# 点集拓扑学

方嘉琳 编著

京)

辽宁人民出版社

# 点 集 拓 扑 学

方嘉琳　编著

辽 宁 人 民 出 版 社

1983年・沈阳

点集拓扑学

方嘉琳 编著

*

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行

朝阳六六七厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：8 1/8 插页：2

字数：190,000 印数：1—8,400

1983年4月第1版 1983年4月第1次印刷

统一书号：7090·199 定价：1.95元

# 前　言

本世纪初，由于集合论和公理化方法的发展，在分析学进展过程中积累大量素材的基础上，产生了抽象空间的理论，从而建立了点集拓扑学。由于这一学科采用了极为有力的表述形式和高度抽象的观点、方法，它的理论显得十分简洁而具有高度的概括力。以致它的题材广泛地应用到现代数学的许多分支中去，而成为现代数学的基本工具之一。点集拓扑学正在继续发展，新的观点不断涌现，新的理论不断形成，新的方法不断产生。

在60年代，国际上普遍地认识到点集拓扑学在现代数学中的逻辑地位，许多高等院校已开设了这门课程。目前，它的观点和方法已渗透到中学数学的教学中去。在我国，由于十年动乱的影响，直到粉碎“四人帮”之后，这门课程才进入大学课堂，成为高等院校数学系的一门必修课。

本书是点集拓扑学的入门书，凡是对集合论的知识有一定了解的读者，都可顺利地阅读。为了方便读者，在预章中摘要地叙述了本书所涉及到的集合论的初步知识。对个别较深的问题作了详细的论述。

由于点集拓扑学抽象性较强，初学的读者必然感到有些问题难于理解。为了便于学习，本书从具体而重要的特殊情形——度量空间开始叙述，进而由具体到抽象，由浅入深，循序

渐进。

拓扑空间可用不同的语言，从不同的公理出发予以论述。本书是按现在通用的开集公理刻画的。在楷体部分中详尽地阐述了常见的各种公理的等价性。

由于拓扑的基本思想来源于分析学，基本概念都有其具体背景，在学习拓扑空间理论时，必须将抽象的叙述形式和具体的实际原型联系起来。这是至关重要的。分析学中 Euclid 空间的一些结构和有关极限的一些思想常常是拓扑学的具体模型。因此，在学习时，应注意掌握公理和概念的实质。

点集拓扑学的发展过程，可以说是解决问题的过程。有些问题是通过提出新观点、给出新方法、建立新理论给予肯定的解决；有些问题是通过反面的事例给予否定的答案。用例题给予新概念以可靠的基础也有重要意义。因此，在点集拓扑理论中，例题往往占有重要地位，不得忽视。为了帮助读者加深理解拓扑知识，熟练地运用拓扑的观点和方法去解决实际问题，本书在每节后边都配有大量的习题。

本书可作为高等院校数学系高年级学生的必修课讲义，也可供数学工作者参考。其中楷体部分初学者可略去不读。

本书的编写承蒙我的老师张德馨教授、吴莲溪教授给予很大的鼓励和支持。吴莲溪教授和许凤同志认真地审阅了本书原稿，提出许多有益的修改意见，特此致谢。

由于水平所限，错误和不妥之处，请批评指正。

方 嘉 琳

1981. 1



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

# 目　录

# 预　章　集合论概要

## (outline of the theory of sets)

集合的概念是现代数学最基本的概念，它的观点和方法已渗透到数学的所有分支。为了本书的需要，本章将概括地介绍有关集合的基本概念、必要的定理和表示方法。

## §1　集合及其运算

### (sets and operations on sets)

凡是具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体就是一个集合，或简称为集(set)。通常用 $A$、$B$、$C$、$M$、$N$、$X$、$Y$…等大写字母表示。

设 $A$ 是一个集合，构成集合 $A$ 的事物 $a$ 称为 $A$ 的元素(element)，通常用 $a$、$b$、$c$、$m$、$n$、$x$、$y$…等小写字母表示。

