

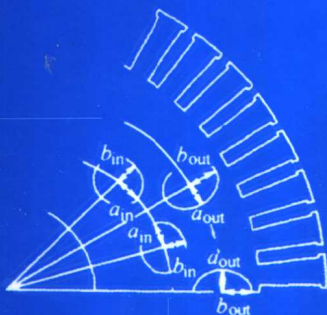
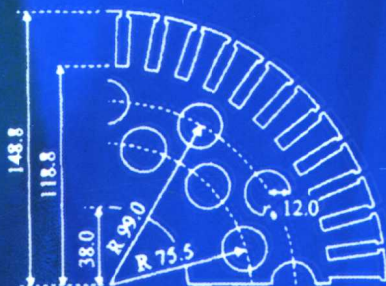
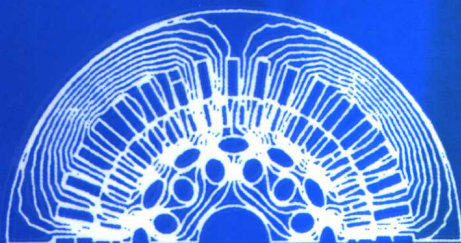


面向21世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

普通高等教育机电类规划教材

# 工程电磁场数值计算

倪光正 杨仕友 钱秀英 邱捷 等编著



面向 21 世纪课程教材  
● 普通高等教育机电类规划教材

# 工程电磁场数值计算

倪光正 杨仕友 等编著  
钱秀英 邱 捷



机械工业出版社

本书系统地论述了应用于电磁场正问题与逆问题数值计算中常用的各种计算方法。结合工程分析应用的需要,阐明了各种计算方法的基本原理及其实施要点,并提供了为构造离散数学模型所必须的数理基础知识,以及实用的计算程序和上机实践的基础知识。

全书内容分四篇,共十一章:第一部分为电磁场数值分析的数理基础,概括了电磁场的特征及其数学描述,离散方程组的解法;第二部分则在第一部分的基础上结合工程分析的需求,具体介绍了常用于各种电磁场正问题的数值计算方法(数值积分法、有限差分法、有限元法、模拟电荷法、矩量法和边界元法);第三部分系面向电磁场逆问题数值分析的需要,具体介绍了实用于工程问题优化设计分析的随机类全局优化算法;第四部分则是基于全书上机算题的实践需要,概述了本书运用的 Fortran77 算法语言与 C 语言的内核,以及上机实践的基础知识。

本书既可在高等工科院校电类专业大学生、研究生学习电磁场理论后,立足于工程电磁场计算机辅助分析能力培养的目的,提供深一层次的教学或参考学习用书,也可供从事电磁场应用研究的教师、科研工作者或电磁场工程方面的工程师和技术人员参考使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场数值计算/倪光正等编著. —北京:机械工业出版社, 2004.2

面向 21 世纪课程教材. 普通高等教育机电类规划教材  
ISBN 7-111-13883-X

I. 工… II. 倪… III. 电磁场-数值计算-高等学校-教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004402 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:韩雪清 王保家 责任编辑:王保家 版式设计:霍永明  
责任校对:陈延翔 封面设计:张静 责任印制:施红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

787mm × 1092mm  $1/16$  · 21 印张 · 519 千字

定价:31.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

近代工程科学以计算机技术的飞速发展为基础,已进入一个理论分析研究与工程应用实际相结合的全新时期。计算机辅助分析(CAA)、设计(CAD)和制造(CAM)<sup>①</sup>为各类工程技术的最优化应用与新发展注入了强大的生命力。顺应这一现实的发展态势,在电磁场应用研究领域,基于电磁场理论,在融汇数值计算方法和计算机软件技术新成果的基础上,衍生形成了电磁场数值计算这一新的学科分支。

科学发展史表明,自1865年麦克斯韦奠定经典电磁理论以来,电磁场工程技术不仅在以电磁能量和信息的传输、转换过程为核心的强电与弱电领域中,充分展示其重要作用,而且发展至今,在旁及军事、经济、生态、医疗、天文、地质等众多领域中,与多种应用技术相结合,生成了许多新技术。显然,近代科学技术发展日益呈现出各学科间的相互交叉、渗透,工程技术日趋综合、集成化的特点,进一步推动了电磁场工程技术在正、逆问题定量分析上的新需求,并促成了电磁场数值计算领域极为广泛、活跃的发展及应用态势。因此,科学技术客观上的发展需要,计算机技术所提供的物质基础,为电磁场数值计算这门新学科分支制备了迅捷发展的充要条件。这就使电磁场理论得以与现代数学、计算机科学更紧密地结合,在定量分析需求的高度上,迎合了当今工程科学技术发展的总趋势。

