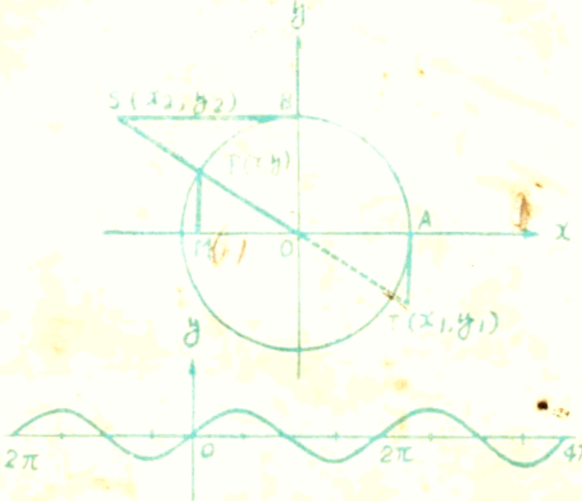
428442



三角证明例题选

朱长山

内蒙古人民出版社

SAN JIAO ZHENG MING LI TI XUAN

三角证明例题选

朱 长 山

内蒙古人民出版社

1981·呼和浩特

三角证明例题选

朱　长　山

内蒙古人民出版社出版

（呼和浩特市新城西街82号）

内蒙古新华书店发行

内蒙古通辽教育印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：5.75　字数：120千

1981年5月第一版　1981年11月第1次印刷

印数：1—15,500册

统一书号：7089·186　每册：0.49元

前　　言

《三角证明例题选》一书，是一本关于三角证明的专题汇编，是青年自学数学基础知识的辅助读物。这里撰集了对掌握三角证明有一定基本训练和综合训练意义的典型例题200道，分基本题与综合题两章十节，对每道例题逐一作了详细证明，并配备了一定数量的练习题。这些证明包括了一般方法到特殊方法的各种证明类型，使中学数学教学大纲中关于三角方面规定的基础知识可以得到较广的运用。本书后面还附录了有关的基础知识及其重要公式，以备随时查用。

因此，本书对校外青年的自学深造和中、高考复习中训练自己三角证明的基本功方面有一定的帮助；对学完三角知识的在校青年，通读各种证明方法，开阔视野、疏导思路，增进证题的能力方面，亦有一定的裨益。

最后，对本书给予编写指导和审改协助的上海中小学教材组数学组周玉刚、李俊明二位同志以及内蒙师院附中王淑媛老师和呼和浩特一中谢茂才老师，顺致由衷的谢意！

本书由于个人水平所限，失误与不适之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见予以指正。

编　者

一九八一年八月一日

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　基本题例题选

§1. 三角恒等式的证明

例 1． 求证：$\frac{\cos(-212^\circ)}{\sin(-482^\circ)}-\frac{\mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=2$。

证明： 左端 $=\frac{\cos 212^\circ}{-\sin 482^\circ}-\frac{\mathrm{ctg}(x+45^\circ)}{\mathrm{tg}(x-45^\circ)}$

$$=\frac{\cos(180^\circ+32^\circ)}{\sin(360^\circ+122^\circ)}-\frac{\cos(x+45^\circ)}{\sin(x+45^\circ)}+\frac{\sin(x-45^\circ)}{\cos(x-45^\circ)}$$

$$=\frac{\cos 32^\circ}{-(-\cos 32^\circ)}-\frac{\cos(x+45^\circ)\cos(x-45^\circ)}{\sin(x+45^\circ)\sin(x-45^\circ)}$$

$$=1-\frac{\cos 2x+\cos 90^\circ}{\cos 90^\circ-\cos 2x}=2.$$

练习： 求证：$\frac{-\sec(-\alpha)+\sin(-\alpha-90^\circ)}{\csc(540^\circ-\alpha)-\cos(-\alpha-270^\circ)}=\mathrm{tg}^3\alpha$。

证明： 左端 $=\frac{-\sec\alpha+[-\sin(90^\circ+\alpha)]}{\csc[360^\circ+(180^\circ-\alpha)]-\cos(270^\circ-\alpha)}$

$$=\frac{-\sec\alpha+\cos\alpha}{\csc\alpha+\sin\alpha}$$

$$=\frac{\csc^2\alpha-1}{\cos\alpha}\div\frac{\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha-1}$$

$$=\frac{-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}=\operatorname{tg}^3\alpha.$$