当 $a$ 是 $A$ 的一个元素时，常称为 $a$ 属于(belong) $A$，或 $A$ 含有(contain) $a$。应用 G.Peano 记号，记作

$$a\in A \quad 或 \quad A\ni a.$$

若 $a$ 不是 $A$ 的元素，则称 $a$ 不属于 $A$ 或 $A$ 不含有 $a$，记作

$$a\ \overline{\in} A,\ a\notin A \quad 或 \quad A\not\ni a.$$

集合也称为类(class)，族(family)，丛(collection)，系(system)，汇集(aggregate)；元素也称为元，成分(member)，点(point)。为了标明集合的特征，常在符号上明确标出元素的特性。而以

$$\{x : x 具有性质 P\}$$

或

$$\{x \mid x具有性质P\}$$

表示。当集合仅由有限个元素构成时，也可具体写出，如用$\{a,b,c\}$表示由 $a,b,c$ 三个元素构成的集合。

不含任何元素的集合称为空集 (empty set)，记作$\phi$。

当且仅当集合$A$的元素都属于集合$B$时，称集合$A$为集合$B$的子集 (subset)，或者说集合$B$包含 (contain) 集合$A$，或者说集合$A$被集合$B$包含(contained)。记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

当集合$A$不是集合$B$的子集时，通常记作

$$A \not\subset B \quad 或 \quad B \not\supset A.$$

当且仅当$A \supset B$且$B \supset A$时，称集合$A$与集合$B$相等 (equal)，记作

$$A = B.$$

当且仅当$A \supset B$且$A \neq B$时，称集合$B$是集合$A$的真子集 (proper subset)。

关于包含关系有下列性质：

a．$\phi \subset A$；

b．$x \in A \Longleftrightarrow \{x\} \subset A$ （$\Longleftrightarrow$表示充要条件）；

c．若$A \subset B$且$B \subset C$，则$A \subset C$。

由集合$A$与集合$B$的一切元素组成的集合，叫作集合$A$与集合$B$的并集(union)，记作

$$A \cup B.$$

即：$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A$或$x \in B$。

由集合$A$与集合$B$的公共元素组成的集合，叫作$A$与$B$的交集(intersection)，记作

$$A \cap B.$$

即：$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$且$x \in B$。

**定理1** 下列诸运算律成立：

a. **交换律**(commutative law)：

$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

b. **结合律**(associative law)：

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

c. **分配律**(distributive law)：

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

d. **幂等律**(idempotent law)：

$A\cup A=A\cap A=A$；

e. **吸收律**(absorption law)：

$A\cup(B\cap A)=A\cap(B\cup A)=A$.

集合$E$的所有子集构成的集合，称为$E$的**幂集**(power set)，记作$\mathfrak{P}(E)$。即：

$$\mathfrak{P}(E)=\{A:A\subset E\}$$

显然，$\phi\in\mathfrak{P}(E)$，$E\in\mathfrak{P}(E)$，$x\in E\Longleftrightarrow\{x\}\in\mathfrak{P}(E)$。$\mathfrak{P}(E)$的子集称为**集族** (family of sets)。对于$A\in\mathfrak{P}(E)$，满足条件

$$A\cup B=E,\quad A\cap B=\phi$$

的集合$B$称为集合$A$关于$E$的**补集**(complement set)，或简称为$A$的补集，记作

$$B=\mathscr{C}_E(A)\quad 或\quad B=\mathscr{C}(A).$$

集合$A$的元素但非集合$B$的元素的全体称为$A$与$B$的**差集**(difference set)，记作

$$A\backslash B\quad 或\quad A-B.$$

**定理 2** (de Morgan公式)对偶原理(duality principle)

$$\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B,\ \mathscr{C}(A\cap B)=\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B.$$

**定理 3** 下列关系成立.

$$\mathscr{C}(\mathscr{C}(A))=A;\ \mathscr{C}(\phi)=E;\ \mathscr{C}(E)=\phi.$$

设$D$是一个集，$\mathfrak{M}$是一个集族．若对于$D$的任一元素$\alpha$，在$\mathfrak{M}$中有且仅有一个集 $A_\alpha$ 与之对应，而且$\mathfrak{M}$的每个集都对应$D$的某个元素，称$\mathfrak{M}=\{A_\alpha: \alpha\in D\}$为以$D$为**指标集**(index set)的集族．

关于并、交运算，自然可以推广到集族上．

$$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x:\text{有 }\alpha\in D,\text{ 使 }x\in A_\alpha\}.$$

$$\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x:\text{对所有 }\alpha\in D,\text{ 均有 }x\in A_\alpha\}.$$

**定理 4**　设$\{A_\alpha: \alpha\in D\}$为集族，$C$为任一集，则

a．若对每个$\alpha\in D$,有$A_\alpha\subset C$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\subset C$.

b．若对每个$\alpha\in D$，有 $A_\alpha\supset C$，则$\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\supset C$．

