实变函数

胡长松 主编

科学出版社
www.sciencep.com

实 变 函 数

胡长松 主 编
李必文 金国祥 宋述刚 副主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书的基本内容是根据1990年11月在南京大学召开的"实变函数"教材编写大纲讨论会的精神编写的，考虑到新世纪的要求编写了用*表示的内容，以供选择.本书分为集合与映射、点集、测度论、可测函数、积分论共五章.每节末配有习题，书后有习题详解.

本书写得细致，论证严谨，语言通俗.基本概念的引入注意到了产生概念的背景，来龙去脉交待得比较清楚.本书的特点是：既注意基本理论的科学性，又充分考虑教材的师范性；既保持实变函数理论的完整性，又力求做到深入浅出，循序渐进；既着重经典内容，又适当介绍抽象积分.

本书可作为师范院校、综合大学数学系的教材或参考书，也可作为本科数学专业成人函授教材或自学者用书.

实 变 函 数

胡长松 主编

李必文 金国祥 宋述刚 副主编

责任编辑 李建峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

湖北省京山金美印刷有限责任公司印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2002年11月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2002年11月第一次印刷 印张：6 1/2

印数：1—6 000 字数：167 000

ISBN 7-03-010586-9

定价：13.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　言

实变函数是高等师范院校数学专业的一门重要基础课程，它的任务是使学生掌握近代抽象分析的基本思想，提高抽象思维和数学表述能力，加深对数学分析知识的理解，并为进一步学习现代数学理论作必要的准备。

本书是根据 1990 年 11 月在南京大学召开的“实变函数论”教材编写大纲讨论会的精神，吸取目前各通用教材之长，在我们多年反复修改的讲义基础上编写的。全书共五章，每节后面配有练习。用星号“*”标出的内容可供教师教学时选用或学生课外阅读，这些带星号“*”的内容在书中是独立的，在教学中即便不讲也不影响教材内容的衔接和系统性。本书适用于师范院校，成人本科函授数学专业。

目　录

第一章　集合与映射

由德国数学家 Cantor 所创立的集合论，是现代数学中一个独立的分支，按其本性而言，集合论是整个现代数学的逻辑基础；而就其发展历史而言，则与近代分析(包括实变函数论)的发展密切相关，实变函数通常是第一门大量运用集合论知识的大学数学课程. 因此，在现代数学教育中，对集合论知识的较系统的介绍，通常构成实变函数教材的第一章. 不过，对于实变函数论来说，集合论毕竟只是一个辅助工具，因此，本章仅介绍哪些必不可少的集论知识.

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念及其表示

集合也称作集，是数学中所谓原始概念之一，即不能用别的概念加以定义，它像几何学中的“点”、“直线”那样，只能用一组公理去刻画. 就目前来说，我们只要求掌握以下朴素的说法：

“在一定范围内的个体事物的全体，当将它们看作一个整体时，我们把这个整体称为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素.”

一个集合的元素必须彼此互异，而且哪些事物是给定集合的元素必须明确. 以集合作为元素的集合，也常称为集族或集类.

以后常用大写字母 $A,B,C,D,X,Y,Z,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记作 $a\in A$，或说 A 含有 a.

如果 a 不是集 A 的元素，则说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in}A$(或 $a\notin$

A)，或说 A 不含有 a.

有些集合可用列举其元素的办法来表示，如：

只含有一个元素 a 的集合称为单元素集或独点集，可表示为 $\{a\}$.

由 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的集合，可表示为 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

由全体自然数所组成的集合称为自然数集，可表示为 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

当集 A 是具有某性质 P 的元素之全体时，我们用下面的形式表示 A：

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，方程 $x^2-1=0$ 的解 x 的全体组成的数集是

$$\{x\mid x^2-1=0\}\text{，实际上就是}\{1,-1\}.$$

有时我们也把集 $\{x\mid x\in E, x\text{ 具有性质 }P\}$ 改写成 $E[x\text{ 具有性质 }P]$. 例如，设 $f(x)$ 是定义在集合 E 上的一实函数，a 是一个实数，我们把集 $\{x\mid x\in E, f(x)>a\}$ 写成 $E[f(x)>a]$ 或 $E[f>a]$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

设 A,B 是两个集，若 A 和 B 的元素完全相同，就称 A 和 B 相等，记作 $A=B$(或 $B=A$).

