応用力学演習

武蔵工業大学助教授　星谷　勝
武蔵工業大学講師　千葉　利晃
共著

まえがき

応用力学を十分に使いこなし，実際の構造工学の問題解決に適用できるようになるためには第1にその基本的な考え方を理解していることが要求される。

このためには応用力学の諸定理を学ぶだけでなく，多くの問題を解くことによって，さらに理解を深めることができるのである。

本書は土木，建築専攻の学生を対象にして応用力学演習問題をまとめたものである。各問題の解答はできるだけ詳細にわたって解説したつもりである。

応用力学演習の教科書として，または不足問題をおぎなうための自習書として本書を使用していただければ幸いである。

昭和52年11月

武蔵工業大学助教授　星谷　勝
武蔵工業大学講　師　千葉利晃

目　次

4. はりのたわみ

5. 不静定ばり

6. ト ラ ス

7. ラーメン

8. エネルギー法

9. 柱

1. 軸力，せん断力および曲げモーメント

1.1 概　説

構造物は一般に，種々の荷重を外部から受ける。外荷重によって加えられる力は，構造内部を伝わって，構造物を支えている基礎に伝達される。この構造要素内部を伝わる力を**内力**という。内力は構造物に外部から作用する荷重に抵抗しようとする構造物内部の抵抗力でもある。この内力により，構造物は変形する。すなわち，構造物に関与する力は，構造物に外部から作用する荷重や反力などの**外力**と，構造物の内部に生じる**内力**との二つに分けられる。

応用力学の主な目的は，荷重を受ける構造要素の内力（内部抵抗力）と，変形を考えることである。すなわち，構造物を設計することは，この内力と変形の大きさを求め，これらに十分抵抗できうる構造要素の形状および寸法を決定することにほかならない。

応用力学を学ぶ上で最も大切な，つり合い方程式と切断法について，以下簡単に述べておく。

〔つり合い方程式〕

物体が安定した静止状態にある場合，その物体に作用する力は静的につり合っているはずである。すなわち，3次元直交座標系において，物体に作用する x, y, z 方向の分力の和が0であり，かつ x, y, z 方向に平行な任意の軸に関するすべての力のモーメントの和が0でなければならない。これを式で表わすと次の**つり合い方程式**を得る。

$$\sum F_x=0 \qquad \sum M_x=0$$
$$\sum F_y=0 \qquad \sum M_y=0 \qquad (1.1)$$
$$\sum F_z=0 \qquad \sum M_z=0$$

構造系が平面（2次元）でモデル化されている場合には，水平，垂直方向の分力の和が0であり，その面に垂直な軸のまわりのモーメントの和も0であればよい。水平方向力を H，垂直方向力を V，モーメントを M とすれば，

$$\sum H=0$$
$$\sum V=0 \qquad (1.2)$$
$$\sum M=0$$

本書では，主に平面問題を扱うので，(1.2) 式を満足すればよい。(1.1) 式あるいは (1.2) 式だけでは部材に作用している力を求めることができないもの（不静定構造物）については，5章で述べる。

〔切　断　法〕

先に述べたように，外部から加えられる力の作用と，その外力とつり合うために物体の内部に生じる力（内力）の性質を検討する必要がある。この目的のために，すなわち，外力により生じる内力を決定するために，物体のある断面を切断して考えるのが切断法である。

図1.1(a)に示すつり合い方程式を満足する物体を考えよう。いま仮りに，m-n 断面でこの物体を切断したものとする。もし物体が全体としてつり合い状態にあるとすると，この物体のどの部分もまた，つり合い状態にあるはずである。すなわち，(b)，(c)図に示す物体もまたつり合い状態にあり，元の位置に静止していなければならない。もし切断面上に力が作用していないものとすると，m-n 断面を境にして，二つの物体は離れてしまうだろう。したがって，(b)，(c)図に示すように，切断面上になんらかの力が作用していてつり合っているものと考えるのである。この切断面上の力を内力と呼んだのである。この切断面上の力（一般に，軸力，せん断力，曲げモーメント）は，(b)または(c)図のみの

