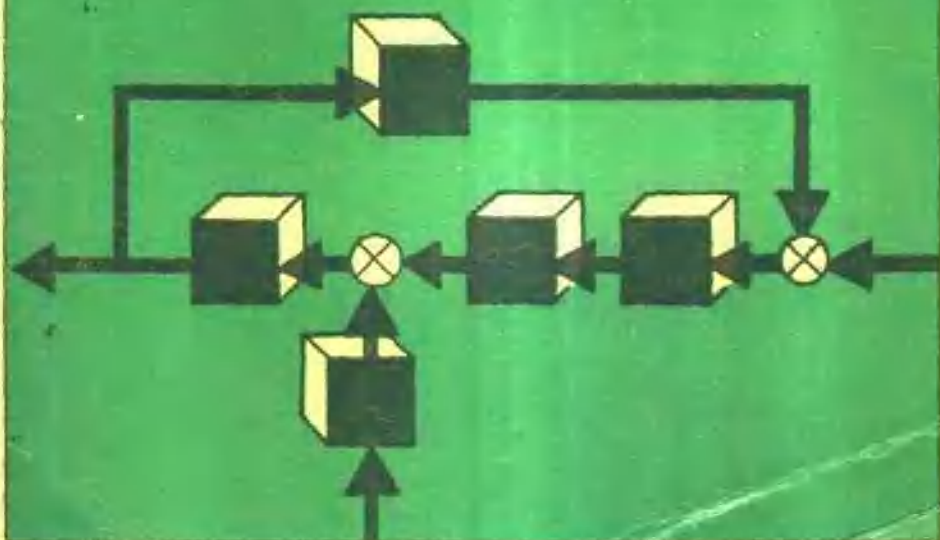


回授控制系統詳解

FEEDBACK
CONTROL
SYSTEMS

JOHN VAN DE VEGTE



曉園出版社

版權所有・翻印必究

初 版

1988年7月第一次印刷發行

回授控制系統詳解

定價：新臺幣 190 元 港幣 55 元

原著者：Van de Vegte

譯著者：吳

昌

暉

發行人：黃

旭

政

發行所：曉園出版社有限公司

HSIAO-YUAN PUBLICATION COMPANY LIMITED

臺北市青田街7巷5號

電話：(02) 394-9931 (六線)

郵撥：1075734-4 號

臺大店：臺北市新生南路三段96號之三

電話：(02) 3917012 • 3947375

重南店：臺北市重慶南路一段115號

電話：(02) 3313360 • 3149580

工專店：臺北市新生南路一段6之9號

電話：(02) 3968664

逢甲店：臺中市西屯區文華路113號

電話：(04) 2512759 • 2546663

淡江店：臺北縣淡水鎮英專路71號

電話：(02) 6217840

香港所：九龍又一村達之路30號地下後座

電話：3-805807 3-805705

印刷所：復大印刷廠

臺北市武威街36巷16弄15號

出版登記：局版臺業字第 1244 號

著作執照：臺內著字第 號

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

回授控制系統詳解

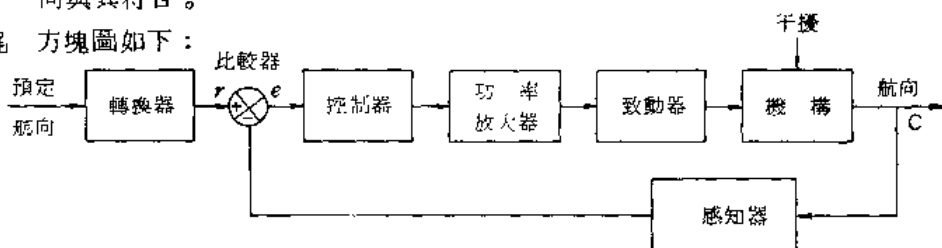
(目 錄)

