加速度为恒量，在 $a-t$ 图上是平行于 t 轴的直线，由 $v-t$ 图中求出各段的斜率，即可作出 $a-t$ 图线. 又由速度的定义可知，$x-t$ 曲线的斜率为速度的大小. 因此，匀速直线运动所对应的 $x-t$ 图应是



(a)



(b)



(c)

一直线，而匀变速直线运动所对应的 $x-t$ 图为 t 的二次曲线. 根据各段时间内的运动方程 $x=x(t)$，求出不同时刻 t 的位置 x，采用描数据点的方法，可作出 $x-t$ 图.

解 将曲线分为 AB、BC、CD 三个过程，它们对应的加速度值分别为

$$a_{AB} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \qquad \text{(匀加速直线运动)}$$

$$a_{BC} = 0 \qquad \text{(匀速直线运动)}$$

$$a_{CD} = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = -10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \qquad \text{(匀减速直线运动)}$$

根据上述结果即可作出质点的 $a-t$ 图[图(b)].

在匀变速直线运动中,有

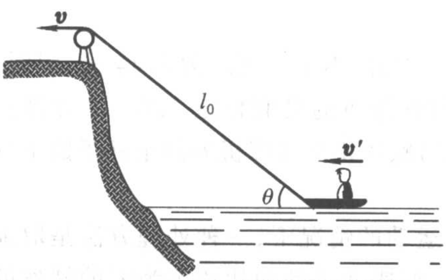
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

由此,可计算在0～2 s和4～6 s时间间隔内各时刻的位置分别为

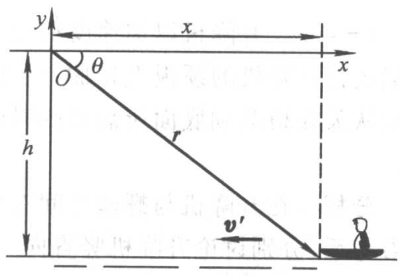
t/s	0	0.5	1	1.5	2	4	4.5	5	5.5	6
x/m	0	−7.5	−10	−7.5	0	40	48.7	55	58.7	60

用描数据点的作图方法,由表中数据可作0～2 s和4～6 s时间内的 $x-t$ 图.在2～4 s时间内,质点是作 $v=20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的匀速直线运动,其 $x-t$ 图是斜率 $k=20$ 的一段直线[图(c)].

1-3　如图(a)所示,湖中有一小船.岸上有人用绳跨过定滑轮拉船靠岸.设滑轮距水面高度为 h,滑轮到原船位置的绳长为 l_0.试求:当人以匀速 $\boldsymbol{v}$ 拉绳时,船运动的速度 $\boldsymbol{v}'$ 为多少?



(a)



(b)

分析　首先选定船为研究的对象,它的速度 $\boldsymbol{v}'$ 也就是绳端点的移动速度,绳上各点的移动速度是不相同的;而绳速 $\boldsymbol{v}$ 是指收绳的速率,是绳上各点沿绳运动的快慢,也就是绳上各点速度在绳方向的分量.绳速和船速是两个不同的概念.认为绳上各点的速度相同或将船的速度大小 $\boldsymbol{v}'$ 视为绳速 $\boldsymbol{v}$ 的分量均是错误的.

定量描述船的运动状态和规律，必须建立确定的坐标系（所选坐标系可以不相同），写出船在此坐标系中的运动方程，并根据速度和加速度的定义式，即可解出问题.