例 2．求证： $\dfrac{2\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1}{1-2\sin^2x}=\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

证明： 左端 $=\dfrac{-2\cos x\sin x-1}{\cos^2x-\sin^2x}$

$$=\frac{-(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}x-1}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-1}$$

$$=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

练习：求证： $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}=1$

证明： 左端 $=\dfrac{(-\sin\alpha)(-\operatorname{ctg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$

$=\dfrac{\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1=$ 右端。

例 3．求证： $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ=4.$

证明： 左端 $=\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$

$$=\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}81-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}63^\circ)$$

$$=\frac{\sin(9^\circ+81^\circ)}{\cos9^\circ\cos81^\circ}-\frac{\sin(27^\circ+63^\circ)}{\cos27^\circ\cos63^\circ}$$

$$=\frac{\sin90^\circ}{\cos9^\circ\sin9^\circ}-\frac{\sin90^\circ}{\cos27^\circ\sin27^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sin18^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}$$

$$=2\cdot\frac{\sin54^\circ-\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}$$

$$=2\cdot\frac{2\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\cos36^\circ}=4.$$

练习： 求证：$\sin87^\circ-\sin59^\circ-\sin93^\circ+\sin61^\circ=\sin1^\circ$.

证明： 左式$=\sin87^\circ-\sin93^\circ+\sin61^\circ-\sin59^\circ$

$$=-2\cos90^\circ\sin6^\circ+2\cos60^\circ\sin1^\circ$$

$$=\sin1^\circ.$$

练习： 求证：$\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ+\mathrm{tg}80^\circ=8\sin40^\circ+\sqrt{3}$.

证明： 左式$=\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ+\mathrm{tg}80^\circ$

$$=\frac{\sin60^\circ}{\cos20^\circ\cos40^\circ}+\frac{\sin80^\circ}{\cos80^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}(\cos60^\circ+\cos20^\circ)}+\frac{\cos10^\circ}{\sin10^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin10^\circ+\frac{1}{2}\cos10^\circ+\cos10^\circ\cos20^\circ}{\frac{1}{2}\sin10^\circ+\sin10^\circ\cos20^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin10^\circ+\frac{1}{2}\cos10^\circ}{\frac{1}{2}\sin10^\circ+\frac{1}{2}(\sin30^\circ-\sin10^\circ)}+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(\cos30^\circ+\cos10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin10^\circ+\frac{1}{2}(\sin30^\circ-\sin10^\circ)}$$

$$=4\left(\sqrt{3}\sin 10^\circ+\cos 10^\circ+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$$

$$=8(\sin 10^\circ\cos 30^\circ+\cos 10^\circ\sin 30^\circ)+\sqrt{3}$$

$$=8\sin 40^\circ+\sqrt{3}.$$

例 4． 求证：$\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\times\cos 40^\circ=\frac{3}{4}$.

证明： 左端 $=\frac{1}{2}(1-\cos 20^\circ)+\frac{1}{2}(1+\cos 80^\circ)+$

$$+\frac{1}{2}(\sin 50^\circ-\sin 30^\circ)$$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos 80^\circ-\cos 20^\circ)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin 50^\circ-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-\sin 50^\circ\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\sin 50^\circ-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}.$$

例 5． 求证：$\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos^2(60^\circ-\alpha)$

$$=\frac{3}{2}.$$

证明： 左端 $=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)+\frac{1}{2}[1+\cos(120^\circ+2\alpha)]+$

$$+\frac{1}{2}[1+\cos(120^\circ-2\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}[3+\cos 2\alpha+\cos(120^\circ+2\alpha)+$$

$$+\cos(120^\circ-2\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}[3+\cos 2\alpha+2\cos 120^\circ\cos 2\alpha]$$

$$=\frac{1}{2}[3+\cos 2\alpha-\cos 2\alpha]=\frac{3}{2}.$$

练习：求证：$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120^\circ)+\cos^2(\alpha-120^\circ)$

$$=\frac{3}{2}.$$

证明：左端 $=\frac{1}{2}[1+\cos2\alpha]+\frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha+240^\circ)]+$

$$+\frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha-240^\circ)]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{2}[2\cos2\alpha(-\cos60^\circ)]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos2\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha=\frac{3}{2}.$$