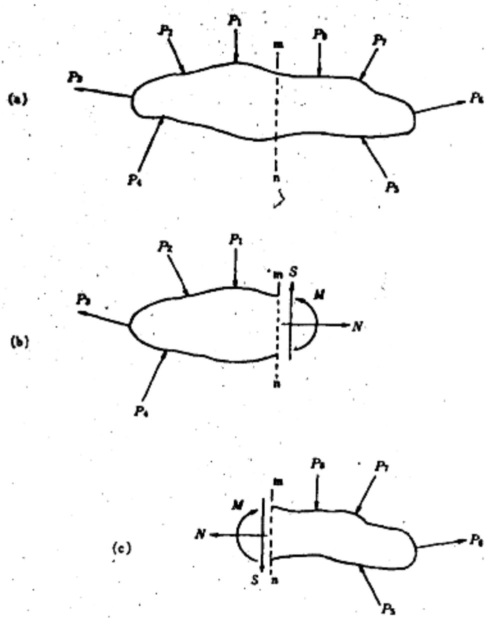


図1.1

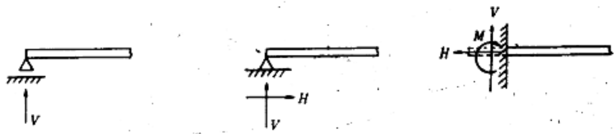
つり合い方程式より求めることができる。当然ながら，(b)図で求めた内力と，(c)図で求めた内力は，大きさが等しく向きが反対な力である。

1.2 はりの反力および種類

真直な棒を水平に支え，その軸線に垂直な方向から荷重を作用させると，棒は曲がる。この現象を**曲げ** (bending) といい，その棒を**はり** (beam) と呼ぶ。

はりの支持方法には，大別して図 1.2 に示すような 3 種類の方法がある。それぞれの支持方法による反力も図中に示してある。

はりに作用する荷重には，図 1.3 に示すような，**集中荷重**，**分布荷重**，**モーメ**



(a)
ローラー支点
可動支点
反力：1

(b)
ピン支点
ヒンジ支点
反力：2

(c)
固定支点
埋込支点
反力：3

図 1.2

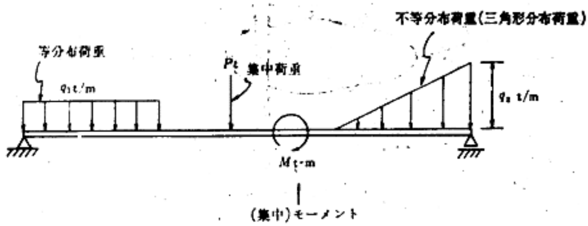


図 1.3

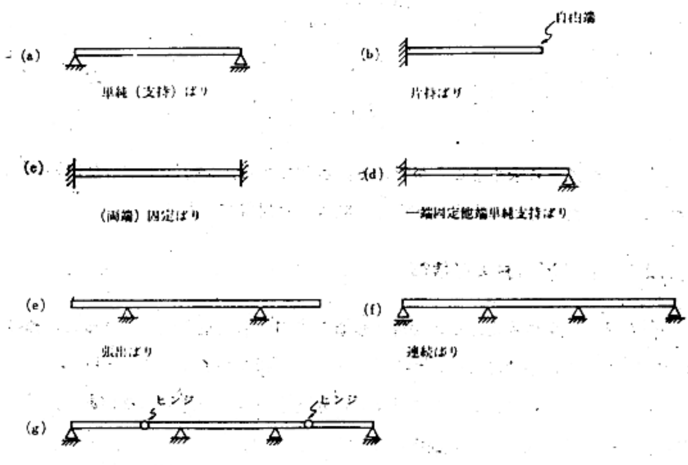


図 1.4

ントなどがある。分布荷重のうち，一様な大きさで分布するものを**等分布荷重**といい，一様でないものを**不等分布荷重**という。

はりは，主として支持方法により図1.4に示すような数種類に分けられる。

1.3 反力の計算

反力の計算を行なう場合，構造物の形状は重要でなく，構造物全体のつり合い条件式より求めることができる。

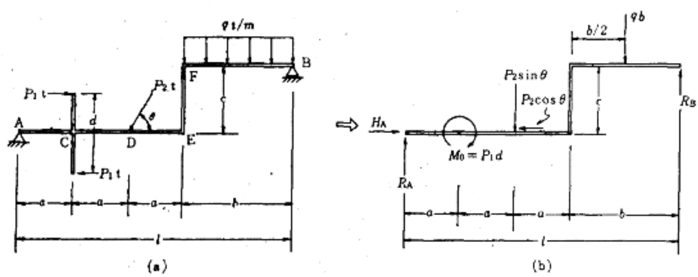


図1.5

図1.5(a)において，A点はピン支点であるから，反力は水平および垂直の二つ存在する。B点は移動支点であるから垂直方向の反力のみである。集中荷重は垂直および水平の二つの分力に分けて考える。等分布荷重は，全体の荷重が重心を通って作用する一つの集中荷重と考えればよい。これらをまとめて図示すれば図1.5(b)となる。この(b)図より，つり合い方程式をつくれば，