本书著者自1979年开始在电磁场理论教学中引入“数值计算方法”的教学内容,延续至今的教学实践表明,基于深化和加强电磁场工程分析的能力,学生对此学习内容浓厚的学习兴趣,教学效果显著。因而,在教育与科技相辅相成的发展中,在教学改革不断深化的进程中,20世纪90年代初,由原国家教委高等学校工科电磁场理论课程教学领导小组规划,为适应电磁场课程后续教学的需要,继续加强本科学生分析和解决工程电磁场问题的能力,并使学生不间断地接受计算机辅助分析能力的培养,以满足较高层次本科大学生的培养要求,经过论证,确定了编写“电磁场数值计算”教材的立项。1996年,本书著者按照电工类“电磁场”和电子通信类“电磁场与电磁波”课程的基本要求,以电磁场工程的CAA和CAD技术的基础知识传授为目的,汇集了著者在20余年教学、科研过程中积累的实际材料、讲稿等,提炼成书,由高等教育出版社出版了《电磁场数值计算》一书。该书作为高等学校教材,立意于理论联系实际,倾力帮助读者迅速有效地掌握定量分析各类工程电磁场问题所需算法及其实施过程,引起了高校和工程界同行的广泛反响,激励著者继续顺应工程电磁场应用研究的发展需求,在保持《电磁场数值计算》一书原有特色与风格的基础上,再续新篇。正是在这样的背景下,经全国高等学校电工及自动化类专业教学指导委员会审议,并报教育部高等教育司批准,本书——《工程电磁场数值计算》被列为“面向21世纪课程教材”,由机械工业出版社出版,以飨读者。

承接《电磁场数值计算》一书,本书撰写的第3篇致力拓展了关于电磁场逆问题数值分析的基本内容,从而同步于电磁场学科前沿的进展,寄望应用电磁技术的优化设计与分析成为

① CAA——Computer Aided Analysis 的简称; CAD——Computer Aided Design 的简称; CAM——Computer Aided Manufacture 的简称。

电气工程学科与技术发展的新推动力。本书第4篇关于上机实践基础知识的展述，力求进一步适应各层次读者在编程、上机实践等方面的需求。同样，在第1、2篇内容的撰写中，著者进行了再次提炼，并充实了时域有限差分法、伽辽金有限元法、等参数有限元法和优化模拟电荷法等有关章节。此外，本书在为读者提供相应的实用计算程序的立意上，除聚焦于以 Fortran 77 算法语言编制的主体程序外，还拓展编制了有关的 C 语言程序，以及 Matlab 程序，以应读者举一反三，延拓计算机编程应用能力的需要。这样，本书既可作为电磁场课程的后续课程教材，易于为电类专业大学生和研究生学习应用，也适合从事于工程电磁场应用研究的教师、科技工作者和工程技术人员使用。

参加本书编写的有倪光正、杨仕友、钱秀英、邱捷、钱金根、程卫英、熊素铭、张鸣柳、倪培宏九位同志，由倪光正主编。编写中得到了浙江大学、西安交通大学两校电工电子基础教学中心同仁们的热情关心和支持；高等教育出版社楼史进编审，机械工业出版社林松、韩雪清编审自始至终关注、支持著者前后二书的撰写，提出了很多宝贵的意见和建议；夏海霞、周扬、金志颖、王育槐、罗平、刘乐等硕(博)士生协助著者整理、打印书稿，并调试部分应用程序，谨在此一并致以衷心的感谢。