解 1　取如图(b)所示的直角坐标系．船的运动方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+(-h)\boldsymbol{j}$$

船的运动速度为

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{r^2-h^2}\,\boldsymbol{i}=\left(1-\frac{h^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

而收绳的速率 $v=-\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，且因 $r=l_0-vt$，故

$$\boldsymbol{v}'=-v\left[1-\frac{h^2}{(l_0-vt)^2}\right]^{-1/2}\boldsymbol{i}$$

解 2　取图(b)所示的极坐标(r,θ)，则

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$$

$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r$ 是船的径向速度，$r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$ 是船的横向速度，而$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是收绳的速率．由于船速 $\boldsymbol{v}'$ 与径向速度之间夹角为 θ，所以

$$\boldsymbol{v}'=-\frac{v}{\cos\theta}\boldsymbol{i}=-v\left[1-\frac{h^2}{(l_0-vt)^2}\right]^{-1/2}\boldsymbol{i}$$

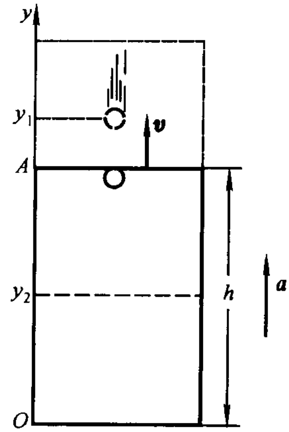
由此可知，收绳的速率只是船速沿绳方向的分量.

1－4　一升降机以加速度$1.22\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$上升，当上升速度为$2.44\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$时，有一螺丝自升降机的顶板上松脱，天花板与升降机的底面相距 2.74 m．计算：(1)螺丝从天花板落到底面所需要的时间；(2)螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离.

分析　在升降机与螺丝之间有相对运动的情况下，一种处理方法是取地面为参考系，分别讨论升降机竖直向上的匀加速度运动和初速不为零的螺丝的自由落体运动，列出这两种运动在同一坐标系中的运动方程 $y_1=y_1(t)$和 $y_2=y_2(t)$，并考虑它们相遇，即位矢相同这一条件，问题即可解；另一种方法是取升降机（或螺丝）为参考系，这时，螺丝（或升降机）相对它作匀加速运动，但是，此加速度应该是相对加速度．升降机厢的高度就是螺丝（或升降机）运动的路程.

解 1　(1) 以地面为参考系，取如图所示的坐标系，升降机与螺丝的运动方程分别为

$$y_1=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$



$$y_2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

当螺丝落至底面时，有 $y_1 = y_2$，即

$$v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705\ \mathrm{s}$$

(2) 螺丝相对升降机外固定柱子下降的距离为

$$d = h - y_2 = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 0.716\ \mathrm{m}$$

解 2　(1) 以升降机为参考系，此时，螺丝相对它的加速度大小 $a' = g + a$，螺丝落至底面时，有

$$0 = h - \frac{1}{2}(g+a)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705\ \mathrm{s}$$

(2) 由于升降机在 t 时间内上升的高度为

$$h' = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

则

$$d = h - h' = 0.716\ \mathrm{m}$$

1-5　一质点自原点开始沿抛物线 $y = bx^2$ 运动，它在 Ox 轴上的分速度为一恒量，其值为 $v_x = 4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$b = 0.5\ \mathrm{m^{-1}}$．求质点位于 $x = 2.0\ \mathrm{m}$ 处的速度和加速度．

分析　抛物线 $y = bx^2$ 是质点的轨迹方程，它是参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

合成的结果．由于 v_x 是已知的，可得 x 方向上的运动方程 $x = x(t)$ 及加速度分量 a_x，由 $x = x(t)$ 和轨迹方程 $y = f(x)$，求得运动方程在 y 方向上的分量式 $y = y(t)$ 及其加速度分量 a_y，再由速度和加速度的分量可得其矢量表达式．

解　因 $v_x = 4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 为一常量，故 $a_x = 0$．当 $t = 0$ 时，$x = 0$，由 $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 积分可得

$$x = v_x t \tag{1}$$

又由质点的抛物线方程，有

$$y = bx^2 = b(v_x t)^2 \tag{2}$$

由 y 方向的运动方程可得该方向的速度和加速度分量分别为

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2bv_x^2 t \tag{3}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 2bv_x^2 \tag{4}$$

当质点位于 $x=2.0\ \mathrm{m}$ 时,由上述各式可得

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} = (4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (8.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} = (16\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{j}$$

1-6 质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\boldsymbol{r}=(2.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})t\boldsymbol{i}+[19.0\ \mathrm{m}-(2.00\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2]\boldsymbol{j}$.求:(1)质点的轨迹方程;(2)在 $t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 到 $t_2=2.00\ \mathrm{s}$ 时间内的平均速度;(3)$t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 时的速度及切向和法向加速度.

