

師範學院數學系

何數論
幾函數
面等數
平初整

試行教學大綱

中華人民共和國教育部

師範學院數學系

平 面 幾 何
初 等 函 數
整 數 論

試行教學大綱

書號216(教1)

中 華 人 民 共 和 國 教 育 部 編 訂

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北 京 琉 璃 廠 一 七 〇 號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新 華 書 店 總 經 售

京 華 印 書 局 印 刷

北 京 南 新 華 街 甲 三 七 號

開本787×1092—1/32 印張 5/8

字數 16,000

一九五五年三月北京第一版

印數 1—5,000

一九五五年三月北京第一次印刷

定價 0.09 元

數學系第二冊

目 錄

初等數學複習及研究試行教學大綱	33
總說明	33
平面幾何	
(甲)說明	35
(乙)大綱內容	37
(丙)參考資料	40
初等函數	
(甲)說明	43
(乙)大綱內容	46
(丙)參考資料	47
整數論試行教學大綱	49
(甲)說明	49
(乙)大綱內容	50
(丙)參考資料	53

師範學院數學系

初等數學複習及研究試行教學大綱

總說明

師範學院暫行教學計劃，規定數學系初等數學複習及研究一科，包含平面幾何、立體幾何、代數、數的概念、初等函數五門，兩種幾何分設於前兩學年，代數及數的概念分設於第三學年的前後兩學期，第四學年上學期講初等函數，並規定該科的目的有六：即補充知識技能；建立理論基礎；掌握解題方法；熟練教學技巧；注意參考資料；研究補充材料。其中前兩項是骨幹，末兩項是肌膚，其餘兩項是基本訓練，因此必須就中等學校教材，分門別類，熟習精研，以便對基本概念有正確的認識；對通行理法有透徹的了解；對演算繪圖解題分析有足夠的熟練；具體一點說，師範學院數學系畢業生必須具備以下四個條件：

(一)講授中等學校各門數學，要都能勝任；不許說能教這樣，不能教那樣；必須知道中等學校課本，何處有漏洞，何處不易講，甚麼該講，甚麼不必講；對學生不必講的東西自己都要深切明白；應該講的，要能講得周到。

(二)常識必須豐富，計算必須熟練，解題必須正確，證題不但要理論嚴格，層次清楚，而且用字措詞須要簡練明暢，前後布局尤須得當，畫圖是數學教學的直觀工具，有助於理解者甚多，未來教師不能不深切注意。

(三)高等數學從初等數學生根；師院學生學習高等數學，不只是爲了提高數學的專門知識，而且希望他們能把高等數學效利用於初等數學。高等方法當然能解決初等問題，不過不能把

高等方法講給中等學校學生。師院畢業生，遇必要時，必須能把高等方法，轉變為初等說法，讓中等學校學生能夠接受。

(四)中等教材難於領會的部分，如極限，函數，軌跡，未定式，必須講得使學生能懂，而不違背高等數學的道理。

根據以上要求，結合當前情況，究應怎樣選擇教材呢？第一是中等學校數學教材之中不能透徹講理論根據的部分，而大學其他科目又沒有直接談到這種根據，必須在這裏補充上足夠的理論基礎；其次是因大多數中等學校教師準備不周而遺留給學生的疑難之點；再其次是中等學校學生學習上存在着的缺陷，分別情形或加補充，或作解釋，或大力矯正，這些教材所以選擇的目的不同，內容也相當複雜；然而必須按邏輯系統或訓練目標，章排節比部別類居，以次講論，才能讓學生感到與中等學校數學有別，引起研究興趣。

教材的每項內容要深入到怎樣的程度呢？大致來說，以高級中等學校最優秀學生所能了解的程度為準。講到這種程度，已經够用。凡同一問題可以用於多方面的，不要把理論講得太偏一面；若同一問題可以由不同方面引起，應該從中等學校學生學習心理上接近的一面開始講解，然後面面講解比較優劣。

數學理法本從實踐抽象而來，亦無一不能用之於實踐。現在中等學校數學課本引用物理概念漸多，所以培養中等學校數學教師對於這點應該給予足夠的重視，應該斟酌教學的方便，儘量插入物理例題。總之，任課教師宜多方設法蒐集實際材料，使教學內容更加豐富。