$$\oplus\rightarrow \quad \Sigma H = H_A - P_2 \cos\theta = 0 \tag{1.3}$$

$$\oplus\downarrow \quad \Sigma V = P_2 \sin\theta + qb - R_A - R_B = 0 \tag{1.4}$$

$$\oplus\circlearrowright \quad \Sigma M_A = M_0 + (P_2 \sin\theta)\cdot 2a + qb\cdot\left(3a + \frac{b}{2}\right) - R_B\cdot l = 0 \tag{1.5}$$

以上三つのつり合い方程式より反力 H_A, R_A, R_B が求まる。なお，反力 R_A は右端B点に関するモーメントのつり合いを考えることによっても直接求めること

ができる。すなわち，

$$\oplus \odot \quad \sum M_B = R_A \cdot l - H_A \cdot c + M_0 - P_2 \sin\theta \cdot (b+a) + P_2 \cos\theta \cdot c - qb \cdot \frac{b}{2} = 0 \qquad (1.6)$$

集中モーメント M_0 はモーメントのつり合い式の中にのみ現われ，水平および垂直方向のつり合い式の中には現われないことに注意すべきである。

1.4 はりのせん断力および曲げモーメント

一例として図 1.6 に示す単純ばりを考えよう。任意断面に働く断面力（内力）

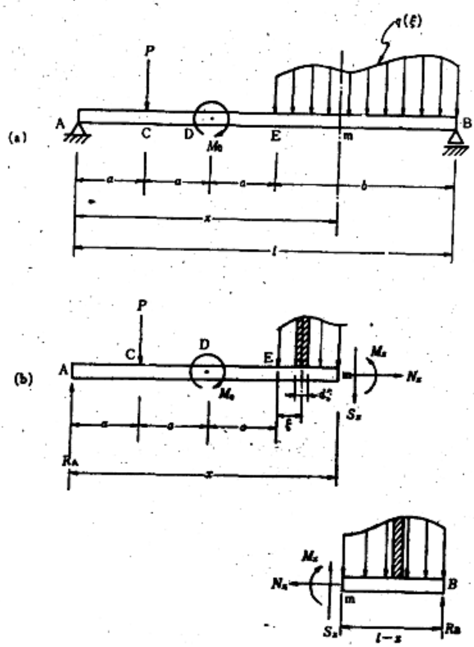


図 1.6

を求めるには，断面法を適用すればよい。いま，点 A から x の距離にある断面 m で 2 分したとする。断面 m には (b) あるいは (c) 図に示す断面力（軸力，せん断力，曲げモーメント）が作用しているものとする。断面力 N_x, S_x, M_x は，(b) あるいは (c) 図のつり合い条件より求めることができる。すなわち，(b) 図における左半分のつり合い式は，

$$\oplus\rightarrow \quad \sum H=N_x=0 \tag{1.7}$$

$$\oplus\downarrow \quad \sum V=-R_A+P+\int_0^{x-3a} q(\xi)d\xi+S_x=0 \tag{1.8}$$

$$\oplus\circlearrowright \quad \sum M_m=R_A\cdot x-P(x-a)+M_0-\int_0^{x-3a} q(\xi)(x-3a-\xi)d\xi-M_x=0 \tag{1.9}$$

(1.8)，(1.9) 式より S_x, M_x は，

$$S_x=R_A-P-\int_0^{x-3a} q(\xi)d\xi \tag{1.10}$$

$$M_x=R_Ax-P(x-a)+M_0-\int_0^{x-3a} q(\xi)(x-3a-\xi)d\xi \tag{1.11}$$

同様にして，(c) 図における右半分のつり合い式からも同じ大きさの断面力を求めることができる。

(1.10) 式より，断面 m に作用する力の垂直成分 S_x は，この断面の左側（(c) 図の場合は右側）の部分に作用する垂直成分の力の総和に等しいことがわかる。これを**せん断力** (shearing force) という。また，はりの各断面におけるせん断力の大きさを，その断面に対して表わした図を**せん断力図** (shearing force diagram, S. F. D.) という。ただし，せん断力の正負は図 1.7 に従うものとする。(1.11) 式より，M_x は断面 m の左側または右側の部分に作用する力の点 m に関するモーメントの総和に等しいことがわかる。これを**曲げモーメント** (bending moment) という。各断面における曲げモーメントの大きさを，その断面の位置に対して表わしたものを**曲げモーメント図** (bending moment diagram, B. M. D.) という。ただし曲げモーメントの正負は図 1.8 に従うものとする。