第一章	介紹及性線力模型	1
第二章	物理系統的轉移函數模型	23
第三章	暫態性能和 S - 平面	43
第四章	迴授系統模型及性能	67
第五章	迴授系統的動力補償	95
第六章	根跡法	125
第七章	頻率響應法	163
第八章	頻率響應分析及設計	181
第十章	數位控制系統分析與設計	215
第十一章	非線性控制系統	261
第十二章	狀態空間分析	291
第十三章	狀態空間設計介紹	329
第十四章	頻域之多變數系統	349

第一章 介紹及線性動力模型

- 1 試建立一艘船的自動導航系統之基本方塊圖。描述圖中各方塊，指出何種硬體可用於指出所預定的航向 (desired heading)，以及如何使實際航向與其符合。

解 方塊圖如下：



轉換器：將預定航向轉換為與其成比例之電壓信號 (r)。

可用一旋轉式之電位計 (可變電阻) 達成此硬體功能。

感知器：偵測實際航向並轉換為電壓信號。羅盤即可達成此功能。

比較器：比較預定航向電壓信號與感知器所傳回之信號產生一誤差信號

$$e = r - c$$

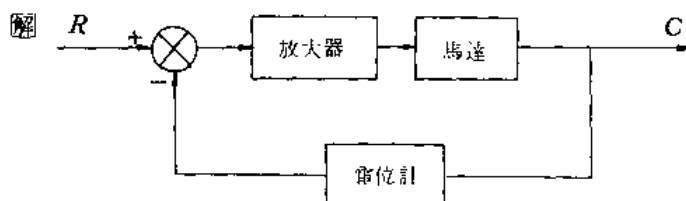
控制器：處理誤差信號，並決定機構之動作方式，輸出一控制信號。

上述四者皆可用機械方式，轉換為機械信號，以控制整個系統。

機構：控制船的航向，可能為一操舵機構，或噴射引擎或其他。

動作原理：若航向與預定航向不同時，則必定存在一誤差信號 ($e = r - c$) 使系統繼續修正其航向，使實際航向與預定航向一致。

- 2 對一個使用馬達來控制軸角度的定位系統，畫一個方塊圖，電位計可用來測量位置。



2 迴授控制系統詳解

3 在方塊圖中，輸出 y 及輸入 x 的關係為 $y = 2x + 0.5x^3$

(a) 求在下列操作點時的 y

(i) $x_0 = 0$, (ii) $x_0 = 1$, (iii) $x_0 = 2$

(b) 求在這些操作點附近的線性化模式，在這些模式中，重新定義 x , y 表對於操作點值的變化量。

解 $y(x) = 2x + 0.5x^3$

(a) (i) $y(0) = 0$

(ii) $y(1) = 2.5$

(iii) $y(2) = 8$

(b) $y \triangleq \Delta y = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} \Delta x \triangleq \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} x = (1.5x_0^2 + 2)x$

(i) for $x_0 = 0$, $y = 2x$

(ii) for $x_0 = 1$, $y = 3.5x$

(iii) for $x_0 = 2$, $y = 8x$

4 一方塊圖之輸出 z 為兩個輸入， x 和 y 的函數如下式：

$$z = 5x - 3y + x^3 + y^3 + x^2y$$

試導出在操作點 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, 之小變化量 (small variation) 的線性化模式。於此模式中，重行定義 x , y , z 以表示對於操作點之變化量。

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 5 + 3x^2 + 2xy$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -3 + 3y^2 + x^2$

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y \quad \text{then} \quad \Delta z \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 12 \Delta x + 10 \Delta y$$

定義： $Z \triangleq \Delta z$, $X \triangleq \Delta x$, $Y \triangleq \Delta y$, 則 $Z = 12X + 10Y$

5 求 $r(t) = 2t$, $0 \leq t < 1$; $r(t) = 2$, $t \geq 1$ 的拉氏轉換

解 $R(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} r(t) dt$

$$= \int_0^1 e^{-st} 2t dt + \int_1^{\infty} e^{-st} 2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{s} t e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{2}{s^2} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{2}{s} e^{-st} \Big|_{t=1}^{t \rightarrow \infty} \\
&= -\frac{2}{s} e^{-s} - \frac{2}{s^2} e^{-s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} e^{-s} \\
&= \frac{2}{s^2} (1 - e^{-s})
\end{aligned}$$