中國為文明古國，天算之學，代有聞人。而近百年來，學自然科學者一概取之海外，以致全國學生只知有西洋科學家，不知有中國科學家，初等數學複習及研究，是面向中學的骨幹科目，為了發展愛國主義教育，應該蒐集中國先民的發明創造，發揚光

大，樹立學生愛國思想。如商高或陳子的勾股定理*；劉徽的割圓，重差；祖沖之的圓率；祖暅的開立圓；賈憲，楊輝的開方作法本源；秦九韶的大衍求一術（附孫子物不知總，張丘建百雞題），正負開方術，三斜求積；李冶（原名治）的測圓術；天元，朱世傑的四元，垛積，招差，都應分在適當章節加以說明。

目前中等學校的學生數學程度較低，要把這樣水平較低的中等學校學生，培養成為合格的中等學校教師，首先要複習中等學校教材，加強基本訓練，並要向他們說明本科目的重要性，端正他們的學習態度，鞏固他們的專業思想。

既然強調基本訓練，所以示範舉例必須用標準格式，如證幾何定理，必須題設，題斷，證明三者備具，有推究之必要者，亦不可缺如。困難問題還須於證明之前加以分析。為使師院學生不犯錯誤，任課教師必須諄諄教誨。教師講例題循規蹈矩地講，學生演習題也必須循規蹈矩地演；各種問題要能解答得面面周到，並且要會推廣。除此而外，擬製問題，也是中等學校教師的必備技能，應在日常教學中，隨時注意。

平面幾何

（甲）說 明

本科目的設置目的，是培養學生對平面幾何問題的觀察、分析、綜合、推究的能力，以求掌握通用的方法，養成足夠的熟練技巧；所以內容注重系統地講授推證通法的理論，證題的技術，軌跡的探求，作圖的方法。針對我國目前實際情況，一般中等學校學生，雖已學得不少的平面幾何知識，但於方法的運用，究欠嫻

* 勾股定理，究竟出自商高或出自陳子，尚待考證。

熟，因此這種訓練對於未來的中等學校數學教師來說，無疑地是很迫切需要的。經過這次學習，學生可以得到很多平面幾何的新知識，發現自己的許多舊缺點，然後把它們補充起來，矯正過來，除理論材料而外，學生將更能自如地，切實地解決中等學校有關平面幾何相當大量的問題，甚至還能解答其中較為困難的問題。

既然本大綱的主要精神在於培養未來中等學校教師關於平面幾何教學方面的各種技能；因此本科目教材及實施原則，應採取下列佈置：

引言：簡略介紹元名，元誼的需要，歐氏幾何的起源，歐幾里得公理的缺點，及希爾伯特（Hilbert）公理體系，講授時間共二學時。

（一）中等學校平面幾何摘要：把中等學校平面幾何重要定理分類整理，斟酌學生情況分別輕重來講述或令學生自修，一則可以加深學生對中等學校平面幾何的印象，再則便於以後徵引。講授時間共八學時。

（二）推證通法：泛論命題形式及推證通法，舉例說明；使學生了然於數學命題的邏輯結構及證題法的各種方式。普通歸納法是幾何中常用的方法，可以訓練學生考慮問題面面周到，也是應當注意的。講授時間共八學時。

（三）證題術：分類研究各種定理的證法，注重如何分析問題及如何綜合地把論證表達出來，以培養學生獨立而正確地證題的技能。所舉範例，務求由淺而深，繁簡合度，間或選用一些名題，在每個項目中，可多選例題，擇尤講解，其餘留給學生課外自行研究。講授時間共十八學時。

（四）軌跡：系統的研究軌跡，從具體範例訓練學生演題步驟的完整正確，以加強學生解決軌跡命題的能力。講授時間共十

二學時。

(五)作圖：研究尺規作圖的各種方法，培養學生觀察、分析、推究問題的能力；末節宣示尺規作圖不能的典型問題，以免學生作無益的嘗試，但不作證明。講授時間共二十學時。

若因時間過緊，其中(II)之第四項‘數學歸納法’，(III)之第七項‘線段計算與雜例’，均可從略。(IV)之第七項‘尺規作圖不能問題’只將幾何問題變成代數問題，說明結果，不講理由。