例6．求证：$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$

证明：左端$=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)[(\sin^2\alpha)^2-$$

$$-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+(\cos^2\alpha)^2]+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$=(\sin^2\alpha)^2+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+(\cos^2\alpha)^2$$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$$

$$=1.$$

练习：求证：$\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\dfrac{3}{2}.$

证明：左端 $=\dfrac{1-(\sin^3\alpha)^2-\cos^6\alpha}{1-(\sin^2)^2-\cos^4\alpha}$

$$=\frac{(1+\sin^3\alpha)(1-\sin^3\alpha)-\cos^6\alpha}{(1+\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)-\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\sin^2\alpha)(1-\sin\alpha+\sin^2\alpha)-\cos^6\alpha}{(1+\sin^2\alpha)\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha[(1+\sin^2\alpha+\sin\alpha)(1+\sin^2\alpha-\sin\alpha)-\cos^4\alpha]}{\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{[(1+\sin^2\alpha)^2-\sin^2\alpha]-\cos^4\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1+2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha-\sin^2\alpha-\cos^4\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{3\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{3}{2}.$$

例7．求证： $(1+\sqrt{3})\cos\alpha+(1-\sqrt{3})\sin\alpha$

$$=2\sqrt{2}\cos(\alpha+15°).$$

证明： 由左端 $=\cos\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$

$$=\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha+\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$$

$$=2(\sin30°\cos\alpha-\cos30°\sin\alpha)+$$

$$+2(\sin\alpha\cos60°+\cos\alpha\sin60°)$$

$$=2[\sin(30°-\alpha)+\sin(60°+\alpha)]$$

$$=2\cdot2\sin45°\cos(\alpha+15°)$$

$$=2\sqrt{2}\cos(\alpha+15°).$$

练习：求证： $\sin50°(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}10°)=1.$

证明： 左式 $=\sin50°\cdot\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\cos10°+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin10°\right)}{\cos10°}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$= 2\sin 50° \cdot \frac{\sin 30° \cos 10° + \cos 30° \sin 10°}{\cos 10°}$$

$$= 2\sin 50° \cdot \frac{\sin(30° + 10°)}{\cos 10°}$$

$$= \frac{2\sin 40° \cos 40°}{\cos 10°} = \frac{\sin 80°}{\cos 80°} = 1.$$

例 8．求证： $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{2\mathrm{tg}\,\alpha}$.

证明： 左式 $= \sin 4\alpha + \frac{\cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$$= \frac{\sin 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{\cos(4\alpha - 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{2\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

练习：求证： $\sin 3A \cdot \csc A - \cos 3A \cdot \sec A = 2$.

证明： 左端 $= \sin 3A \cdot \frac{1}{\sin A} - \cos 3A \cdot \frac{1}{\cos A}$

$$= \frac{\sin 3A \cos A - \cos 3A \sin A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{\sin(3A - A)}{\frac{1}{2}\sin 2A} = \frac{2\sin 2A}{\sin 2A} = 2.$$

练习：求证： $\sin 3\theta = 4\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)$.

证明： 由右端 $= 4\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)$

$$= 2\sin\theta\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos(\pi + 2\theta)\right]$$

$$= 2\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right)$$

$$= \sin\theta + 2\sin\theta\cos 2\theta$$

$$= \sin\theta + (\sin 3\theta - \sin\theta)$$

$= \sin 3\theta =$ 左端。

例 9. 求证：$16\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ\cos 192^\circ = 1$.

证明：将原式左端化为

$$\frac{16\sin 24^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ\cos 192^\circ}{\sin 24^\circ}$$

∵ 分子式 $= 8\sin 48^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ\cos 192^\circ$

$$= 4\sin 96^\circ\cos 96^\circ\cos 192^\circ$$

$$= 2\sin 192^\circ\cos 192^\circ$$

$$= 2(-\sin 12^\circ)(-\cos 12^\circ)$$

$$= \sin 24^\circ$$

分母式 $= \sin 24^\circ$

∴ 原式 = 1 .