**定理 5**　设$\{A_\alpha: \alpha\in D\}$为集族，$B$为任一集，则

a．$B\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(B\cap A_\alpha)$;

b．$B\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(B\cup A_\alpha)$．

**定理 6**　(de Morgan公式)对偶原理．

a．$\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in D}\mathscr{C}(A_\alpha)$;

b．$\mathscr{C}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in D}\mathscr{C}(A_\alpha)$．

当$\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\supset C$ 时，称为集族 $\{A_\alpha: \alpha\in D\}$ 是$C$的**覆盖**(covering)．若$\{A_\alpha\}$，$\{B_\beta\}$ 都是$C$的覆盖，且$\{A_\alpha\}\subset\{B_\beta\}$，则称$\{A_\alpha\}$是$\{B_\beta\}$的**子覆盖**(subcovering)．若$\{A_\alpha\}$是有限集，则称为**有限子覆盖**(finite subcovering)．

若集合构成的序列$\{A_n: n\text{为自然数}\}$，满足

$$A_n\subset A_{n+1}\,(A_n\supset A_{n+1}),\ n=1,\ 2,\cdots\cdots$$

则称为**单调增加(减少)集列**(monotone increasing(decreasing))，



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

或递增(减)集列.统称之为**单调集列**(monotone set sequence).

设$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$为集族,若对于任意$\alpha, \alpha' \in D, \alpha \neq \alpha'$,恒有$A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \phi$时,则集族$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$称为**两两不相交**(disjoint)的,而$A = \bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha$称为集族$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$的**直并**(direct union),记作$A = \sum_{\alpha \in D} A_\alpha$. 集族$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$称为$A$的**直并分解** (direct union decomposition),而各$A_\alpha$称为$A$的**直并因子**(direct union factor).

任意两个对象$a$, $b$确定一个对象$c = (a, b)$称为**序对**(ordered pair).

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2.$$

若$c = (a, b)$,则称$a$为$c$的**第一坐标** (first coordinate),而$b$称为$c$的**第二坐标**(second coordinate).

设$A$、$B$为任意二集,所有序对的集

$$\{(a, b): a \in A, \ b \in B\}$$

称为集$A$与集$B$的**直积**(direct product),记作$A \times B$.

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为$n$个集,任取$a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$,做元素$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,则

$$A = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n): a_i \in A_i, \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的**直积**(direct product),记作

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

而各$A_i$称为$A$的**坐标空间**(coordinate space).

例如$n$维 Euclid 空间就是$n$个实直线的直积.

## 【习　　题】

1. 试证下列诸条件是等价的:

a. $A \subset B$;

b．$A \cap B = A$；

c．$A \cup B = B$；

d．$A \cap \mathscr{C}B = \phi$；

e．$\mathscr{C}(A) \cup B = E$；

f．$A \setminus B = \phi$．

2．设$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$，$\{B_\beta: \beta \in E\}$为二集族．试证

a．$$\left(\bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in E} B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in D \times E} (A_\alpha \cap B_\beta);$$

b．$$\left(\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcap_{\beta \in E} B_\beta\right) = \bigcap_{(\alpha, \beta) \in D \times E} (A_\alpha \cup B_\beta).$$

3．设$\{A_{\alpha\beta}: (\alpha, \beta) \in D \times E\}$为集族，试证

a．$$\bigcup_{(\alpha, \beta) \in D \times E} A_{\alpha\beta} = \bigcup_{\alpha \in D}\left(\bigcup_{\beta \in E} A_{\alpha\beta}\right);$$

b．$$\bigcap_{(\alpha, \beta) \in D \times E} A_{\alpha\beta} = \bigcap_{\alpha \in D}\left(\bigcap_{\beta \in E} A_{\alpha\beta}\right).$$

4．设 $f(x)$ 为点集$E$上的实值函数，则

$$\{x: f(x) = a\} = \bigcap_{n \in N}\left\{x: a \leqslant f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}.$$

5．设 $\{A_n: n \in N\}$ 是集列，作$B_1 = A_1$，$B_n = A_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$，$(n>1)$，试证 $\{B_n: n \in N\}$ 是一列两两不相交的集，而且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