6. 在長度為 L 的管路中，流體的速度為 v ，入口處流體溫度 T_i ，在 $t = 0$ 時，產生了大小為 A 的步階變化，不考慮熱量損失且變數都表變化量。

(a) 求出口溫度 T_o 及其拉氏轉換。

(b) 求 T_o / T_i 。

解 (a)
$$\begin{cases} T_i = A, & \text{for } t \geq 0 \\ T_i = 0, & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} T_o = A, & \text{for } t \geq \frac{L}{v} \\ T_o = 0, & \text{for } t < \frac{L}{v} \end{cases}$$

$$\therefore T_o(t) = A u\left(t - \frac{L}{v}\right) \quad T_o(s) = \frac{A}{s} e^{-\frac{L}{v}s}$$

$$(b) G(s) = \frac{T_o(s)}{T_i(s)} = \frac{\frac{A}{s} e^{-\frac{L}{v}s}}{\frac{A}{s}} = e^{-\frac{L}{v}s}$$

7. 試用終值定理 (final value theorem) 以決定 $c(t)$ 的穩態值

$c_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ ， $c(t)$ 之轉換式 $C(s)$ 如下：

$$(a) C(s) = \frac{s+11}{(s+2)(s+5)}$$

$$(b) C(s) = \frac{2}{s(s+3)}$$

$$(c) C(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s(2s^2 + 7s^2 + 13s + 2)}$$

4 迴授控制系統詳解

$$(d) C(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

解 (a) $c_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) = \frac{0 \times 11}{2 \times 5} = 0$

$$(b) c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \frac{2}{3}$$

$$(c) c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \frac{6}{2} = 3$$

$$(d) c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \frac{0 \cdot 1}{4} = 0$$

8 對下列的微分方程及初始條件，寫出其拉氏轉換。

$$(a) \ddot{c} + 6\dot{c} + 13c = 5u(t), \quad c_0 = 1, \quad \dot{c}_0 = 4$$

$$(b) \ddot{c} + 3\dot{c} + 4c = 7u(t) + 2t, \quad c_0 = 1, \quad \dot{c}_0 = 2$$

$$(c) \ddot{c} + 3\dot{c} + 4c = 6 \sin wt, \quad c_0 = 4, \quad \dot{c}_0 = 5$$

$$(d) \dot{c} + 2c = u(t), \quad c_0 = 1$$

解 (a) $s^2 C(s) - s c_0 - \dot{c}_0 + 6(sC(s) - c_0) + 13C(s) = 5 \cdot \frac{1}{s}$

$$\therefore (s^2 + 6s + 13) C(s) = \frac{5}{s} - s - 10$$

$$\therefore C(s) = \frac{5 - 10s - s^2}{s(s^2 + 6s + 13)}$$

$$(b) s^2 C(s) - s c_0 - \dot{c}_0 + 3(sC(s) - c_0) + 4C(s) = \frac{7}{s} + \frac{2}{s^2}$$

$$\therefore (s^2 + 3s + 4) C(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{7}{s} + s + 2 - 3$$

$$\therefore C(s) = \frac{2 + 7s - s^2 + s^3}{s^2(s^2 + 3s + 4)}$$

$$(c) s^2 C(s) - s c_0 - \dot{c}_0 + 3(sC(s) - c_0) + 4C(s) = \frac{6w}{s^2 + w^2}$$

$$\therefore (s^2 + 3s + 4)C(s) = 4s + 5 + 12 + \frac{6w}{s^2 + w^2}$$

$$\therefore C(s) = \frac{17 + 4s + \frac{6w}{s^2 + w^2}}{s^2 + 3s + 4}$$

$$(d) sC(s) = c_0 + 2C(s) + \frac{1}{s}$$

$$\therefore (s+2)c(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$\therefore C(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

