目　录

第一部分　微分学

导数与微分是建立在极限基础上的两个重要概念，它们有广泛的应用。这一部分内容主要是阐明基本概念，推导出它们的各种运算法则，并且论述它们的各种应用。习惯上，这一切统称为微分学。

一、导数的概念

1. 考察几个实际问题

(1) 直线运动的速度。设质点以 $s=f(t)$的运动规律做直线运动。我们的问题是要确定质点在某一固定时刻t_0的瞬时速度。

若质点做匀速运动，则任何时刻的瞬时速度就都是平均速度，即$v=\dfrac{s}{t}$. 这表明计算它并不需要任何新的数学手段，用普通的除法就够了。

然而，当做变速运动时的情况就不同了，只用初等数学的运算手段是得不到解决的，为此就必须找出一种新的办法去解决。设路程s与时间t的对应关系为$s=f(t)$，从时刻t_0起时间的改变量Δt，相对的路程改变量是

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

其比值$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$就是$\Delta t$时间内的平均速度。由此我们有理

由想到：如果运动的速度是增加（或减小）的，那么当Δt越小时$\frac{\Delta s}{\Delta t}$就越接近于$t_0$的瞬时速度。而当速度不是增加或减小地变化着时，虽不能说Δt越小$\frac{\Delta s}{\Delta t}$越接近$t_0$的瞬时速度，但总能做到当$\Delta t$小到一定程度时，会使这个平均速度与$t_0$的瞬时速度接近到相差任意小的程度，从而可以近似地替代t_0的瞬时速度。因此，当$\Delta t\to 0$时取比值$\frac{\Delta s}{\Delta t}$的极限，显然可以作为$t_0$瞬时速度$v_0$．即

$$v_0=\lim_{\Delta t\to o}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to o}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

(2) 物体的比热。因为一克物质当温度升高时吸收热量的多少与温度的变化情况有关，所以热量Q是温度t的函数，并记为$Q=f(t)$．欲求温度t_0时的比热c_0。设温度从t_0到t_1，令$\Delta t=t_1-t_0$，则在这一段温度间隔内，物体吸收的热量：

$$\Delta Q=f(t_0+\Delta t)-f(t_0),$$

其平均比热为：

$$\overline{c}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t},$$

于是t_0的比热c_0就是平均比热$\overline{c}$取$\Delta t\to o$的极限，即有

$$c_0=\lim_{\Delta t\to o}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to o}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

此外，如电流强度、物质的密度、化学反应的速度等

等，最后也都归结为求某种相同类型的比的极限。

现在我们抽去各实际问题的具体含意，来看它的数学特点：

① 自变量与函数的对应关系用$y=f(x)$表示。

② Δx表示x_0到x_1的改变量，其函数值变化的平均值记为：$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，我们称这个平均值为平均变化率。

③ 取当$\Delta x\to o$时，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限称点$x_0$的变化率。于是瞬时速度可看成是路程对时间的变化率，比热可看成是热量对温度的变化率。

2．导数的定义

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则这个极限值称为函数$y=f(x)$在点$x=x_0$的导数，记为$f'(x_0)$或$y'|_{x=x_0}$或$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$

这样，我们既得到了定义，又得到了用定义求导数的步骤，如果在x_0点有导数时，我们称为在x_0点可导；否则称在x_0点不可导。

例1 ①平均速度$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$和时间$t$有关吗？与时间改变量$\Delta t$有关吗？

②瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ 和时间t有关吗？与时间改变量Δt有关吗？

答 ①与时间t有关，与时间改变量Δt有关。

②与时间t有关，与时间改变量Δt无关。

注意：我们所研究的s是在非均匀变化情况下，否则与t、Δt均无关。

例2 有一个化学反应，反应浓度c与反应开始后的时间t之间的函数关系为$c=f(t)$，写出$t=a$时刻的反应浓度的变化率以及任何时刻t的反应浓度的变化率。

解 $c=f(t)$在$t=a$时刻的反应浓度的变化率为

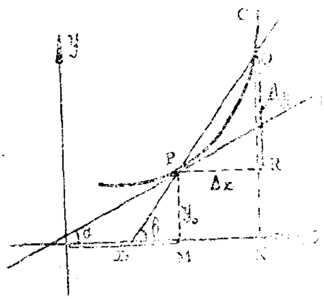
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta c}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(a+\Delta t)-f(a)}{\Delta t},$$

而对任何时刻t的反应浓度的变化率为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta c}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

3. 导数的几何意义

设曲线c是函数$y=f(x)$的图象。对曲线上任一点$P(x_0, y_0)$及其邻近的任一点$Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，作$MP\perp OX$、$NQ\perp OX$、$PR\perp NQ$. 又设过$P(x_0, y_0)$点的切线$PT$的倾斜角为$\alpha$，割线$PQ$的倾斜角为$\beta$



（如图）。则有

$$tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

现在让点Q沿曲线C无限地趋近于P，则割线PQ绕着P转动，并且割线PQ最终无限地趋近切线PT．即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} tg\beta = tg\alpha.$$