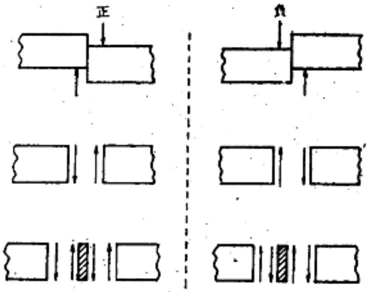


図 1.7　せん断力の符号

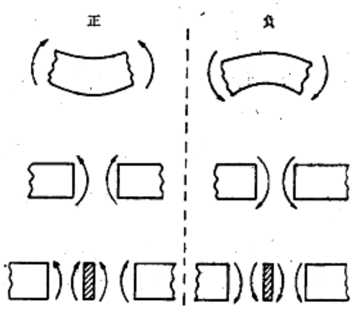


図 1.8　曲げモーメントの符号

1.5 荷重，せん断力および曲げモーメントの関係

図 1.9 に示すように，はりの左端から x の距離にある微小部分のつり合いを考える。この幅 dx の微小部分に (1.2) 式のつり合い方程式を適用すれば，

$$\sum V = -S + q dx + (S + dS) = 0 \tag{1.12}$$

$$\sum M = M + S dx - q dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \tag{1.13}$$

高次の微小項を省いて整理すると，

$$\frac{dS}{dx}=-q \qquad \frac{dM}{dx}=S \tag{1.14}$$

(1.14)式より，せん断力が0の断面で曲げモーメントは極大あるいは極小となることがわかる。なお，図1.9において dx 部分に集中荷重が作用する場合には，せん断力の急変が起こる。

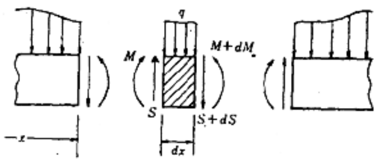


図1.9

1.6 移動荷重を受けるはり：影響線

単位の移動荷重の位置によって，支点反力，ある断面の曲げモーメントあるいはせん断力の大きさがどのように変わるかを示す線を**影響線** (influence line) という。すなわち，ある支点の支点反力の影響線とは，単位荷重が作用している位置にその単位荷重による支点反力の大きさを示した線図である。またある任意断面のせん断力あるいは曲げモーメントの影響線とは，単位荷重が作用している位置に，その単位荷重による，いま考えている断面のせん断力あるいは曲げモーメントの大きさを図示したものである。影響線は1.3，1.4節と同じ方法で求めることができるが，この場合，単位荷重が移動し，支点あるいは，ある任意断面は固定して考えていることに注意しなければならない。

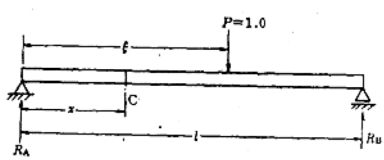


図1.10

図1.10において，断面Cにおけるせん断力 S_C は，単位荷重 P が断面C上にのるとき最大値 S_{max} となる。横軸に x，縦軸に S_{max} をとって描いた図を最大せん断力図という。

断面Cの曲げモーメント M_C も，単位荷重 P が断面C上にのるとき最大値 M_{max} となる。横軸に x，縦軸に M_{max} をとって描いた図を最大曲げモーメント図という。

問題と解法(1)