限于著者的能力与水平，书中不够完善乃至缺点错误之处，敬请使用本书的师生和广大读者批评指正。

著者

2004年1月于浙江大学

# 目 录

## 前言

## 第 1 篇 工程电磁场数值分析的数理基础 ..... 1

### 第 1 章 电磁场的特性及其数学模型 ..... 1

1.1 数学模型 ..... 1

1.2 电磁场正问题数值分析的任务和内容 ..... 2

1.3 电磁场逆问题数值分析的任务和内容 ..... 4

1.4 电磁场的基本规律——麦克斯韦方程组 ..... 5

1.5 场向量的微分方程 ..... 8

1.6 位函数的微分方程 ..... 9

1.7 定解条件 ..... 11

1.8 电介质极化场的分析 ..... 13

1.9 媒质磁化场的分析 ..... 15

1.10 物理场的相似性 ..... 17

参考文献 ..... 17

### 第 2 章 离散方程组的计算机解法 ..... 19

2.1 概述 ..... 19

2.2 高斯消去法 ..... 20

2.3 列主元消去法 ..... 23

2.4 改进的平方根法 ..... 25

2.5 松弛因子作自适应估计的 SOR 迭代法 ..... 26

2.6 共轭梯度加速迭代法 ..... 29

2.7 广义代数特征值问题的求解 ..... 31

附录 2.1 高斯消去法求解线性代数方程组程序 ..... 33

附录 2.2 高斯消去法求解对称正定线性代数方程组程序 ..... 34

附录 2.3 列主元消去法求解线性代数方程组程序 ..... 37

附录 2.4 改进的平方根法求解对称正定线性代数方程组程序 ..... 39

附录 2.5 松弛因子作自适应估计的 SOR 迭代法求解大型稀疏线性代数方程组程序 ..... 41

附录 2.6 共轭梯度雅可比加速迭代法求解大型稀疏线性代数方程组程序 ..... 44

附录 2.7 广义代数特征值问题  $Ax = \lambda Bx$  的求解程序 ..... 48

参考文献 ..... 56

## 第 2 篇 电磁场正问题的数值分析 ..... 57

### 第 3 章 数值积分法 ..... 57

3.1 概述 ..... 57

3.2 梯形与辛普生求积公式 ..... 58

3.3 高斯求积公式 ..... 60

3.4 椭圆积分的数值计算 ..... 62

3.5 基于场量积分式的数值积分法 ..... 63

3.6 基于场源离散化的数值积分法 ..... 69

3.7 典型算例 ..... 74

附录 3.1 变步长辛普生积分法程序 ..... 83

附录 3.2 二重积分的变步长辛普生积分法程序 ..... 86

附录 3.3 一维高斯积分法程序 ..... 88

应用算题 ..... 90

参考文献 ..... 92

### 第 4 章 有限差分法 ..... 93

4.1 概述 ..... 93

4.2 差分与差商 ..... 93

4.3 差分格式的构造 ..... 95

4.4 差分方程组的求解 ..... 99

4.5 场强与电、磁积分量的计算	101	7.2 矩量法的数学基础——加权 余量法	222
4.6 典型算例	102	7.3 点匹配法与典型算例	228
4.7 等值点的寻求与描绘	110	7.4 伽辽金有限元法	233
4.8 时域有限差分法	113	应用算题	236
应用算题	120	参考文献	236
参考文献	122	<b>第 8 章 边界元法</b>	237
<b>第 5 章 有限元法</b>	123	8.1 概述	237
5.1 概述	123	8.2 基础知识	238
5.2 变分原理	124	8.3 边界积分方程	240
5.3 有限元法的基本原理	131	8.4 边界元方程及方法实施	242
5.4 有限元的前、后处理的基础 技术	139	8.5 典型算例	248
5.5 平行平面和轴对称静态电、磁场的 有限元方程	147	附录 8.1 线性单元边界元法的通用 计算程序	251
5.6 非线性场中的有限元法	154	应用算题	258
5.7 时谐电磁场中的有限元法	161	参考文献	259
5.8 等参数有限元法	167	<b>第 3 篇 电磁场逆问题的数值 分析</b>	260
附录 5.1 一阶有限元法的通用计算 程序	171	<b>第 9 章 电磁场逆问题</b>	260
附录 5.2 规则平面域的自动剖分程 序	181	9.1 概述	260
附录 5.3 圆形域的自动剖分程序	185	9.2 优化算法	261
附录 5.4 有限单元编号按媒质特性 重行排序的程序	189	9.3 参数计算与模型接口问题	261
附录 5.5 磁化曲线数值逼近的程序	190	9.4 其他相关问题	262
附录 5.6 等值线绘制的 Matlab 程序	191	9.5 计算实例	262
应用算题	198	参考文献	264
参考文献	201	<b>第 10 章 随机类全局优化算法</b>	266
<b>第 6 章 模拟电荷法</b>	202	10.1 概述	266
6.1 概述	202	10.2 模拟退火算法	266
6.2 模拟电荷法的基本原理与应用	203	10.3 禁忌算法	267
6.3 模拟电荷的类型及其电位、场强 系数的计算式	208	10.4 基因(遗传)算法	268
6.4 典型算例	211	10.5 表面响应模型	270
6.5 优化模拟电荷法	219	10.6 矢量优化算法	271
应用算题	220	10.7 计算实例	273
参考文献	221	参考文献	276
<b>第 7 章 矩量法</b>	222	<b>第 4 篇 数值计算的实践基础</b>	277
7.1 概述	222	<b>第 11 章 上机指南</b>	277
		11.1 上机环境	277

11.2 Fortran77 语言的应用 .....	277	程序 .....	297
11.3 标准 C 语言概述 .....	285	附录 11.4 电磁散射场(FDTD)的计算	
11.4 Matlab 软件的应用 .....	287	程序 .....	301
11.5 上机算题的指导 .....	289	附录 11.5 一阶有限元法的通用计算	
附录 11.1 列主元消去法求解线性代		程序 .....	306
数方程组程序 .....	290	参考文献 .....	317
附录 11.2 二重积分的变步长辛普生		<b>附录</b> .....	318
积分法程序 .....	293	附录 A 坐标系统 .....	318
附录 11.3 应用有限差分法求解长直		附录 B 矢量分析公式 .....	318
接地金属槽中电场的计算		<b>应用算题解答与提示</b> .....	321



# 第 1 篇 工程电磁场数值分析的数理基础

## 第 1 章 电磁场的特性及其数学模型

本章基于宏观电磁理论描述表征电磁场特性的数学方程和关系式,形成建立工程电磁场数学模型和实施数值计算方法的数学物理基础。为适应工程问题分析计算的需要,阐述中特别强调在数学和物理意义上静态、准静态和动态电磁场之间的场特性的区别,并讨论了媒质不连续性和不均匀性的特征描述。为进一步扩展本书分析内容的深广度,本章还概括地提出了物理场的相似性。

### 1.1 数学模型

回顾自然科学发展的历史,早在伽利略年代,即已认为理解宇宙的原理是数理。其后,牛顿(1.Newton,1642~1727)将力学法则用单纯的数学式来表达,结合由他创始的微积分方法,通过数学分析地球上的潮汐降落、摆的周期和天体中行星运动等自然现象,创立了牛顿力学。此后在包含物理学在内的自然科学领域内,致力于应用数学来阐明自然界各种现象,成为科学史的发展趋势。也就是说,人们应用单纯的数学关系式来描述自然法则,求其解答,并在与实验和观测结果相比较的基础上,去理解和应用自然现象。