因此，函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$的几何意义就是曲线$y=f(x)$在点x_0处的切线斜率。

4．计算举例

例3 按定义求$y=x^2$在 $x=-\frac{1}{2}$，$x=1$点的导数。

解 $$y'|_{x=-\frac{1}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-\frac{1}{2}+\Delta x)-f(-\frac{1}{2})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-\frac{1}{2}+\Delta x)^2-(-\frac{1}{2})^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(-1+\Delta x) = -1.$$

$$y'|_{x=1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

例4 按定义求抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$在点$x=2$及点$x=-2$处的切线方程，并求这两条切线的夹角。

解 从例3的计算中可以看到，要求一个函数在几个点的导数，如果逐一依照定义来求，演算过程就有许多重复。这就启发我们应该先求出它在任意点x的导数，然后再把所需要求的点直接代入。

因为

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(x+\Delta x)^2-\frac{1}{4}x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\Delta x\right)=\frac{1}{2}x.$$

所以抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$在$x=2$及$x=-2$处的切线的斜率分别为$y'|_{x=2}=1$，$y'|_{x=-2}=-1$．于是在点$x=2$处的切线方程为$y-1=x-2$，即 $x-y-1=0$．

在点$x=-2$处的切线方程为$y-1=-(x+2)$．又两条切线的斜率乘积为-1，从而两条切线的交角为直角。

例5 据定义，已知$y=x^{\frac{3}{2}}$，其上的哪一点处的切线与y

$=3x-1$ 平行，且求其方程。

解 根据以往的知识，对本题出现$\frac{0}{0}$型不定式的具体情况，可通过分子有理化方法（亦可参看编者已出版的“数列极限与函数极限”，以下简称“极限”一书）解之。因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\Delta x}$$

$$=\frac{[(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}]\{[(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}]^{2}}{\Delta x}$$

$$+\frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+(x^{\frac{1}{2}})^{2}\}}{\Delta x}$$

$$=\frac{[(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}][(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}]}{\Delta x[(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}]}\cdot$$

$$\cdot\{2x+\Delta x+[(x+\Delta x)x]^{\frac{1}{2}}\}$$

$$=\frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\{2x+\Delta x+[(x+\Delta x)x]^{\frac{1}{2}}\}.$$

所以

$$y'=\mathop{\text{lin}}_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\{2x+\Delta x+[(x+\Delta x)x]^{\frac{1}{2}}\}$$

$$=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\cdot 3x=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

由$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=3$，即得$x=4$，代入 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 得$y=8$，亦即切点为（4，8）．故切线方程为$y-8=3(x-4)$，即

$$3x-y-4=0.$$

例6 据定义求函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 当x\geqslant 0\\ x\ , & 当x<0\end{cases}$$

在各点的导数。

解 当$x>0$时，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\cos x.$$

又当$x<0$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$．

而在$x=0$处自然要利用极限部分已经用过的左、右极限

的方法．由于

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(o+\Delta x)-f(o)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(o+\Delta x)-f(o)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

所以$f'(x)|_{x=0}=1.$

5．在导数概念中应该注意的几个问题

(1) 由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$并不依赖于$\Delta x$，而只依赖于自变量$x$的初值$x_0$，因此对于可导范围，$f'(x)$就是依赖于$x$的一个新的函数（叫做$f(x)$的导数）。正因如此，$f'(x)$ 就成为在$f(x)$可导范围内任一点x_0的导数$f'(x_0)$的求值公式。

（2）如果函数$y=f(x)$在给定区间内各点都有确定的导数，则称函数$y=f(x)$在给定区间内为处处可导，并且我们把它记作$\frac{dy}{dx}$或y'或$f'(x)$.

（3）函数在一点处可导，则必须在该点连续 。

首先我们给出一个预备知识。设$\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, x_0是函数$y=f(x)$定义域内的一点，则函数$y=f(x)$在点x_0处连续的充要条件是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

证 设函数$y=f(x)$在$x=x_0$点连续，则由定义

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x)=f(x_0)\text{，即}\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0\text{，}$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$．

又设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x_0)$，故在$x=x_0$点连续。

如果在x_0处可导，据定义，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，即当分母$\Delta x\to 0$时必有分子$\Delta y\to 0$，也就是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，再由预备知识函数$y=f(x)$在$x=x_0$点必连续。因此我们得到结论，可导必连续。这可改述成在$x=x_0$点不连续的函数，在x_0点必不可导。

（4）函数在其连续点处不一定可导。

比如，设函数$y=|\sin x|$，显然在$x=0$处连续；但在$x=0$处却不可导；因为当$x=0$，时，

又 $\Delta y=|\sin(x+\Delta x)|-|\sin x|=|\sin\Delta x|$．

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=1.$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=-1.$$

故由极限存在条件知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$不存在，即函数$y=|\sin x|$

在$x=0$处不可导。

(5) 导数记号的说明

$\frac{dy}{dx}$ 也可记做$\frac{d}{dx}y$,这里把$\frac{d}{dx}$看作对y求导的记号。就是我们暂时不把$\frac{dy}{dx}$看作dy、dx之商（在微分的概念那一节再来讲清这一点），而看作一个整体。其原因是$\frac{\Delta y}{\Delta x}$当$\Delta x\to 0$时的极限而非当$\Delta x\to 0$时分子$\Delta x$的极限和分母$\Delta y$的极限之商。

习题

1. 连续曲线上的每一点，是否总能给出一条切线，举例说明。

2. 函数的连续性与可导性是否可以互相导出。

3. 据定义求导　$y=\frac{2x-1}{x+2}$.