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就称为 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$)，读作 A 包含于 B(或 B 包含 A).

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，就称 A 是 B 的真子集，规定空集是任何集的子集.

由集的“相等”与“包含”的定义可得如下定理：

定理 1.1.1 对任何集合 A,B,C，均有

(1) $A\subset A$;

(2) 若 $A\subset B, B\subset C$，则 $A\subset C$;

(3) $A=B\Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$.

1.1.2 集合的运算

设 A,B 是两个集合,集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

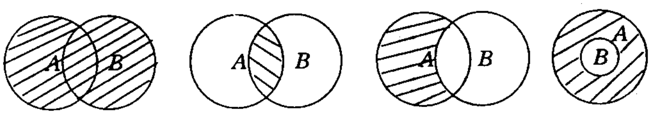
称为 A 与 B 的并集或并,记作 $A \cup B$. 集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

称为 A 与 B 的交集或交,记作 $A \cap B$,特别地,若 $A \cap B = \varnothing$,称 A 与 B 不相交;反之,则称 A 与 B 相交. 集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 但 } x \overline{\in} B\}$$

称为 A 减 B 的差集或差,记作 $A-B$(或 $A \setminus B$),当 $B \subset A$ 时,称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的余集记作($\mathscr{C}_A B$).



(a) $A \cup B$　　(b) $A \cap B$　　(c) $A-B$　　(d) $\mathscr{C}_A B$

当我们研究一个问题时,如果所讨论的集合都是某个固定集 A 的子集时,就称 A 为基本集或全集,并把 A 的子集 B 关于 A 的余集 $\mathscr{C}_A B$ 简称为 B 的余集,记为 B^C 或 $\mathscr{C} B$.

并集与交集的概念可以推广到任意个集的情形,设 Γ 为一非空集合,并且对每一个 $\alpha \in \Gamma$,指定了一个集合 A_α,此时我们称 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 是以 Γ 为指标集的集族,集族 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \exists\ \alpha \in \Gamma, \text{使 } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \forall\ \alpha \in \Gamma, \text{有 } x \in A_\alpha\}.$$

例 1　若 $A_i = \{i\}, i = 1,2,3,\cdots$,则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1,2,\cdots,n\}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

例 2　设 $\Gamma = [0,1]$,$\forall\ \alpha \in \Gamma$,令 $A_\alpha = \left(\alpha - \dfrac{1}{2}, \alpha + \dfrac{1}{2}\right)$,则

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in[0,1]}\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)=\varnothing.$$

关于集合的并和交显然有下面的性质：

定理 1.1.2 对任何集合 A,B,C，恒有

1) $A\cup A=A, A\cap A=A$ （并，交的幂等性）；

2) $A\cup\varnothing=A$ （空集是加法的零元）；

3) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$ （并，交的交换律）；

4) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ （并的结合律），
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ （交的结合律）；

5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （交对并的分配律），
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （并对交的分配律）.

推论 1.1.3 对任意集 A 和集族 $\{B_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$，有

1) $A\cap(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$；

2) $A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$.

证明 只证 2)式，1)的证明留作习题，设 $x\in A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)$，则 $x\in A$ 或 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$. 从而$\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $x\in A\cup B_\alpha$，即 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$. 所以 $A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$.

反之，设 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$，则$\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $x\in A\cup B_\alpha$. 因此，$x\in A$ 或 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，即 $x\in A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)$. 这证明了 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)\subset A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)$. 由所得两方面的结果，据定理 1.1.1 便知等式成立，证毕.

定理 1.1.4 对于任意集族 $\{A_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$，$\{B_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$及集 C，有

1) $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset A_{\alpha'}\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha,\forall\ \alpha'\in\Gamma$；

2) 若$\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $A_\alpha\subset C$，则$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset C$；

3) 若$\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $A_\alpha\supset C$，则$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\supset C$；

4) $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cup B_\alpha)=(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)$；

5) $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cap B_\alpha)=(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)$.