近代,随着电子计算机技术的迅速发展,数学的应用在继续深入延拓到各工程、物理学科领域的同时,也进一步扩展到经济、生态、人口和社会等非物理学科领域。实践表明,许多以工程经验判断、定性分析为依据的工程设计,现正逐步发展为相关的计算机辅助工程(CAE)和计算机辅助设计(CAD)等定量的工程优化设计;同样,许多以定性方法为基础的学科正在转向定量化发展的道路,众多边缘学科应运而生。这就使数学在发展生产、经济管理,以及各自然与工程科学学科中的重要性日益为人们所理解和接受,促成了近代应用数学及其相关学科相辅相成的新发展。

当应用数学方法解决上述各类物理或非物理问题时,首先必须建立数学模型,然后得以在此模型的基础上进行实际问题的理论分析和科学研究。显然,建立的数学模型必须精确地逼近实际问题,否则,在理论分析中即使采用最巧妙的数学处理,其结果也未必有用。因此,建立一个完善的数学模型乃是解决各类实际问题的关键。

所谓数学模型,指的是对客观事物的一种抽象的模拟,它遵循事物固有的规律性,通过数学语言(数学符号、数学表达式、图形等)刻画出客观事物的本质属性及其与周围事物的内在联系。应当指出,通常与客观事物完全吻合的数学表述并不多见,因此实际的数学模型往往是在对实际问题进行理想化假设后所给出的数学描述。此外,数学模型的确立,还必须要求它

的分析计算结果能为实验、测试所证实, 或者它能被推广说明许多事实, 乃至可以预测为人们所公认的结果。例如, 牛顿创立的万有引力定律就经受了哈雷彗星的研究、海王星的发现等大量事实的考验。同样, 麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831 ~ 1879)在 1865 年提出电磁场基本方程组, 并预言了电磁波的存在。至今, 一百多年来电磁学科领域科技发展的进程证明麦克斯韦方程组是宏观电磁现象与电磁过程普遍适用的数学模型, 奠定了经典电磁理论的基础。

既然数学模型是客观事物的一种数学描述, 因而对于同一事物, 基于不同的出发点, 就可以有不同类型的数学模型描述。根据构造数学模型的数学方法分类, 模型可以分为微分方程模型、积分方程模型、优化模型和控制论模型等。根据问题中变量的特征分类, 模型又可分为确定性模型与随机性模型。根据问题的变化情况又可分为连续型模型与离散型模型。此外, 还有线性模型与非线性模型, 静态模型与动态模型等分类方法。应指出, 数学模型分类并不具有特殊的意义, 但概念的引入将便于理解, 有助于综合使用各种数学工具, 从各个不同侧面去揭示某一实际问题的本质属性。

如上所述, 宏观电磁理论最高度概括的数学模型就是麦克斯韦方程组。结合实际问题中千变万化的定解条件(边界条件与初始条件), 在引用相应的数学方法后, 常用的各类电磁场问题的数学模型可以归结为微分方程模型、积分方程模型和属于优化模型的变分方程模型三大类。