9. 求 $G(s) = \frac{5(1 - 0.4s)}{(s+1)(0.2s+1)}$ 的單位步階響應

解 $R = \frac{1}{s}$

$$C = GR = \frac{5(1 - 0.4s)}{s(s+1)(0.2s+1)} = \frac{25 - 10s}{s(s+1)(s+5)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+5}$$

$$K_1 = \frac{25}{5} = 5$$

$$K_2 = \frac{35}{-1 \times (4)} = -\frac{35}{4}$$

$$K_3 = \frac{75}{(-5)(-4)} = \frac{15}{4}$$

$$\therefore c(t) = 5 - \frac{35}{4}e^{-t} + \frac{15}{4}e^{-5t}$$

10. 試計算一系統對於衰減的指數函數輸入 $r(t) = e^{-t}$ 的響應。系統之轉換

函數如下： $G(s) = 3 \cdot \frac{s^2 + 9s + 18}{s^2 + 6s + 8}$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad C &= G \cdot R = 3 \cdot \frac{s^2 + 9s + 18}{s^2 + 6s + 8} \cdot \frac{1}{s + 1} \\
 &= 3 \cdot \frac{s^2 + 9s + 18}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)} \quad (R = \mathcal{L}\{r(t)\}) \\
 &= \frac{10}{s + 1} + \frac{(-6)}{s + 2} + \frac{(-1)}{s + 4}
 \end{aligned}$$

取反拉氏轉換

$$c(t) = 10 \cdot e^{-t} - 6 \cdot e^{-2t} - e^{-4t}$$

11. 對下列附初始條件的系統

$$(i) \dot{c} + 6c = r, \quad c(0) = 1$$

$$(ii) \ddot{c} + 7\dot{c} + 10c = r, \quad c(0) = 1, \quad \dot{c}(0) = 4$$

求(a)轉換函數 C/R

(b)對初始條件的響應

$$\text{解} \quad (i) sC(s) - c_0 + 6C(s) = R$$

$$(a) c_0 = 0, \quad C/R = \frac{1}{s + 6}$$

$$(b) R = 0, \quad c(s) = \frac{1}{s + 6}$$

$$\therefore c(t) = e^{-6t}$$

$$(ii) s^2 C(s) - sc_0 - \dot{c}_0 + 7(sC(s) - c_0) + 10C(s) = R$$

$$(a) c_0 = \dot{c}_0 = 0, \quad C/R = \frac{1}{s^2 + 7s + 10}$$

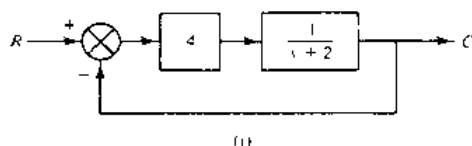
$$(b) R = 0, \quad C(s) = \frac{s + 4 + 7}{s^2 + 7s + 10} = \frac{3}{s + 2} - \frac{2}{s + 5}$$

$$\therefore c(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-5t}$$

12. 如圖P1.12之系統

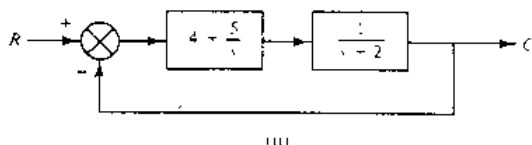
(a)求閉迴路轉換函數

(b)求單位步階響應



(i)

圖 P1.12



(ii)

解 (a) $T = \frac{G}{1+G}$

$$(i) T(s) = \frac{\frac{4}{s+2}}{1 + \frac{4}{s+2}} = \frac{4}{s+6}$$

$$(ii) T(s) = \frac{\frac{4s+5}{s(s+2)}}{1 + \frac{4s+5}{s(s+2)}} = \frac{4s+5}{(s+1)(s+5)}$$