6．设$\{A_i: 1 \leqslant i \leqslant n\}$是有限集族，对于自然数集$N$的区间$[1, n]$的任意子集$H$，令

$$P_H = \bigcup_{i \in H} A_i, \quad Q_H = \bigcap_{i \in H} A_i.$$

再令$T_K$是$[1, n]$中取$K$个元素的所有子集的族，试证

$$\bigcup_{H \in T_k} Q_H \supset \bigcap_{H \in T_k} P_H \quad (\text{若 } 2k \leqslant n + 1),$$

$$\bigcup_{H\in T_k} Q_H \subset \bigcap_{H\in T_k} P_H \quad (若\ 2k \geqslant n+1).$$

7．若$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$为$A$的直并分解；而$\{A_{\alpha\beta}: \beta \in D_\alpha\}$为$A_\alpha$的直并分解，则$\{A_{\alpha\beta}: \alpha \in D,\ \beta \in D_\alpha\}$为$A$的直并分解．即：

$$若\ A=\sum_{\alpha\in D} A_\alpha,\quad A_\alpha=\sum_{\beta\in D_\alpha} A_{\alpha\beta},\quad 则\ A=\sum_{\alpha\in D}\sum_{\beta\in D_\alpha} A_{\alpha\beta}.$$

8．设 $A_1$，$A_2 \in \mathfrak{P}(E_1)$，$B_1$，$B_2 \in \mathfrak{P}(E_2)$，则$A_1\times B_1$，$A_2\times B_2 \in \mathfrak{P}(E_1\times E_2)$，且

a．$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$，

b．$\mathscr{C}(A_1\times B_1)=(\mathscr{C}A_1\times E_2)\cup(A_1\times\mathscr{C}B_1)$
$=(E_1\times\mathscr{C}B_1)\cup(\mathscr{C}A_1\times B_1)$．

## §2 关系与映射

## (relation and mapping)

数学的许多对象可以用集合和关系的语言予以简洁描述．集和关系的观念已成为刻画一些必要概念（诸如序、函数…）的基础．我们只讨论二元关系的概念和初等定理．

设$A$、$B$为二集，$R$为$A$与$B$间的关系．若$a\in A$和$b\in B$有这个关系，则说$a$与$b$有$R$关系(relation)，写作$(a, b)\in R$，或$a\,R\,b$．否则，若$a$和$b$没有$R$关系，则写作$(a,b)\notin R$，或$a\,\not R\,b$．

特别地，当$A=B$时，$R$称为A上的关系．

可见$R$是序对的集合，它是$A\times B$的子集．

如元素和集合的属于关系，集合间的包含关系，实数间的大小关系，整数间的同余关系，直线间的平行关系，平面图形的相似关系等都是相应集合间的二元关系．

集$\{x$：对某个$y$，$(x, y)\in R\}$称为关系$R$的定义域(domain)，记作$D_R$．而集$\{y$：对某个$x$，$(x, y)\in R\}$称为关系$R$

的值域(range)，记作$E_R$。

当且仅当$a$与$b$有$R$关系时，称$b$与$a$有$R^{-1}$关系，$R^{-1}$称为$R$的逆关系(inverse relation)。

显然$(a, b)\in R \Longleftrightarrow (b, a)\in R^{-1}$，$(R^{-1})^{-1}=R$。

设$R_1$为$A$与$B$间的关系，$R_2$为$B$与$C$间的关系，则

$\{(a, b)$：对某个$c$，$(a, c)\in R_1$，$(c, b)\in R_2\}$

为$A$与$C$间的关系称为$R_1$关系与$R_2$关系的复合(composition)，记作

$$R_2\circ R_1$$

显然$R_2\circ R_1$一般与$R_1\circ R_2$是不相等的。

**定理1** 设$R_1$、$R_2$、$R_3$为集$E$上的关系，则

a．$(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$，

b．$R_1\circ(R_2\circ R_3)=(R_1\circ R_2)\circ R_3$。

若$A\subset D_R$，令

$$R[A]=\{b:(a, b)\in R，对某个 a\in A\}，$$

$R[A]$称为关系$R$在$A$的象(image)。特别地，当$A=\{a\}$时$R[\{a\}]$常写作$R[a]$，称为关系$R$在$a$的纤维(fibre)。若$B\subset E_R$，令

$$R^{-1}[B]=\{a:对某个 b\in B，(a, b)\in R\}$$

$R^{-1}[B]$称为关系$R$在$B$的原象(inverse image)。特别地，当$B=\{b\}$时，$R^{-1}[\{b\}]$常写作$R^{-1}[b]$，称为关系$R$在$b$点的反纤维(inverse fibre)。