至於最末附錄“反演變換”一項，雖為治初等幾何的一種利器，然限於教學時間，不能編入教學內容，倘行有餘力，不妨斟酌講述。

在每章中，應配有多種類型的習題，以備隨時練習挑選之用。

本科目設置於第一學年，每週講授二學時，課堂習作一學時，全年共講授六十八學時，課堂習作三十四學時，合計教學一百零二學時。上學期十八週，自引言講至第三部分完；下學期十六週講(IV)，(V)兩部分。

(乙) 大綱內容

引 言 (2 學時)

幾何論證的本源。歐氏(Euclid)幾何、幾何公理及定理。

(I) 中等學校平面幾何摘要 (8 學時)

- (一)直線形定理。
- (二)關於圓的定理。
- (三)比例及相似形定理。
- (四)面積定理。

(II) 推證通法 (8 學時)

(一) 命題的形式。

定理的真意。命題的四種變化。逆定理及其製造法。同一法則。分斷式命題(所設面面周到且互不相容,所斷亦面面周到且互不相容)。

(二) 直接證法與間接證法(反證法)。

直接證法及間接證法的意義。間接證法的方式——歸謬法,窮舉法,同一法。

(三) 綜合法與分析法。

綜合法。分析法。

(四) 歸納法。

普通歸納法。數學歸納法。

(III) 證題術 (18 學時)

(一) 相等。

關於相等的證題術。例題。

(二) 垂直與平行。

關於垂直的證題術。關於平行的證題術。例題。

(三) 和、差、倍、分與代數證法。

關於和、差、倍、分的證題術。用代數法計算。例題。

(四) 共線點與共點線。

關於共線點的證題術。關於共點線的證題術。梅涅勞(Menelam)定理。塞瓦(Ceva)定理。例題

(五) 共圓點與共點圓。

關於共圓點的證題術。關於共點圓的證題術。例題。

(六) 不等。

關於不等的證題術。例題。

(七) 線段計算與雜例。

關於這方面的證題術。例題。

(IV) 軌跡 (12 學時)

(一) 基本知識。

類、軌跡的意義。完備性和純粹性。軌跡命題的證明。

軌跡命題的類型。基本的軌跡命題。

(二) 解法範例。

第一類型命題。第二類型命題(包括兩圓的等幂軸, 共軸圓系 Apollonius 軌跡等例題)。第三類型命題。

(三) 求法與檢查。

軌跡的探求方法——性質的鑑定, 位置的推斷, 描跡, 間接求跡法。題解的檢查——易犯的錯誤, 條件代換的影響, 軌跡的連續問題。

(V) 作圖 (20 學時)

(一) 基本知識。

作圖題的意義。作圖器具。作圖公法。作圖成法。解題的步驟——分析, 作圖, 證明, 推究。

(二) 常用的作圖方法。

交軌法。三角形奠基法。

(三) 合同變換。

反射。平移。旋轉(包括中心反射)。用移置法解作圖題。

(四) 位似變換。

位似形及其性質。兩圓的位似。用相似法解作圖題。放縮器。

(五)作圖雜法。

伸縮半徑法。反求法。變更問題法。

(六)代數法。

幾何式子的齊次性。一次式的作圖。二次方程的根的作圖。
用代數法解作圖題。某些正多邊形的作圖。

(七)尺規作圖不能問題。

尺規作圖可能性的準則。幾何三大問題。等分圓周問題。

[附錄]反演變換。

反演定義。直線及圓的反象。保角性。漂西里爾
(Peaucellier)及哈特(Hart)反演器。極點和極線。
用反演法解作圖題(包括 Apollonius 問題)。