(b) $R = \frac{1}{s}$

$$(i) C = TR = \frac{4}{s(s+6)} = \frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+6}$$

$$\therefore c(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} e^{-6t}$$

$$(ii) C = TR = \frac{4s+5}{s(s+1)(s+5)} = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{-\frac{3}{4}}{s+5}$$

$$\therefore c(t) = 1 - \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{3}{4} e^{-5t}$$

13. 試計算 Fig 1

系統對單位步階函數之響應。

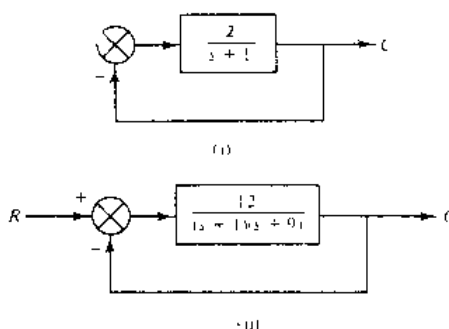


圖 P1. 13

$$\text{解 (i)} \quad \frac{C}{R} = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + \frac{2}{s+3}} = \frac{2}{s+3}, \text{ 單位步階 (unit step) } \Rightarrow R(s)$$

$$= \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$$

$$C = \frac{2}{s+3} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} \right], \quad c(t) = \frac{2}{3} [1 - e^{-3t}]$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{C}{R} = \frac{\frac{12}{(s+1)(s+9)}}{1 + \frac{12}{(s+1)(s+9)}} = \frac{12}{s^2 + 10s + 21}$$

$$C = \frac{12}{(s+7)(s+3)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\left(\frac{4}{7}\right)}{s} + \frac{(-1)}{s+3} + \frac{\left(-\frac{3}{7}\right)}{s+7}$$

$$c(t) = \frac{4}{7} - e^{-3t} + \frac{3}{7} e^{-7t}$$

14. 對圖 P1. 13 的系統，決定其對初始條件的響應。

$$\text{(i)} \quad c(0) = 1$$

$$\text{(ii)} \quad c(0) = 1, \quad \dot{c}(0) = 1$$

$$\text{解 (i) } C = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + \frac{2}{s+1}} R = \frac{2}{s+3} R$$

$$R = 0, \quad c(0) = 1, \quad \therefore sC(s) - c_0 + 3C(s) = 0$$

$$\therefore C(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$\therefore C(t) = e^{-3t}$$

$$\text{(ii) } C = \frac{\frac{12}{(s+1)(s+9)}}{1 + \frac{12}{(s+1)(s+9)}} R = \frac{12}{s^2 + 10s + 21} R$$

$$\therefore s^2 C(s) - sc_0 - \dot{c}_0 + 10(sC(s) - c_0) + 21C(s) = 0$$

$$\therefore C(s) = \frac{s+11}{s^2 + 10s + 21} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+7}$$

$$\therefore c(t) = 2e^{-3t} - e^{-7t}$$

15. 如圖 P1.15 所示之系統

(a) 求 E/R 。

(b) 用終值定理求步階輸入的穩態誤差 $e = r - c$ 。

(c) 觀察 K 值及系統型態對系統特性的影響。

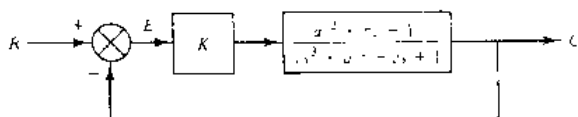


圖 P1.15

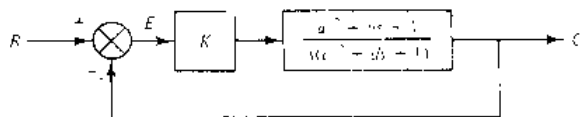


圖 P1.15

圖 P1.15

10 迴授控制系統詳解

解 (a) $E = R - C$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{E}{R} &= 1 - \frac{C}{R} = 1 - T = 1 - \frac{K \cdot \frac{as^2 + bs + 1}{cs^3 + ds^2 + es + 1}}{1 + \frac{K(as^2 + bs + 1)}{cs^3 + ds^2 + es + 1}} \\ &= \frac{cs^3 + ds^2 + es + 1}{cs^3 + (d + Ka)s^2 + (e + Kb)s + 1 + K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) } \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{cs^3 + ds^2 + es + 1}{s(cs^3 + (d + Ka)s^2 + (e + Kb)s + 1 + K)} \\ &= \frac{1}{1 + K}\end{aligned}$$