上述结果显然，证明从略.

“减”法和求余运算具有以下性质：

定理 1.1.5 设 X 为全集，A，B 及 $A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 均为 X 的子集，则有

1) $X^C=\varnothing$，$\varnothing^C=X$；

2) $A\cup A^C=X$，$A\cap A^C=\varnothing$；

3) $(A^C)^C=A$；

4) $A\subset B\Leftrightarrow A^C\supset B^C$；

5) $A-B=A\cap B^C$；

6) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$，

更一般地有

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^C=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C, \tag{1.1.1}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^C=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C; \tag{1.1.2}$$

6) 常称为笛摩根(De Morgan)法则，它提供一种对偶方法，能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的余集上去，此法则也称为对偶原理.

证明 我们只证式(1.1.1)及(1.1.2).

设 $x\in(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^C$，则 $x\in X$，且 $x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$. 所以，$\forall\ \alpha\in\Gamma$，$x\in A_\alpha^C$，即 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C$. 这证明了$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^C\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C$.

反之，设 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C$，则$\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $x\in A_\alpha^C=X-A_\alpha$. 所以，$x\in X-\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^C$. 这证明了$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C\subset(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^C$，据定理 1.1.1，就得到式(1.1.1).

对(1.1.1)式两端取余集，得$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C)^C$. 再把 A_α 换成 A_α^C，即得(1.1.2)式，证毕.

定理 1.1.6 对任意集合 A，B，C，有

1) $A\subset B\Leftrightarrow A-B=\varnothing$；

2) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$(“减法”分配律)；

3) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$；

4) $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$，

其中，$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$称为集 A 和集 B 的对称差.

证明 以 3)为例，设 A,B,C 都是全集 X 的子集，由定理 1.1.5 的 5)有

$$\begin{aligned}(A-B)-C&=(A\cap B^C)\cap C^C=A\cap(B^C\cap C^C)\\&=A\cap(B\cup C)^C=A-(B\cup C).\end{aligned}$$ 证毕.

1.1.3 集列极限

对任意集列$\{A_n\}$，其上限集和下限集分别定义为

$\overline{\lim_n}A_n=\lim_n\sup A_n=\{x\mid x$ 属于无限多个集 $A_n\}$，

$\underline{\lim_n}A_n=\lim_n\inf A_n=\{x\mid\exists\ n_0=n_0(x)\in N$，使 $x\in A_{n_0+k},k=0,1,2,\cdots\}$.

显然，$\underline{\lim_n}A_n\subset\overline{\lim_n}A_n$，当$\underline{\lim_n}A_n=\overline{\lim_n}A_n=A$ 时，则称集列$\{A_n\}$收敛于 A，把 A 叫做$\{A_n\}$的极限集，记作 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

从上限集与下限集的定义可得出以下两个表达式：

$$\lim_n\sup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m,\tag{1.1.3}$$

$$\lim_n\inf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m.\tag{1.1.4}$$

现证(1.1.4)式，记 $P=\lim\limits_n\inf A_n,Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，设 $x\in P$，则$\exists\ n_0\in\mathrm{N}$，使 $x\in A_{n_0+k},k=0,1,2,\cdots$，即 $x\in\bigcap\limits_{m=n_0}^{\infty}A_m$. 所以 $x\in Q$. 反之，设 $x\in Q$，则$\exists\ n_0\in\mathrm{N}$，使 $x\in\bigcap\limits_{m=n_0}^{\infty}A_m$. 所以 $x\in A_{n_0+k},k=0,1,\cdots$，即 $x\in P$. 由定理 1.1.1，$P=Q$. 故(1.1.4)式成立.

类似可证(1.1.3)式.

由定理 1.1.5 的 5)和对偶原理可得如下结果：

定理 1.1.7 对任意集列$\{A_n\}$及集合 S，有

1) $S-\underline{\lim_n}A_n=\overline{\lim_n}(S-A_n)$；

2) $S-\overline{\lim_n}A_n=\underline{\lim_n}(S-A_n)$.