(丙) 參考資料

1. 蘇聯師範學院物理數學系(數學專業)師範專業初等數學教程教學大綱(1950)。
2. 別列別爾金:初等幾何學教程(已譯)。
Д. И. Перепёлкин. Курс Элементарной Геометрии.
3. 哈德瑪:初等幾何學(上册已譯)。
Ж. Адамар: Элементарная Геометрия.
4. 巴哥瑪洛夫:幾何學。
С. А. Богомолов: Геометрия.
5. И. И. Александров: 幾何作圖問題解法(丁壽田譯)。
6. Д. О. Шклярский 等: 平面幾何問題和定理精選(翻譯中)。
7. 施考里尼克: 等分圓周問題(已譯)。
А. Г. Школьник: Задачи Деления Круга.
8. А. П. Киселев: 中學幾何(東北人民政府教育部譯)。

9. Д. И. Перепёлкин: 中學幾何作圖。
10. Назарьев 等: 幾何習題集(已譯)。
11. Б. Н. Делоне 等: 幾何習題集(翻譯中)。
12. 傅種孫著, 高中平面幾何教科書。
13. 傅種孫著, 作圖篇上。
14. 劉薰宇編, 中學平面幾何。
15. 王邦珍編, 軌跡問題。
16. J. Petersen: 幾何作圖題解法及其原理(余介石譯)。
17. 柳原吉次: 幾何學——軌跡及作圖(崔朝慶譯)。
18. F. Klein: 幾何三大問題(余介石譯)。
19. L. E. Dickson: 初級方程式論(黃新鐸譯)。
20. 王元吉著, 平面幾何學軌跡問題詳論。
(載“中等算學月刊”第五卷第一、二、三、五期)。
21. 中學數學教學大綱草案(1953)。

附: 教材內容的採選

(以下方括弧中數字, 代表以上各參考書名)

引言, 可參考[2], [12]。

(I) 中學幾何摘要, 可參考[8], [12], [14], [21]。

(II) 推證通法, 可參考[12]。

(III) 證題術, 可參考[6], [12]。

(IV) 軌跡, 可參考[12], [15], [17], [20]。

(V) 作圖, 可參考[2], [5], [7], [9], [12], [13], [16],
[17], [18], [19]。



師範學院數學系

初等數學複習及研究試行教學大綱

初等函數

(甲) 說 明

本大綱係遵照師範學院數學系暫行教學計劃，初等數學複習及研究的設置目的：‘將散見於各門高等數學中初等函數的理法題材，分別整理補充；務使學生對初等函數理論有正確了解，並掌握有關問題的解法’而編寫。其教材內容一部分涉及中等學校代數，一部分涉及中等學校三角，雖然大部教材已在中等學校及大學課程中數見不鮮，但中等學校所講的，理論上很難嚴密，而大學其他科目所講的，方法上又不一定與中等學校的講法接近。為使未來中等學校教師能在中等學校把函數的理論講好，必須從中等學校教材中有關函數的章節，選擇其理論不嚴的節目，或中等學校學生難於接受的概念，詳加闡說；並應多舉題材，羅列資料，藉供參稽查考之需；另外選擇中等學校教材所未列、而教師往往忽視的關鍵問題，披隙導竅，明白指點。如各種函數的性質及圖象，各種方程及方程組，逆三角函數，三角函數中自變數的各種解釋等等，即係前一類題材；無理指數冪，各種造表法，三角函數對於球面直角三角形的應用，指數函數與對數函數在複數體中的關係，即係後一類題材。

本大綱所列項目，未必能包盡一切如此材料，然而大體俱已入選，學生掌握了這些材料就能舉一反三，不難因此知彼；最低要求他們能將中等學校教材中函數方面的困難問題，給中等學

校學生講懂；附帶也要求他們遇有必要時能深入淺出，將高等數學的精神，貫注到中等學校的教材裏去。

本科目教材，既然大部在中等學校或大學其他課程中已經學過，因而只須重點講解；不必一板一眼地講（這樣教法，必然感到時間不足）；再說這門課設在第七學期，四年級的大學生，應該有自學的能力，所以容易的部分，儘可從簡講授。現在把講授內容所列入的大部分，略加解釋。

第一部分引言，介紹函數的分類，本教程所講的範圍，和以後必須用到的一些關於函數的一般概念。這些材料，只須用二學時加以說明；內容可參考[2]*之§ 83, § 108, § 109。