**定理2** 设$R$，$R_1$为集$E$的关系，$A$，$B$为$E$的子集，则

a．$R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$，

b．$R[A\cap B]\subset R[A]\cap R[B]$，

c．$(R\circ R_1)[A]=R[R_1[A]]$。

设$R$为集$E$的关系，若对任意$a\in E$，恒有$(a, a)\in R$，则称$R$为自反的(reflexive)。

对任意$a,b\in E$，当且仅当$(a,b)\in R$时，$(b,a)\in R$，

称$R$为**对称的**(symmetric)．

若$(a, b)\in R$，且$(b, a)\in R$，则$a=b$时，称$R$为**反对称的**(antisymmetric)．

若$(a, b)\in R$，则$(b, a)\notin R$时，称$R$为**非对称的**(asymmetric)．

若$(a, b)\in R$，$(b, c)\in R$，则$(a, c)\in R$时，称$R$为**可迁的**(transitive)．

关系$R$是自反的、对称的、可迁的时，称为**等价关系**(equivalence relation)，记作～．这是一种重要关系．

图形的合同、相似、全等，直线的平行，整数的同余等都是等价关系，而直线的垂直、实数的大小、点集的包含等都不是等价关系．

等价关系是同一集合的元素之间的关系，两不同的集合之间的关系不是等价关系．如点在直线上，元素属于集合等关系谈不上等价关系．

设$R$是集$E$的等价关系，令

$$R[a]=\{b : b\in E,\ (a, b)\in R\},$$

称之为由$a$确定的**$R$等价类** (equivalence class)，通常也记作$[a]_R$．

对于任意$a, b\in E$，必有$R[a]=R[b]$或$R[a]\cap R[b]=\phi$．

**定理3**　设$R$为集$E$的等价关系，则$E$是$R$等价类的直并．$R$等价类构成$E$的直并分解，且分解是唯一的．

$E$的$R$等价类构成的集常记作

$$E/\sim \text{ 或 } E/R,$$

称为$E$关于$R$的**商集**(quotient set)．

这种用等价关系进行分类的方法在现代数学中是常见的．

从数的大小、集的包含等关系中，可抽象出序的概念，序关系也是一种重要的关系．

集$E$中满足可迁的二元关系“$<$”称为**序关系** (ordering

relation)、**偏序关系**（partial ordering）或**拟序关系**（quasi ordering）.

集$E$的元素间建立了序关系“$<$”时，称$E$为**有序集**(ordered set)或**半序集**（semi—ordered set）或**偏序集**(partially ordered set)，记作$(E,<)$．$a<b$称为$a$小于$b$或$a$前于$b$．亦可称为$b$大于$a$或$b$后于$a$．

在有序集$(E,<)$中，规定

$$a\leqslant b \Longleftrightarrow a<b\text{，或 } a=b.$$

则关系$\leqslant$亦是可迁的．

设$A$为有序集$E$的子集，若有$a\in E$，对于$A$的任一元素$x$，恒有$x\leqslant a$，则称$a$为$A$的**上界**（upper bound）．有上界的集称为**上方有界**（bounded to the above)的．相应的可以定义**下界**(lower bound)及**下方有界**(bounded to the below）的概念．当上、下方都有界时称为**有界集**(bounded set)．

当$a$是$A$的元素且是$A$的上界时，称$a$为$A$的**最大元**(maximum)或**最后元素**，记作$\max A$．相应的有**最小元**（minimum)或**最前元素**的概念，记作$\min A$．在$A$的上界集中若有最小元，称为$A$的**最小上界**(least upper bound)或**上确界**(supremum)，记作$\sup A$．相应的有**最大下界**(greatest lower bound)或**下确界**(infimum)的概念，记作$\inf A$．

集$A$的元素$a$，若对任何$x\in A$，$a<x$都不成立时，$a$称为$A$的**极大元**(maxima)．相应的有**极小元**(minima)的概念．

若有序集$(E,<)$满足

a．反对称性：若$a<b$且$b<a$，则$a=b$．

b．可比性：若$a$，$b\in E$，则必有$a<b$或$b<a$成立．

则称$<$为$E$的**线性序**（linear order）关系，**全序**(total order, complete order)关系，或**单序**(simply order)关系，而$E$称为**全序集**(totally ordered set)或**线性序集**(linearly ordered set)．

有序集$E$的子集$A$关于$E$的序也是有序集，称$A$为$E$的序



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com