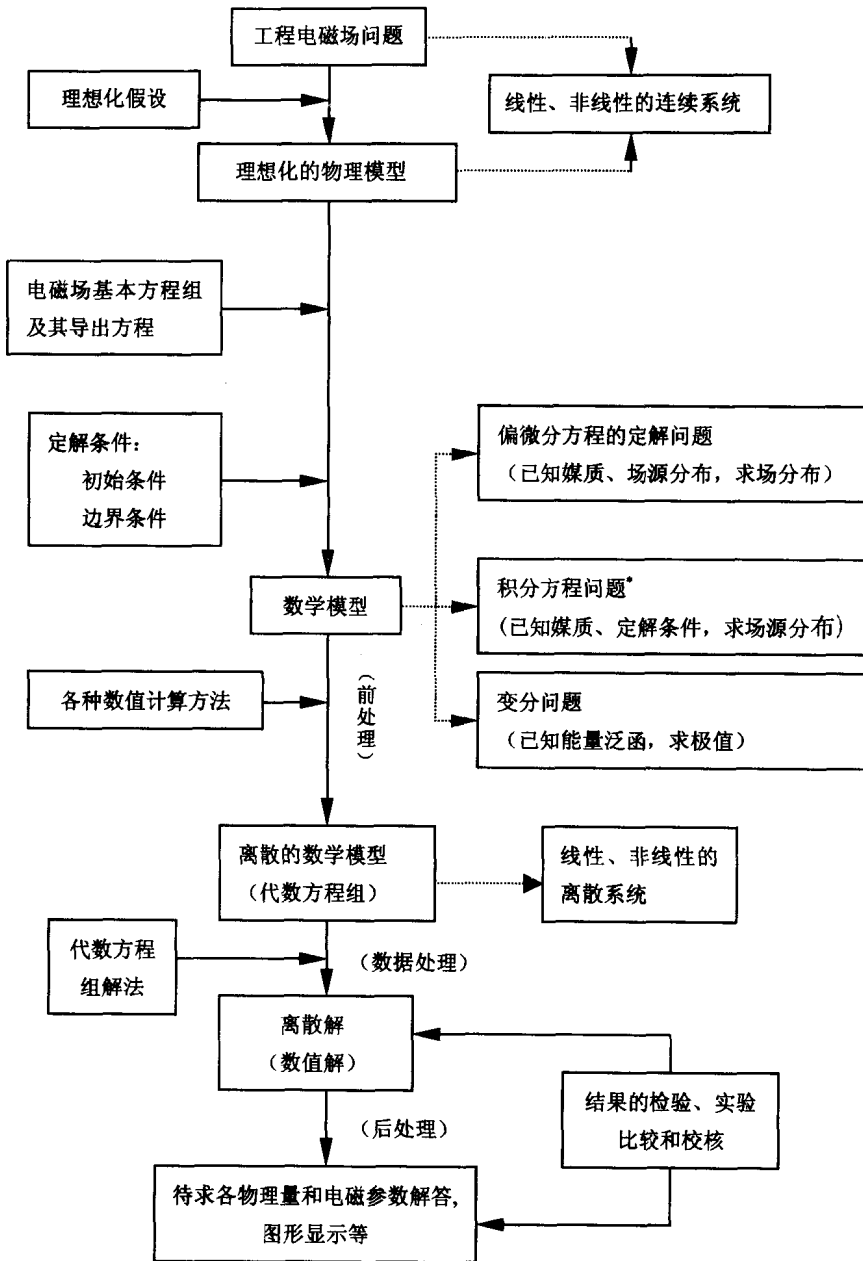
## 1.2 电磁场正问题数值分析的任务和内容

鉴于工程电磁场问题的复杂性, 即各类电磁装置在其结构、几何形状上的复杂性, 以及在材料性质变化上的复杂性, 致使应用于电磁场分析计算的各种解析方法, 例如分离变量法、保角变换法、镜像法和格林函数法等, 已经无法适应广泛工程问题分析求解的需要。因而, 30 余年来, 随着计算机技术的飞速发展, 属于近似计算方法范畴的各种电磁场数值计算方法得到了长足的进展, 并最终已可满足科技和工程方面对于数学模型精确分析的实际需要。

归属电磁场分析研究领域的各类电磁装置中的电磁场问题, 其共同的基本点在于给定场的计算区域、各区域材料(媒质)组成和特性, 以及激励源的特性, 求其场域中场量随时间、空间分布的规律(场分布), 即构成为电磁场的正问题。因而, 对应于电磁场正问题的电磁场数值分析的任务是根据电磁场的基本特性, 即基于麦克斯韦方程组, 首先, 建立逼近实际工程电磁场正问题的连续型的数学模型; 然后, 采用相应的数值计算方法, 经离散化处理, 把连续型数学模型转化为等价的离散型数学模型——由离散数值构成的联立代数方程组(离散方程组), 应用有效的代数方程组解法, 计算出待求离散数学模型的离散解(即场量的数值解); 最后, 在所得该电磁场正问题的场量(含位函数)离散解的基础上再经各种后处理过程, 就可以求出所需的场域中任意点处的场强、任意区域的能量、损耗分布, 以及力、力矩和各类电磁参数与性能指标等, 以达到对给定的工程电磁场正问题进行理论分析、工程判断乃至优化设计等目的。

综合电磁场正问题数值分析处理的全过程, 其流程图如图 1-1 所示。由图可见, 以各种数值计算方法为其核心, 执行电磁场正问题数值分析不仅必须具备一定的数学、物理基础和有关电磁场的专门知识, 而且建模过程在很大程度上还必须依赖于工程知识和经验的积累, 使之有可能采用恰当的理想化假设, 准确地给定问题的定解条件(初始条件和边界条件)。此外, 对应于计算流程的前处理(如场域剖分、数据文件构成等)、数据处理和后处理(如等位

线、通量线描绘,以及场强、电磁参数、能量和力的计算等),分析者在计算机编程和应用方面的能力,以及包括计算机软件支持条件等,均是实现数值计算的重要因素。



\* 电磁场积分方程型的数学模型本质上归属电磁场逆问题的范畴, 此处引入仅限于与相关数值计算方法对应描述的需要。

图 1-1 电磁场正问题数值分析流程图

前已指出, 高速、大容量计算机的问世, 为高精度、高效率的数值计算奠定了基础。经过 30 余年来的发展, 电磁场正问题的数值分析已经取得大量应用研究和工程分析、设计的成果, 各种电磁场 CAD 商品化软件也已进入相关的研究部门、生产企业, 产生日益明显的

经济效益。与此同时，电磁场数值计算的理论和方法日趋完善，业已成为电工理论学科中的一门新兴的应用学科分支。

就电磁场正问题数值分析的核心内容——各种实用的数值计算方法而论，它们是将原连续型数学模型转化为等价的离散型数学模型的基础。取决于不同的数学内涵，目前在电磁场数值分析中常用的数值计算方法有：应用于微分方程型数学模型的有限差分法、有限元法和蒙特卡洛法；应用于积分方程型数学模型的模拟电荷法、矩量法和边界元法，以及基于直接积分运算关系式的数值积分法等。此外，各类数值计算方法的相互组合，例如微分和积分组合型数学模型的单标量磁位法、双标量磁位法等，进一步拓展了数值计算方法在工程实践中的应用。本书将分章阐述其中常用的主要方法及其工程应用。