如果集列$\{A_n\}$满足 $A_n\subset A_{n+1}(A_n\supset A_{n+1}),n=1,2,3,\cdots$，则称

$\{A_n\}$为单调增加(减少)集列. 单调增加与单调减少的集列统称为单调集列. 容易证明:单调集列是收敛的,如果$\{A_n\}$单调增加,则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,如果$\{A_n\}$单调减少,则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 请读者自证.

1.1.4 集的特征函数

设 X 是一个固定的非空集,A 是 X 的一个子集,作 X 上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\in X-A,\end{cases}$$

称 $\chi_A(x)$为集 A 的特征函数.

显然,子集 A 完全由它的特征函数所确定,即 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$ $\Leftrightarrow A=B$.

特征函数与集之间有下面一些常见的关系:

定理 1.1.8 设 X 是一个固定的非空集,$A,B,A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$, $A_n(n=1,2,\cdots,)$都是 X 的子集,则有

1) $A=X\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv1$; $A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv0$;

2) $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$,

$A=B\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$;

3) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$,

$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$;

4) $\chi_{\overline{\lim\limits_n}A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$,

$\chi_{\underline{\lim\limits_n}A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$;

5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在,而且当极限存在时,$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$.

证明留作习题.

习题 1.1

1. 证明定理 1.1.2 的 4),5)以及推论 1.1.3 的 1).

2. 证明定理 1.1.4 的 4)和 5).

3. 证明定理 1.1.5 的 4),5).

4. 证明定理 1.1.6 的 2),4).

5. 证明定理 1.1.8 的 3),4).

6. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合,作 $B_1=A_1, B_n=A_n-\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}A_i\right), n>1$. 证明 B_n 是一列互不相交的集,而且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i, n=1,2,3\cdots$.

7. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\frac{1}{n}\right), A_{2n}=(0,n), n=1,2,\cdots$,求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

§1.2 映射与基数

1.2.1 映射

如果我们把数学分析中函数的定义域与值域均换成一般的非空集合,就得到下面的概念.

定义 1.2.1 设 A,B 是两个非空集合. 如果按照某个确定的法则 f,使对每个 $x\in A$,在 B 中都有唯一确定的元素 y 与 x 对应,记为

$$f:x\mapsto y,$$

则称 f 是从 A 到 B(中)的映射(或映照),元素 y 称为元素 x 在 f 下的象,记为 $y=f(x)$ 或 $y=fx$. 集 A 称为 f 的定义域,记为 $\mathscr{D}(f)$. 当 $C\subset A$ 时,称集合 $\{f(x)\mid x\in C\}$ 为集 C 在 f 下的象,记为 $f(C)$ 或 fC,并称 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 为 f 的值域,也记为 $\mathscr{R}(f)$. 对每个 $y\in B$,称集合 $\{x\mid x\in A, f(x)=y\}$ 为 y 在 f 之下的原象,记为 $f^{-1}(y)$. 当 $D\subset B$ 时,称集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $f(x)\in D\}$ 为集 D 在 f 之下的原象,记为 $f^{-1}(D)$. 为简便起见,通常把从 $\mathscr{D}(f)=A$ 到 $\mathscr{R}(f)\subset B$ 的映象,记为 $f:A\to B$,或 $A\xrightarrow{f}B$.

如果 $f(A)=B$,则称 f 是从 A 到 B 上的映射(或 A 到 B 的满射).

定义 1.2.2 设 $f:A\to C$，$g:B\to C$ 是两个映射. 如果 $A\subset B$，且 $\forall\ x\in A$，都有 $g(x)=f(x)$，则称 g 是 f 在 B 上的延拓，记为 $f\subset g$，也称 f 为 g 在 A 上的限制，记为 $f=g|_A$.

定义 1.2.3 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$ 是两个映射，$\forall\ x\in A$，令 $h:x\mapsto g(f(x))$. 则 h 是从 A 到 C 的映射，称为 f 与 g 的复合映射，记作 $h=g\circ f$.