练习：求证：$\mathrm{tg}10^\circ\mathrm{tg}50^\circ\mathrm{tg}70^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

证明：左端 $= \mathrm{tg}10^\circ\mathrm{tg}50^\circ\mathrm{tg}70^\circ$

$$= \mathrm{ctg}80^\circ\mathrm{ctg}40^\circ\mathrm{ctg}20^\circ$$

$$= \frac{\cos 80^\circ\cos 40^\circ\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ\sin 40^\circ\sin 20^\circ}$$

∵ $\cos 80^\circ\cos 40^\circ\cos 20^\circ$

$$= \frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\sin160^\circ}{8\sin20^\circ}=\frac{1}{8};$$

$$\sin80^\circ\sin40^\circ\sin20^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(\cos20^\circ-\cos60^\circ)\cos10^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cos20^\circ\cos10^\circ-\frac{1}{4}\cos10^\circ$$

$$=\frac{1}{4}(\cos30^\circ+\cos10^\circ)-\frac{1}{4}\cos10^\circ$$

$$=\frac{1}{4}(\cos30^\circ+\cos10^\circ-\cos10^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\cos30^\circ=\frac{1}{8}\sqrt{3}.$$

∴ 原式 $=\frac{\cos80^\circ\cos40^\circ\cos20^\circ}{\sin80^\circ\sin40^\circ\sin20^\circ}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

例10．求证： $(\sec^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha)(\sec^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha)$

$$=(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^2.$$

证明(1)：左端 $=(1+\mathrm{tg}^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha)$

$$=(1-\mathrm{tg}\alpha)^2(1+\mathrm{tg}\alpha)^2$$

$$=[(1-\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)]^2$$

$=(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^2=$ 右端。

证明(2)：原式右端 $(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^2$

$$=[(1+\mathrm{tg}\alpha)(1-\mathrm{tg}\alpha)]^2$$

$$=(1+2\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha)(1-2\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha)$$

$=(\sec^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha)(\sec^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha)=$ 左端。

练习：求证： $(\sec\alpha+\csc\alpha)^2$

$$=(1+\mathrm{tg}\alpha)^2+(1+\mathrm{ctg}\alpha)^2.$$

证明： ∵左端 $=\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2$

$$=\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2$$

$$=\frac{1+\sin2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{4+4\sin\alpha}{\sin^2 2\alpha};$$

右端 $=\left(\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$

$$=\frac{1+\sin2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{(1+\sin2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{4+4\sin2\alpha}{\sin^2 2\alpha}.$$

∴ $(\sec\alpha+\csc\alpha)^2=(1+\mathrm{tg}\alpha)^2+(1+\mathrm{ctg}\alpha)^2.$

例11． 求证：$\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

证明： 左端 $=\dfrac{2\sin\dfrac{2\pi}{7}\left[\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}\right]}{2\sin\dfrac{2\pi}{7}}$

$$=\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}+$$

$$+\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=-\frac{1}{2}=\text{右端}.$$

练习：求证： $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

证明： 左端 $=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}+$$

$$+\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}=\text{右端}.$$

例12. 求证：$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

证明： 左端 $=\cos^4(\pi-\frac{7}{8}\pi)+\cos^4(\pi-\frac{5}{8}\pi)+$

$$+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$$

$$=\cos^4\frac{7\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$$

$$=2\cos^4\frac{7\pi}{8}+2\cos^4\frac{5\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(2\cos^2\frac{7\pi}{8}\right)^2+\left(2\cos^2\frac{5\pi}{8}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\cos\frac{7\pi}{4}\right)^2+\left(1+\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{3}{2}=\text{右端}.$$

例13. 求证：$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\times$

$$\times\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}.$$

证明(1) 可由等式*

$$\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{m}\right)\cdots$$

$$\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{m}\right)=\frac{\sin\left(mx+m\frac{\pi}{2}\right)}{2^{n-1}}$$

* 后面第二章 § 10里去证明这个等式。163

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com