### 1.3 电磁场逆问题数值分析的任务和内容

当前，工程科学技术的发展已经在各类电磁装置的综合问题上，即电磁场逆问题的数值分析研究领域，提出了日益迫切的需求。与电磁场正问题相对应，电磁场逆问题就是给定电磁装置理想的性能指标或参数，然后通过装置的优化设计来实现这一目标。目前，对于电磁场逆问题的求解，都是将其分解为一系列的正问题，然后采用一定的优化方法通过迭代解算达到最终优化设计的目的。由于在每一步迭代计算中，需要进行若干次电磁场正问题的数值计算和其他一些辅助计算，因此，相对正问题而言，逆问题的求解、计算量大，占用计算机内存和 CPU 时间多。也正因如此，惟有随着计算机技术的发展，以及电磁场数值计算理论和方法的不断丰富和完善，才使电磁场逆问题从 20 世纪 80 年代中期以来成为电磁场学术与工程界关注的研究热点，并日益展现其令人瞩目的工程实用前景。

综合电磁场逆问题数值分析处理的全过程，其流程图如图 1-2 所示。鉴于工程优化设计

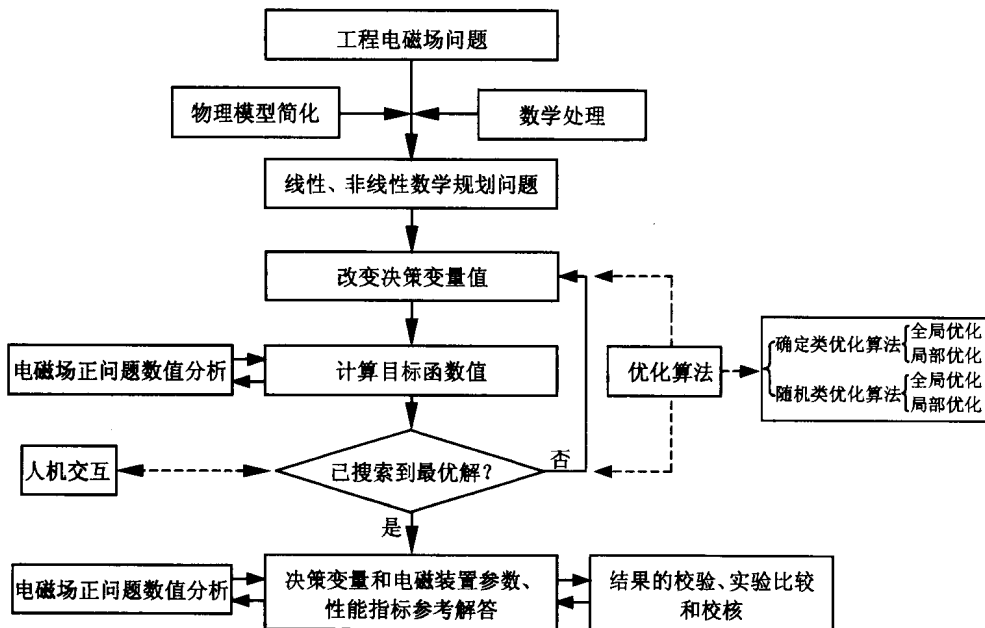


图 1-2 电磁场逆问题数值分析流程图

的实际需要, 如后第 3 篇所述, 本书以工程电磁场问题的全局优化为逆问题数值分析的论点, 因此, 与图 1-2 中所列各种优化算法对应的全局优化算法, 目前应用的有模拟退火算法、基因算法、进化算法、禁忌算法和神经网络等随机类优化算法。本书将分节阐述其中常用的主要方法及其工程应用。

## 1.4 电磁场的基本规律——麦克斯韦方程组

宏观电磁现象的基本规律可以非常简洁地用一个方程组, 即麦克斯韦方程组来表示。这一电磁场基本方程组的基本变量为四个场向量: 电场强度  $\mathbf{E}$  (V/m)、磁感应强度  $\mathbf{B}$  (T)、电位移向量  $\mathbf{D}$  (C/m<sup>2</sup>) 和磁场强度  $\mathbf{H}$  (A/m); 以及两个源量: 电流密度  $\mathbf{J}$  (A/m<sup>2</sup>) 和电荷密度  $\rho$  (C/m<sup>3</sup>)。在静止媒质中其微分形式可以表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1-1) \\ (1-2) \\ (1-3) \\ (1-4) \end{array}$$

为表征在电磁场作用下媒质的宏观电磁特性, 尚应给出以下三个媒质的构成关系式:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (1-7)$$

应当注意, 式(1-5)~式(1-7)中分别引入的媒质宏观特征参数——介电常数  $\epsilon$ 、磁导率  $\mu$  和电导率  $\gamma$ , 只有在线性且各向同性媒质的情况下, 才是简单的常数。工程上广泛应用的铁磁材料, 其  $\mathbf{B}$ — $\mathbf{H}$  关系呈现为含有磁滞效应和损耗的复杂的非线性规律, 此时,  $\mu = \mu(\mathbf{H})$  为依赖于场量变化的某个函数表达式。此外,  $\epsilon$  和  $\mu$  还可以描述各向异性材料, 这时由于材料中通量密度方向与场强方向的不一致, 它们应分别记作张量。在 SI 单位制中, 对应于自由空间的介电常数  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m; 磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, 满足在真空中光速  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 2.998 \times 10^8$  m/s 的基本关系。麦克斯韦方程组描述了场源(电荷、电流)激发电磁场的一般规律, 而从全面分析电磁场问题的需要出发, 还常引用另一基本方程, 即电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1-8)$$