4. 据定义求导　$y=\sqrt{a^2-x^2}$.

5. 据定义求导　$y=\frac{\ln x}{x}$.

6. 已知抛物线$y=x^2$及$y=2-x^2$. 求

(1) 这两条抛物线的两个交点的坐标;

(2) 过这两个交点的割线方程;

(3) 两条抛物线在每一交点处的切线斜率及切线方程;

(4) 两条抛物线在每一交点处的切线交角。

7. 取抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上两点 $P_1(1,\frac{1}{2})$，$P_2(4,8)$. 试求

(1) 过P_1、P_2点的割线方程；

(2) 在P_1处的切线与P_2处的切线方程；

(3) 上述割线与切线分别与x轴正方向的交角。

8. 一个圆的铝盘加热时，随温度升高而膨胀，设该圆盘在温度为t℃时，半径$r=r_0(1+\alpha t)$（α为常数），求t℃时铝盘面积对温度t的变化率。

9. 按定义证明：可导的偶函数其导函数是奇函数；而可导的奇函数其导函数为偶函数。

10. 按定义证明可导的周期函数，其导函数为周期函数。

11. 用导数定义，求

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{当}x\geqslant 0\text{时} \\ 3, & \text{当}x<0\text{时} \end{cases}$$

各点的导数。

12. 试证函数$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导。

二、导数的基本公式

从前面的讨论中可以看到直接利用导数定义来求给定函数的导数是很麻烦的，它牵涉到复杂的极限计算。因此，我们自然期望建立一些公式使得对于常见的函数，求导问题能够得到迅速解决。什么是常见的函数呢？在三角、代数中我们已经熟悉的函数有：幂函数、对数函数、指数函数、

三角函数和反三角函数，这些统称基本初等函数。由基本初等函数函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤（如$\log_a \sin x$就可看成由正弦函数和对数函数复合而成）所得到的函数叫做初等函数，所谓常见的函数指的就是初等函数，它的确也就是我们实际问题中所经常遇到的函数。

根据初等函数的定义，实际上也告诉了我们应该通过怎么样的途径来解决它的求导问题。这就是要建立基本初等函数的导数公式，函数四则运算的导数公式以及复合函数的导数公式，有了这些公式任何初等函数的求导问题也就迎刃而解。

考虑到指数函数和对数函数，三角函数和反三角函数互为反函数，因此再建立反函数的导数公式也是有方便的。下面我们就依次建立函数四则运算，复合函数和反函数的导数公式，而把基本初等函数的导数公式穿插到这三部分之中。

1. 函数四则运算的导数公式

本段要给出幂函数x^n(n为整数)、三角函数和对数函数的导数公式。

若$y=c$（c为常数），求y'.

由于$\Delta y\equiv 0$，所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$. 就是说常数的导数为0.

若从几何上则表明，平行于x轴的直线，其斜率在任何点处都等于0.

若$y=x^n$，n为非负整数，求y'.

当n为正整数时，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)-x][(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}]$$

$$= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots\cdots+x^{n-1}}_{n\text{项}}$$

$$= nx^{n-1}.$$

在上式中如取$n=0$即得$0\cdot\frac{1}{x}=0$ $(x\neq0)$，其结果与把$x^0=1$看作常数来求导是一样的，因此可合并为：若$y=x^n$，当$n=0$，1，2，3，……时，则

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

例7 求抛物线$y=x^2$在$x=1$，$x=-\frac{1}{2}$点的切线斜率。

这个问题在例3中就曾按导数定义求过，现在按本公式来求，显然要更简单些。

解 因为 $y'=2x$，所以$y'|_{x=1}=2x|_{x=1}=2.$

$$y'|_{x=-\frac{1}{2}}=2x|_{x=-\frac{1}{2}}=-1.$$

若 $y=\sin x$，求y'.

如同例6的推导，便知对一切x均有

$$(\sin x)'=\cos x.$$

同理

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

例8 设$y=\sin t$，求$f'(\frac{\pi}{2})$.

解 $$y' = (\sin t)' = \cos t,$$

$$y'\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos t\big|_{t=\frac{\pi}{2}}$$

故

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

若 $y=\log_a x$，求y'.

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

又由于当 $\Delta x\to 0$时有$\frac{x}{\Delta x}\to\infty$，即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

特别地，取$a=e$，有$\log_e e=1$，即

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

我们记$\log_e x$为$\ln x$，并称为自然对数，这时其导数公式为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$