分析 根据运动方程可直接写出其分量式 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$,从中消去参数 t,即得质点的轨迹方程.平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率,即 $\overline{\boldsymbol{v}}=\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$,它与时间间隔 Δt 的大小有关,当 $\Delta t\to 0$ 时,平均速度的极限即瞬时速度 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.切向和法向加速度是指在自然坐标下的分矢量 $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ 和 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$,前者只反映质点在切线方向速度大小的变化率,即 $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$,后者只反映质点速度方向的变化,它可由总加速度 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ 得到.

解 (1) 由参数方程

$$x = (2.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})t,\quad y = 19.0\ \mathrm{m} - (2.00\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2$$

消去 t 得质点的轨迹方程:

$$y = 19.0\ \mathrm{m} - (0.50\ \mathrm{m^{-1}})x^2$$

(2) 在 $t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 到 $t_2=2.00\ \mathrm{s}$ 时间内的平均速度

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = (2.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} - (6.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}(t) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = (2.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} - (4.00\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = (4.00\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{j}$$

则 $t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 时的速度

$$\boldsymbol{v}(t)\mid_{t=1\,\mathrm{s}} = (2.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} - (4.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$$

切向和法向加速度分别为

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{t}\mid_{t=1\,\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)\boldsymbol{e}_\mathrm{t} = (3.58\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}\,e_n = (1.79\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})e_n$$

1－7 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=(6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{i}+(4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{j}$，在 $t=0$ 时，其速度为零，位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$. 求：(1)在任意时刻的速度和位置矢量；(2)质点在 Oxy 平面上的轨迹方程，并画出轨迹的示意图.

分析 该题属于质点运动学的第二类问题，即已知速度或加速度的表达式 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，求运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，它是第一类问题的逆过程，是一段时间内运动量的积累. 处理这类问题，必须在给定的初始条件下，采用积分的方法来解决.

解 由加速度定义式，根据初始条件 $t_0=0$ 时 $v_0=0$，积分可得

$$\int_0^v \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^t [(6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{i} + (4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{j}]\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{v} = (6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t\boldsymbol{i} + (4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t\boldsymbol{j}$$

又由 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 及初始条件 $t=0$ 时，$\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$，积分可得

$$\int_{r_0}^r \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^t [(6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t\boldsymbol{i} + (4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t\boldsymbol{j}]\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{r} = [10\ \mathrm{m} + (3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2]\boldsymbol{i} + [(2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2]\boldsymbol{j}$$

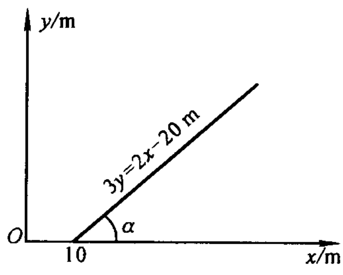
由上述结果可得质点运动方程的分量式，即

$$x = 10\ \mathrm{m} + (3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2$$

$$y = (2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2$$

消去参数 t，可得运动的轨迹方程

$$3y = 2x - 20\ \mathrm{m}$$



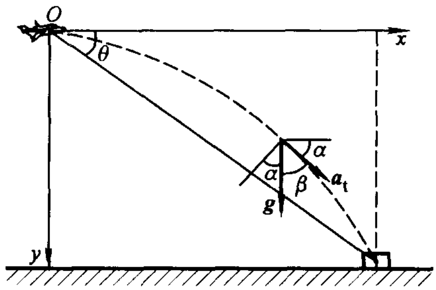
这是一个直线方程. 直线斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\alpha=33°41'$. 轨迹如图所示.