这一表征时变电荷与全电流密度之间关系的连续性方程可由麦克斯韦方程组直接导出。此外, 从另一侧面为描述电磁场对电荷与电流(运动电荷)的作用, 其规律归结为洛仑兹力公式

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (1-9)$$

### 1.4.1 动态电磁场

对应于动态情况下的时变电磁场, 其基本方程即为一般形式的麦克斯韦方程组[式(1-1)~式(1-4)]。此时, 式中的场量( $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ )和源量( $\mathbf{J}$ 、 $\rho$ )均为空间坐标(位矢  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ )

和时间坐标( $t$ )的函数。例如, 天线辐射和接收场、速调管和磁控管这类电子装置中的场均属动态电磁场。

应指出, 麦克斯韦方程组的四个方程并不都是独立的。如对式(1-1)取散度, 并代入连续性方程[式(1-8)], 即得式(1-4); 同理, 如对式(1-2)取散度, 即得式(1-3)。因此, 只有两个旋度方程[式(1-1)和式(1-2)]是独立方程。鉴于每一个旋度方程对应于三个标量方程, 所以麦克斯韦方程组给出了六个独立的标量方程。这样, 在给定场源与相应的定解条件下, 求解时变电磁场时, 面对待求场向量( $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ )共十二个独立的待求分量, 麦克斯韦方程组必须与媒质的构成关系式[式(1-5)~式(1-7)]相结合, 才能完成数学模型的构造。

#### 1.4.2 时谐电磁场

在电气工程、无线电工程和电子工程装置中, 常涉及随时间按正弦规律变化的电磁场(若是线性媒质中按非正弦周期变化的电磁场, 则可以通过分解为基波和各次谐波正弦激励的叠加, 予以分析处理)。例如, 电磁信息传输中的波导场, 交流电机、电器中的电磁场等。这时, 在线性媒质、正弦激励且稳态条件下, 一般形式的麦克斯韦方程组可归结为不显含时间的复相量表示形式。这就是说, 任何一个电、磁场量都可用一复相量表示, 例如, 电场强度可用一个与时间无关的复相量表示成  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_E(\mathbf{r})}$ , 它所对应的实际时变电场则可取  $\sqrt{2}\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}$  的实部而得( $\omega$  为正弦激励的角频率), 即所论场点  $p$  处电场的实时描述为

$$\begin{aligned} E_p(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} [\sqrt{2}\dot{\mathbf{E}}_p(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = \text{Re} [\sqrt{2}\mathbf{E}_p(\mathbf{r})e^{j(\omega t + \varphi_E)}] \\ &= \sqrt{2}\mathbf{E}_p(\mathbf{r})\cos[\omega t + \varphi_E(\mathbf{r})] \\ &= \sqrt{2}E_{px}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \varphi_E(\mathbf{r})]\mathbf{e}_x \\ &\quad + \sqrt{2}E_{py}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \varphi_E(\mathbf{r})]\mathbf{e}_y \\ &\quad + \sqrt{2}E_{pz}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \varphi_E(\mathbf{r})]\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

这样, 正弦稳态情况下的时变电磁场(时谐电磁场), 由麦克斯韦方程组可推得其对应的相量形式为

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega\dot{\mathbf{D}} & (1-10) \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\dot{\mathbf{B}} & (1-11) \\ \nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 & (1-12) \\ \nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} & (1-13) \end{cases}$$

式中, 以相量形式表征的各场量和源量均仅为空间坐标的函数, 其模为相应正弦量的有效值。

#### 1.4.3 准静态场

在分析研究导电媒质中的时变电磁场时, 若场域中各处位移电流密度远小于传导电流密度, 则可忽略位移电流效应。此时, 该时变电磁场即称之为准静态情况下的电磁场(磁准静态场), 其基本方程除麦克斯韦第一方程(1-1)可近似表述为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1-14)$$

之外, 其余方程(1-2)、(1-3)和(1-4)保持有效。而且基于式(1-14), 因任一向量旋度的散

度恒等于零，故在准静态下电荷守恒定律归结为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1-15)$$

显然，若该磁准静态场处于正弦激励、稳态工况下，则如上述，式(1-14)将进而可由相量表示为

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{j}} \quad (1-16)$$

而与其他相量形式的方程(1-11)、(1-12)和(1-13)共同组成时谐的磁准静态场基本方程组。同样，电荷守恒定律表示成

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{j}} = 0 \quad (1-17)$$

值得指出，此时，就导电媒质而言，应满足所谓良导体条件，即该媒质的电导率  $\gamma \gg \omega\epsilon$ 。按这一条件可见，相应的磁准静态场的激励源频率将可扩展至 X 射线的频率段。电工技术中的涡流问题就是这类磁准静态场的典型应用实例，它广泛地伴随在电机、变压器、感应加热装置、磁悬浮系统、磁记录头和螺线管传动机构等工程问题之中。

与磁准静态场相对应，还存在另一种可忽略电磁感应效应而导出的准静态情况下的时变电磁场(电准静态场)。这类场的基本方程除麦克斯韦第二方程(1-2)可近似表述为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1-18)$$

之外，其余方程(1-1)、(1-3)和(1-4)保持有效。电力传输系统和装置中的高压电场，各种电子器件、设备和天线近区的电场等，均属这类电准静态场的工程应用实例。