(c) 當 $K \uparrow$, $e_{ss} \downarrow$, 且型態數高, e_{ss} ;

16. 對於圖 P 1.16 之系統, 求其轉換函數 E/R , 並求其在單位步階函數及單位斜坡函數輸入時之穩態誤差值。

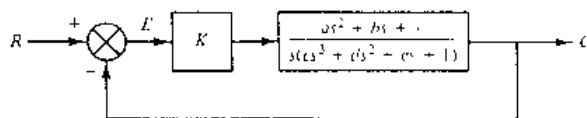


圖 P1.16

解 $E = R - C \Rightarrow E/R = 1 - C/R$

$$\begin{aligned}\frac{C}{R} &= \frac{K \cdot \frac{(as^2 + bs + 1)}{s(cs^3 + ds^2 + es + 1)}}{1 + K \cdot \frac{(as^2 + bs + 1)}{s(cs^3 + ds^2 + es + 1)}} = \frac{K \cdot B(s)}{S \cdot A(s) + K \cdot B(s)} \\ \left(\begin{array}{l} B(s) = as^2 + bs + 1 \\ A(s) = cs^3 + ds^2 + es + 1 \end{array} \right) \\ \frac{E}{R} &= \frac{S \cdot A(s)}{S \cdot A(s) + K \cdot B(s)}\end{aligned}$$

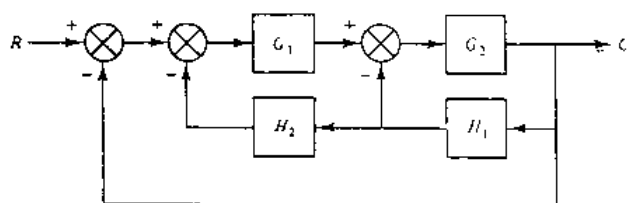
(i) 單位步階輸入 $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned}
 E_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s \cdot A(s)}{s \cdot A(s) + K \cdot B(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{0}{0 + K} = 0
 \end{aligned}$$

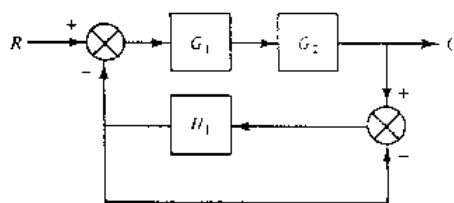
(ii) 單位斜坡輸入 $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\begin{aligned}
 E_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s \cdot A(s)}{s \cdot A(s) + K \cdot B(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \\
 &= \frac{1}{0 + K} = \frac{1}{K}
 \end{aligned}$$

17. 簡化圖 P1.17 的方塊圖，求其閉迴路轉換函數。



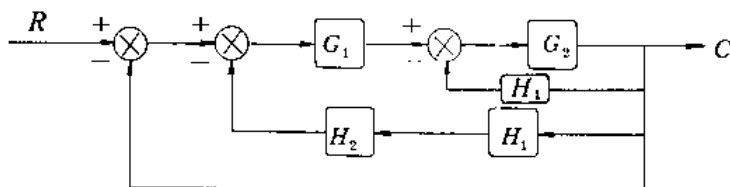
(a)