第二部分冪函數，為指數函數張本。其中冪函數的定義須徹底講解，尤其是 a^0 與無理指數冪，必須把概念的正確意義明確出來。冪函數的數值表包括平方，立方，平方根，立方根四種；冪函數之逆仍是冪函數，這是與本教材所列其他函數不同之處。全部共計講三學時；內容可參考[2]之第八章，[3]之第七章（其中關於冪函數的性質論列甚詳），[13]之第十章。

第三部分指數函數，要把指數函數從有理數體推廣到實數體的步驟詳細講一下。造表是新知識，需要指示。對於指數方程及其方程組着重分清其與代數方程之基本不同。時間不夠，則略去複利一項。共計講四學時；內容可參考[2]之第八章，[3]之第七章。

第四部分對數函數，要細講造表法；兩種不同底的對數間的關係一項中，應安排例題，要能把兩種對數表之間的關係影射出來；因為這裏邊寓有造表的意義。對數方程及其方程組一項與第三部分相仿。其餘部分可以斟酌簡略講授；若時間過緊，可不

* 方括弧所註號碼，代表(丙)項所列參考資料的書名。

講最末兩項，只安排適當習題，由學生課外練習。全部共講五學時；內容的參考與第三部分同。

第五部分三角函數，是初等數學三角部分的複習及研究；都是本系其他科目所講不到的，所以教學內容中所列各項都須講述。三角函數的各種定義及自變數的各種解釋是概念性的重點。共計講授八學時；內容可參考[2]之第九章，[4]之第一、二、六各章，[14]之第一至九章。

第六部分逆三角函數，與第五部分情況相仿。逆三角函數間的幾種關係比較難講，教師應該多加準備，要求學生能徹底掌握逆三角函數的概念及其應用。共計講五學時；內容可參考[2]之第十章，[4]之第三章。

第七部分三角函數在幾何上的應用，主要講三角函數在平面幾何上的應用；球面上的應用只講直角三角形的解法，並由此解其他圖形（另外的應用分入立體幾何講授）。三角測量大意中，着重講儀器的使用；最少要使學生知道平板儀的用法。可作室外實習一兩次。若學校設備不夠，可參考測量術書籍，選擇儀器用法，編入講義。共計講六學時；內容可參考[4]之第五章，[14]之第十至十二各章，[16]之第三章。

第八部分指數函數與三角函數在複數體中的關係，是要用高等數學的觀點把指數函數，對數函數，三角函數連貫起來。這當然是複變數函數中已經講過的。設置這一部分的用意就是要將本科目全部教材連貫一下，總結一下，使學生對初等函數有全面的認識；講解不必詳細，只用三學時；若時間感覺緊迫，可以從略。教材內容可從[4]之第七章選取，另外可參考[14]之第十五章，[15]之第五章。

凡係方程，計算，或證題性質的項目，與中等學校教材有直接關係者，都應多作練習。初等函數理論用於物理之處甚多，宜

隨時列入物理例題，以聯繫實際。

本科目每週教學五學時，其中講授三學時，習作二學時；第七學期上課十二週，合計講授三十六學時，習作二十四學時；共有六十學時。

(乙) 大綱內容

(I) 引 言 (2學時)

一般概念。初等函數及其分類。

(II) 冪函數 (3學時)

冪函數的定義(指數由自然數推廣到整數，有理數及實數)。中等學校所用冪函數的性質並用初等方法證明。作冪函數的數值表及圖象。冪函數之逆。

(III) 指數函數 (4學時)

指數函數的定義與等比級數的聯繫。中等學校所用指數函數的性質並用初等方法證明。作指數函數的數值表及圖象。幾種指數方程及其簡單方程組。複利。

(IV) 對數函數 (5學時)

對數函數是指數函數的逆函數。中等學校所用對數函數的性質並用初等方法證明。作對數函數的數值表及圖象。幾種對數方程及其簡單方程組。兩種不同底的對數間的關係。常用對數的用法。利用對數的性質使計算簡化。

(V) 三角函數 (8學時)

三角函數定義的各種方法，尤其是射影法。自變數的各種