1－8 飞机以 $100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度沿水平直线飞行，在离地面高为 100 m 时，驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处. 问：(1)此时目标在飞机下方前多远？(2)投放物品时，驾驶员看目标的视线和水平线成何角度？(3)物品投出 2.00 s 后，它的法向加速度和切向加速度各为多少？

分析 物品空投后作平抛运动. 忽略空气阻力的条件下，由运动独立性原理知，物品在空中沿水平方向作匀速直线运动，在竖直方向作自由落体运动. 到达

地面目标时，两方向上运动时间是相同的. 因此，分别列出其运动方程，运用时间相等的条件，即可求解.

此外，平抛物体在运动过程中只存在竖直向下的重力加速度. 为求特定时刻 t 时物体的切向加速度和法向加速度，只需求出该时刻它们与重力加速度之间的夹角 α 或 β. 由图可知，在特定时刻 t，物体的切向加速度和水平线之间的夹角 α，可由此时刻的两速度分量 v_x、v_y 求出，这样，也就可将重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的切向和法向分量求得.



解　(1) 取如图所示的坐标，物品下落时在水平和竖直方向的运动方程分别为

$$x = vt, y = \frac{1}{2}gt^2$$

飞机水平飞行速度 $v = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，飞机离地面的高度 $y = 100\ \mathrm{m}$，由上述两式可得目标在飞机正下方前的距离

$$x = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = 452\ \mathrm{m}$$

(2) 视线和水平线的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = 12.5^\circ$$

(3) 在任意时刻物品的速度与水平轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{gt}{v}$$

取自然坐标，物品在抛出 2 s 时，重力加速度的切向分量与法向分量分别为

$$a_t = g\sin\alpha = g\sin\left(\arctan\frac{gt}{v}\right) = 1.88\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_n = g\cos\alpha = g\cos\left(\arctan\frac{gt}{v}\right) = 9.62\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

1－9　地面上垂直竖立一高20.0 m 的旗杆，已知正午时分太阳在旗杆的正上方，求在下午 2:00 整，杆顶在地面上的影子的速度的大小. 在何时刻杆影将伸展至 20.0 m 长？

分析　为求杆顶在地面上影子速度的大小，必须建立影长与时间的函数关系，即影子端点的位矢方程. 根据几何关系，影长可通过太阳光线对地转动的角速度求得. 由于运动的相对性，太阳光线对地转动的角速度也就是地球自转的角速度. 这样，影子端点的位矢方程和速度均可求得.

解　设太阳光线对地转动的角速度为 ω,从正午时分开始计时,则杆的影长为 $s=h\tan\omega t$,下午 2 时整,杆顶在地面上影子的速度大小为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{h\omega}{\cos^2\omega t}=1.94\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

当杆长等于影长时,即 $s=h$,则

$$t=\frac{1}{\omega}\arctan\frac{s}{h}=\frac{\pi}{4\omega}=3\times60\times60\ \mathrm{s}$$

即为下午 3:00 整.

1－10　一半径为0.50 m 的飞轮在启动时的短时间内,其角速度与时间的平方成正比.在 $t=2.0$ s 时测得轮缘一点的速度值为 4.0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.求:(1)该轮在 $t'=0.5$ s 的角速度,轮缘一点的切向加速度和总加速度;(2)该点在 2.0 s 内所转过的角度.

分析　首先应该确定角速度的函数关系 $\omega=kt^2$.依据角量与线量的关系由特定时刻的速度值可得相应的角速度,从而求出式中的比例系数 k,$\omega=\omega(t)$确定后,注意到运动的角量描述与线量描述的相应关系,由运动学中两类问题求解的方法(微分法和积分法),即可得到特定时刻的角加速度、切向加速度和角位移.