应该指出，无论是忽略电磁感应效应的电准静态，还是忽略位移电流效应的磁准静态，它们都满足所谓准静态条件： $L \ll \lambda$  [或  $(L/c) \ll T$ ]。也就是说，电磁波以速度  $c$  传播通过所论电磁系统的最大线度尺寸  $L$ ，其所需时间应远小于该电磁波变动一个周期所对应的时间  $T$ 。显然，准静态下的源量和场量都是时间和空间的函数，但电磁波传播的推迟作用可以忽略不计，这表明给定某一瞬间的源，即决定了同一瞬间的场分布，而该场分布与稍早瞬间的源状态并无关联。同样，这也表明，对于给定瞬间准静态场的分析计算，完全等同于相应的静态场问题。

#### 1.4.4 静态场

对应于电量不随时间而变化的静止电荷所产生的静电场，或由恒定电流所产生的恒定磁场，其相应的静态电场或静态磁场的基本方程组，显然由麦克斯韦方程组可以分别归结为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases} \quad (1-19)$$

和

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1-21)$$

式中，场量和源量均为不随时间而变化的空间坐标的函数。这时，客观的静态电磁场的物理现象将呈现为单一的电场或磁场效应。

#### 1.4.5 电磁场基本方程组的积分形式

在以上讨论的基础上，分别运用场论中的斯托克斯定理和高斯散度定理，就能导出各种状态下电磁场基本方程组的积分表达形式。以动态电磁场为例，与麦克斯韦方程组的微分形式[式(1-1)~式(1-4)]相对应的积分表达式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-23)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-24)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-25)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dV \quad (1-26)$$

## 1.5 场向量的微分方程

鉴于工程电磁场问题分析的需要,若直接基于麦克斯韦方程组求解,则因在数学上该多重耦合、多变量的微分方程组较难着手处理,因此,人们乐于面对在解耦情况下分别由单个场向量所给定的微分方程。为此,基于麦克斯韦方程组导出由场向量  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  或  $\mathbf{J}$  所满足的偏微分方程。现首先推导关于场向量  $\mathbf{H}$  的导出方程。对于线性、均匀且各向同性媒质,设场域中无自由电荷分布,则由式(1-1)取旋度运算,并以  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$  和  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  代入,便得

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times (\gamma\mathbf{E}) + \nabla \times \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\mathbf{E}) \\ &= -\mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1-27)$$

由于  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$  代入式(1-27),即得

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-28)$$

同理可证

$$\left( \nabla^2 - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-29)$$

式(1-28)、式(1-29)便是分别由一个场向量( $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$  或  $\mathbf{D}$ )所描述的一般化齐次波动方程。在特定情况下,基于以上各场向量的导出方程可进一步分别归结为

(1) 理想介质( $\gamma = 0$ )中的电磁波方程(波动方程)

$$\left( \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-30)$$

(2) 良导电媒质( $\gamma \gg \omega\epsilon$ )中的涡流方程(扩散或热传导方程)

$$\left( \nabla^2 - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{J} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-31)$$



(3) 正弦稳态时变场中的涡流方程(相量形式的扩散或热传导方程)

$$(\nabla^2 - j\omega\mu\gamma) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{B}} \\ \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{j}} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-32)$$

(4) 没有自由电荷分布区域中的静电场方程(拉普拉斯方程)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1-33)$$

(5) 没有传导电流分布区域中的恒定磁场方程(拉普拉斯方程)

$$\nabla^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1-34)$$

## 1.6 位函数的微分方程

在前面两节讨论的基础上,显然,可以由场向量所满足的微分方程出发,分析待求电磁场的场分布,以及所感兴趣的表征场特性的各积分量与参数。但是,如前所述,一个场向量的微分方程对应于由其三个分量所描述的三个标量微分方程。换句话说,在任一场点上,待求的自由度数是三个,因此,经离散化处理后所得等价的离散数学模型的自由度数,一般是相当可观的。为了有效地减少待求自由度数,提高电磁场数值计算的效率,同时,也为了简化概念,更简便地构造数学模型,引入和应用各种位函数在电磁场理论的发展进程中起到了重要的作用。

### 1.6.1 动态场中的动态位方程

在动态电磁场情况下,根据向量微积分法则,任意向量旋度的散度与任意标量梯度的旋度均恒等于零,因此易于验证

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-35)$$

和

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1-36)$$

以上两式分别定义了动态向量位函数  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  和动态标量位函数  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , 它们自动满足麦克斯韦方程组中的方程(1-3)和方程(1-2)。应当指出,这里引用位函数来表示场量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$ , 其中含有任意性的成分,因为如果令

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \\ \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases} \quad (1-37)$$

$$\quad (1-38)$$

则可给出同样的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$ 。位函数按照式(1-37)和式(1-38)的变换,称为规范变换,而保持  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  不变性,则称为规范不变性。由于存在这一规范不变性,所以对应于一组  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  的值,可以有无穷多组  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  的取值,即位函数不是惟一的。不难证明,这一任意性可以导致随意规定  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , 也就是所谓采用规范对  $\mathbf{A}$  的散度施加约束条件。这样,规范的选择,不仅在于惟一地确定相应的位函数值,而且还在于可简化相应的位函数方程。通常,对自由空间中的动态电磁场,引入如下的洛仑兹规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1-39)$$