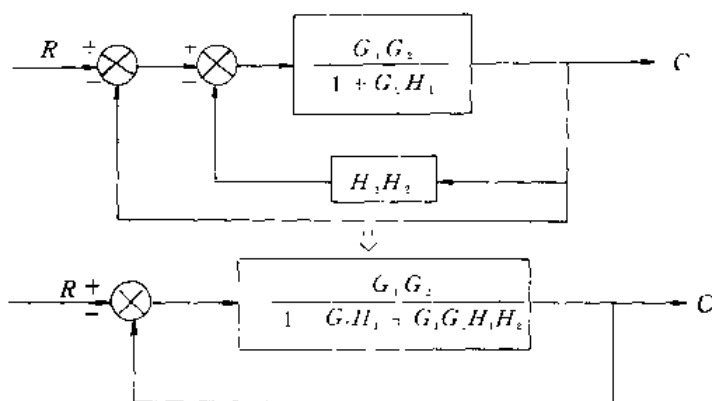
(b)

圖 P1.17

解 (a) 簡化成

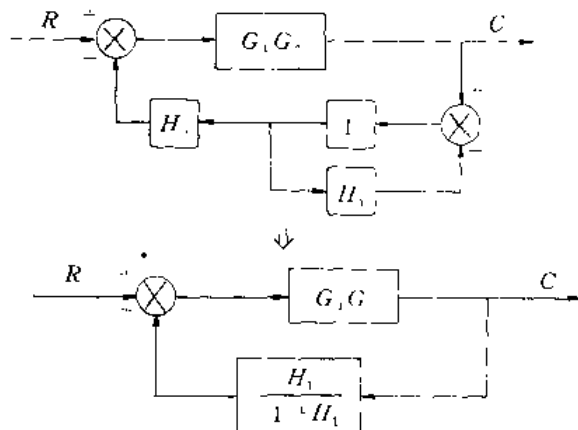


↓



$$\begin{aligned} \therefore G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1 H_2}}{1 + \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1 H_2}} \\ &= \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 + G_1 G_2 H_1 H_2} \end{aligned}$$

(b)簡化成



$$\therefore G = \frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + \frac{G_1 G_2 H_1}{1 + H_1}} = \frac{G_1 G_2 (1 + H_1)}{1 + H_1 + G_1 G_2 H_1}$$

18. 求圖 P1.18 所示系統的 C/R 及 C/D 。

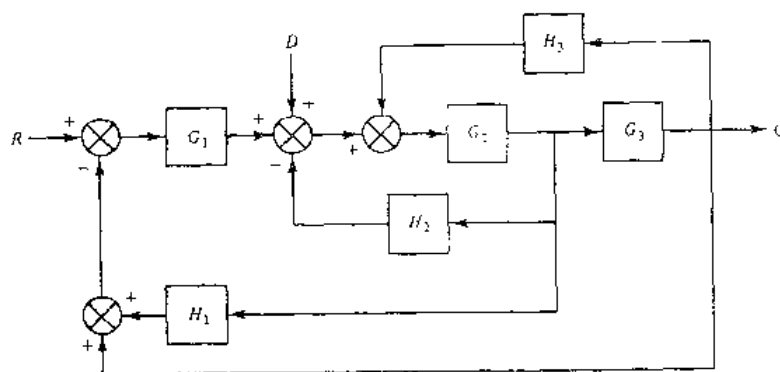
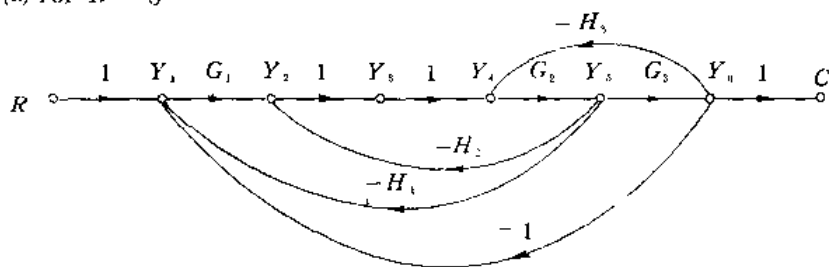


圖 P1.18

解 換成 signal flow graph

(a) for $D = 0$



by Marson's formula

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum M_k \Delta_k}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_3 G_4}$$

(b) for $R = 0$