定义 1.2.4 设 $f:A\to B$ 为一映射，若对每个 $y\in B$，$f^{-1}(y)$ 是单元素集或空集，则称 f 是 A 到 B 的可逆映射(或单射，或一一映射). 如果 f 是单射，且是满射，则称 f 为从 A 到 B 的双射(或 A 到 B 上的一一映射). 记作 $f:A\xrightarrow[1\text{-}1]{}B$ 或 $A\xrightarrow[1\text{-}1]{f}B$.

显然，如果 $f:A\to B$ 是单射，则 f 是从 A 到 $f(A)$ 的双射.

定义 1.2.5 设 $f:A\to B$ 是一一到上的映射. 对每个 $x\in A$，如果 $f:x\mapsto y$，令 $f^{-1}:y\mapsto x$，则 f^{-1} 是从 B 到 A 的双射，称 f^{-1} 为 f 的逆映射.

设 $f:A\to A$ 为一映射，若对 $\forall\ x\in A$，都有 $f(x)=x$，则称 f 为 A 上的恒等映射或单位映射，A 上的恒等映射常记为 i_A. 显然，f^{-1} 和 f 互为逆映射，且有 $f^{-1}\circ f=i_A$，$f\circ f^{-1}=i_B$.

定理 1.2.1 设 $f:X\to Y$ 为一映射，A，B，$A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 都是 X 的子集，则有

1) $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$；

2) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$. 更一般地，有

$$f(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha)；\tag{1.2.1}$$

3) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. 更一般地，有

$$f(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha).\tag{1.2.2}$$

证明 以(1.2.1)式为例，设 $y\in f(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)$，则 $\exists\ x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$，使 $f(x)=y$. 于是 $\exists\ \alpha_0\in\Gamma$，使 $x\in A_{\alpha_0}$. 所以，$y=f(x)\in f(A_{\alpha_0})$. 即 $y\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha)$，这说明 $f(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha)$.

另一方面，由于 $A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha(\forall\ \alpha\in\Gamma)$，由 1)，$f(A_\alpha)\subset f(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)$

$(\forall\ \alpha\in\Gamma)$，从而 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} f(A_\alpha)\subset f(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)$. 由定理 1.1.1 知(1.2.1)式成立，证毕.

定理 1.2.2 设 $f:X\to Y$ 为一映射. $A\subset X$，C，D，$C_\alpha(\forall\ \alpha\in\Gamma)$ 都是 Y 的子集，则有

1) $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$，

2) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$，更一般地，有

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha), \tag{1.2.3}$$

3) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$，更一般地，有

$$f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha), \tag{1.2.4}$$

4) $f^{-1}(C-D)=f^{-1}(C)-f^{-1}(D)$，

5) $f^{-1}(C^C)=[f^{-1}(C)]^C$，

6) $A\subset f^{-1}[f(A)]$，

7) $f(f^{-1}(C))\subset C$.

证明 以(1.2.4)式为例，设 $x\in f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)$，则 $f(x)\in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha$，即 $\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $f(x)\in C_\alpha$. 于是 $\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $x\in f^{-1}(C_\alpha)$，即 $x\in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)$. 这说明 $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)\subset \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)$.

反之，设 $x\in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)$，则 $\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $x\in f^{-1}(C_\alpha)$. 于是 $\forall\ \alpha\in\Gamma$，有 $f(x)\in C_\alpha$. 所以 $f(x)\in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha$，即 $x\in f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)$. 这证明了 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)\subset f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)$.

由所得两方面的结果，便知(1.2.4)式成立. 证毕.

1.2.2 基数

我们要比较某教室里的学生数与座位数谁多谁少？如果每个学生都有一个座位，而且每个座位上都有一个学生，那么我们根本用不着一个一个地去数学生与座位，便可断定学生数和座位数是相同的；若每个学生都坐一个座位后，还有空座位，则可断定座位数比学生数多；若每个座位上都坐一个学生后，还有学生没座位坐，则可断定座位数比学生数少. 现在我们把这种方法推广到比较任何集合元素的多少.