【問題1.1】

図1.11(a)に示す単純ばりのせん断力図，曲げモーメント図を描け。また最大曲げモ

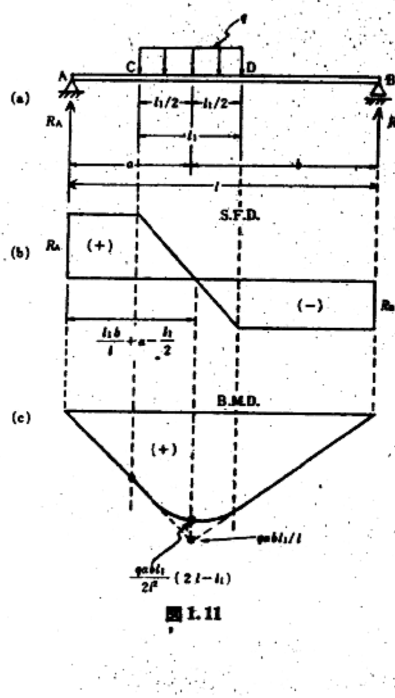


図1.11

ーメントの生ずる位置とその大きさを求めよ。

【解法】

A, B 支点の反力 R_A, R_B は,

$$\sum M_B = R_A l - q l_1 b = 0 \qquad \therefore R_A = q l_1 b / l$$

$$\sum M_A = -R_B l + q l_1 a = 0 \qquad \therefore R_B = q l_1 a / l$$

A 点より x の距離の断面の曲げモーメントおよびせん断力は,

$0 \leq x \leq a - \dfrac{l_1}{2}$ のとき

$$M_x = R_A x = q l_1 b x / l$$

$$S_x = dM_x/dx = R_A = q l_1 b / l$$

$a - \dfrac{l_1}{2} \leq x \leq a + \dfrac{l_1}{2}$ のとき

$$M_x = R_A x - q\left[x - \left(a - \frac{l_1}{2}\right)\right] \frac{x - \left(a - \dfrac{l_1}{2}\right)}{2} = \frac{q l_1 b}{l} x - \frac{q}{2}\left[x - \left(a - \frac{l_1}{2}\right)\right]^2 \qquad (1)$$

$$S_x = dM_x/dx = \frac{q l_1 b}{l} - q\left[x - \left(a - \frac{l_1}{2}\right)\right] \qquad (2)$$

$a + \dfrac{l_1}{2} \leq x \leq l$ のとき

$$M_x = R_B(l - x) = \frac{q l_1 a}{l}(l - x)$$

$$S_x = dM_x/dx = -\frac{q l_1 a}{l} = -R_B$$

以上の式より，せん断力図および曲げモーメント図を描くと図1.11(b),(c)のようになる。

最大曲げモーメントはせん断力が0になる断面に生ずる。AC, DB 間ではせん断力は 0 とならず，CD 間で0となる。したがって，(2)式より，

$$\frac{q l_1 b}{l} - q\left[x - \left(a - \frac{l_1}{2}\right)\right] = 0 \qquad \therefore x = \frac{l_1 b}{l} + a - \frac{l_1}{2}$$

この値を(1)式に代入すると最大曲げモーメント M_{max} が求まる。

$$M_{max} = \frac{q l_1 b}{l}\left(\frac{l_1 b}{l} + a - \frac{l_1}{2}\right) - \frac{q}{2}\left[\frac{l_1 b}{l} + a - \frac{l_1}{2} - \left(a - \frac{l_1}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{q l_1 a b}{2 l^2}(2l - l_1)$$

【問題 1.2】

図 1.12(a) に示す単純ばりのせん断力図および曲げモーメント図を描け。

【解法】

A 点の反力 R_A は B 支点のまわりのモーメントのつり合いより，

$$\sum M_B = R_A \cdot l + M_0 = 0 \qquad \therefore R_A = -M_0/l$$

B 点の反力 R_B は同様にして，

$$\sum M_A = -R_B \cdot l + M_0 = 0 \qquad \therefore R_B = M_0/l$$

A 支点より x の距離の断面の曲げモーメントおよびせん断力は，

AC 間 $(0 \leq x \leq a)$ では，

$$M_x = R_A x = -M_0 x/l$$

$$S_x = R_A = -M_0/l$$

CB 間 $(a \leq x \leq l)$ では，

$$M_x = R_B(l-x) = M_0(l-x)/l$$

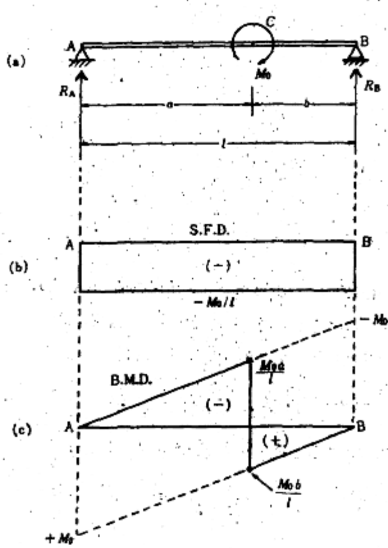


図 1.12