解　因 $\omega R=v$,由题意 $\omega\propto t^2$,得比例系数

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{Rt^2}=2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}$$

所以

$$\omega=\omega(t)=(2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}})t^2$$

则 $t'=0.5$ s 时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega=(2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}})t'^2=0.5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=(4\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}})t'=2.0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

$$a_t=\alpha R=1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

总加速度

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\alpha R\boldsymbol{e}_t+\omega^2R\boldsymbol{e}_n$$

$$a=\sqrt{(\alpha R)^2+(\omega^2R)^2}=1.01\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

在 2.0 s 内该点所转过的角度

$$\theta-\theta_0=\int_0^{2\,\mathrm{s}}\omega\mathrm{d}t=\int_0^{2\,\mathrm{s}}(2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}})t^2\mathrm{d}t=\left(\frac{2}{3}\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}\right)t^3=5.33\ \mathrm{rad}$$

1－11　一质点在半径为0.10 m 的圆周上运动,其角位置为 $\theta=2\ \mathrm{rad}+(4\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}})t^3$.(1) 求在 $t=2.0$ s 时质点的法向加速度和切向加速度.(2) 当切

向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时，θ 值为多少？(3) t 为多少时，法向加速度和切向加速度的值相等？

分析 掌握角量与线量、角位移方程与位矢方程的对应关系，应用运动学求解的方法即可得到.

解 (1) 由于 $\theta=2\ \text{rad}+(4\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3})t^3$，则角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=(12\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3})t^2$. 在 $t=2$ s 时，法向加速度和切向加速度的数值分别为

$$a_n\mid_{t=2\,\text{s}}=r\omega^2=2.30\times10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_t\mid_{t=2\,\text{s}}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=4.80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) 当 $a_t=a/2=\dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2+a_t^2}$ 时，有 $3a_t^2=a_n^2$，即

$$3[r(24\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3})t]^2=r^2[(12\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3})t^2]^4$$

$$t^3=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \text{s}=0.29\ \text{s}$$

此时刻的角位置为

$$\theta=2\ \text{rad}+(4\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3})t^3=3.16\ \text{rad}$$

(3) 要使 $a_n=a_t$，则有

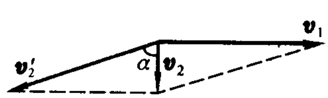
$$r[(12\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3})t^2]^2=r(24\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3})t$$

$$t=0.55\ \text{s}$$

1-12 一无风的下雨天，一列火车以 $v_1=20.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度匀速前进，在车内的旅客看见玻璃窗外的雨滴和垂线成 75°角下降. 求雨滴下落的速度 v_2.（设下降的雨滴作匀速运动）

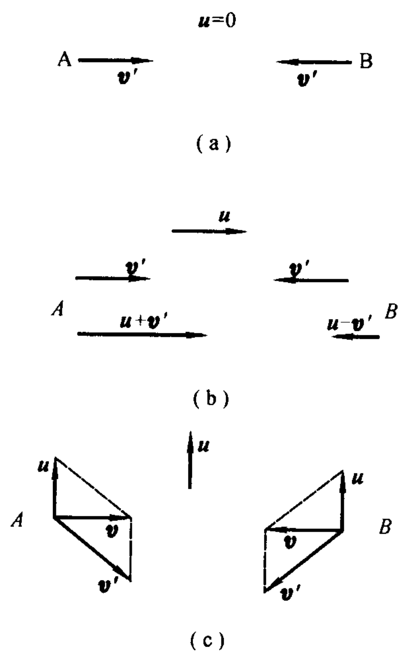
分析 这是一个相对运动的问题. 设雨滴为研究对象，地面为静止参考系 S，火车为动参考系 S′. $\boldsymbol{v}_1$ 为 S′相对 S 的速度，$\boldsymbol{v}_2$ 为雨滴相对 S 的速度，利用相对运动速度的关系即可解.

解 以地面为参考系，火车相对地面运动的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，雨滴相对地面竖直下落的速度为 $\boldsymbol{v}_2$，旅客看到雨滴下落的速度 $\boldsymbol{v}_2'$ 为相对速度，它们之间的关系为 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2'+\boldsymbol{v}_1$，如图所示. 于是可得



$$v_2=\frac{v_1}{\tan 75^\circ}=5.36\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

1-13 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回到 A 处，飞机相对空气的速率为 v'，而空气相对地面的速率为 u，A、B 间的距离为 l，飞机相对空气的速率 v' 保持不变.(1)假定空气是静止的(即 $u=0$)，试证来回飞行时间为 $t_0=2l/v'$；(2)假定空气的速度向东，试证来回飞行时间为 $t_1=t_0\left(1-\frac{u^2}{v'^2}\right)^{-1}$；(3)假定空气的速度向北，试证来回飞行的时间为 $t_2=t_0\left(1-\frac{u^2}{v'^2}\right)^{-1/2}$.



分析 在本题中，飞机是研究对象，地面为静止参考系 S，流动的空气为动参考系 S′.计算飞机在 A、B 两地飞行来回所需时间，关键在于确定飞机相对于地面飞行速度的大小，但它受到空气速度(风速)的影响，因而改变了整个飞行的时间.为使飞机在两地往返飞行的时间最短，必须使飞机相对地面的速度的方向与连线一致.由相对速度的矢量关系 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$，可计算出不同风速情况下的飞行速度的大小，从而求出往返所需的时间.

证 由相对速度的矢量关系 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$，有

(1) 空气是静止的.即 $\boldsymbol{u}=0$，则往返时，飞机相对地面的飞行速度 $\boldsymbol{v}$ 就等于飞机相对空气的速度 $\boldsymbol{v}'$[图(a)]，故飞行往返所需时间为

$$t_0=t_{AB}+t_{BA}=\frac{l}{v'}+\frac{l}{v'}=\frac{2l}{v'}$$

(2) 按题意，当飞机向东时，风速与飞机相对于空气的速度同向；而飞机由东返回时，两者刚好反向[图(b)].这时，飞机在往返飞行时，相对于地面的速度值分别为 $v_{AB}=v'+u$ 和 $v_{BA}=v'-u$.因此，飞行往返所需时间为

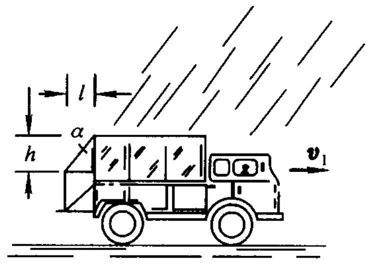
$$t_1=\frac{l}{v'+u}+\frac{l}{v'-u}=t_0\left(1-\frac{u^2}{v'^2}\right)^{-1}$$

(3) 当空气速度向北时，飞机相对地面的飞行速度的大小由 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$ 可得为 $v=\sqrt{v'^2-u^2}$[图(c)]，则飞机往返所需时间为

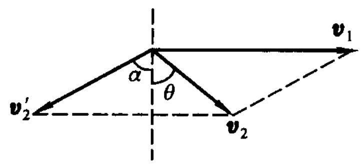
$$t_2=\frac{2l}{v}=t_0\left(1-\frac{u^2}{v'^2}\right)^{-1/2}$$

1－14 如图(a)所示，一汽车在雨中沿直线行驶，其速率为 v_1，下落雨滴的速度方向偏于竖直方向之前 θ 角，速率为 v_2，若车后有一长方形物体，问车速 v_1 为多大时，此物体正好不会被雨水淋湿？

分析 这也是一个相对运动的问题.可视雨点为研究对象，地面为静参考系 S，汽车为动参考系 S′.如图(a)所示，要使物体不被淋湿，在车上观察雨点下落的方向(即雨点相对于汽车的运动速度 $\boldsymbol{v}_2'$ 的方向)应满足 $\alpha \geqslant \arctan \dfrac{l}{h}$.再由相对速度的矢量关系 $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$，即可求出所需车速 $\boldsymbol{v}_1$.



(a)



(b)

解 由 $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$[图(b)]，有

$$\alpha = \arctan \frac{v_1 - v_2 \sin\theta}{v_2 \cos\theta}$$

而要使 $\alpha \geqslant \arctan \dfrac{l}{h}$，则

$$\frac{v_1 - v_2 \sin\theta}{v_2 \cos\theta} \geqslant \frac{l}{h}$$

$$v_1 \geqslant v_2 \left(\frac{l\cos\theta}{h} + \sin\theta \right)$$