国际展望：九十年代的数学教育

GUOJI ZHANWANG
JIUSHI NIANDAI DE
SHUXUE
JIAOYU

ICMI研究丛书之一

● 张奠宙 丁尔升 李秉彝等编译

● 上海教育出版社

国际展望：九十年代的数学教育

GUOJI ZHANWANG
JIUSHI NIANDAI DE
SHUXUE
JIAOYU

ICMI 研究丛书之一

● 张奠宙 丁尔升 李秉彝等编译

● 上海教育出版社

国际展望：九十年代的数学教育
国际数学教育委员会(ICMI)
张奠宙　丁尔升　李秉彝(新加坡)等编译
上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 12　插页 6　字数 242,000
1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷
印数 1—1,400 本

ISBN 7-5320-2082-7/G·2022　　定价：(精)4.90元

中译本序

国际数学教育委员会(ICMI)① 具有引人注目的悠久历史。80 年来，它一直在设法改善全世界的数学教学。有一段很长的时间，ICMI 几乎只在西欧和北美进行活动。然而，现在情况变了，而且变得很快。世界各地都在举行定期的区域性会议。1991 年，一个特别会议也将在中国的北京召开。四年一度的国际数学教育大会(ICME)，地球上每一个角落都有人前来参加。到会的演讲者来自许多国家：1980 年的国际数学教育大会上，华罗庚所作的演讲，至今仍鲜明地留在 2000 名与会者的记忆之中。

最近 10 年来，ICMI 提出了国际性研究的想法。本书的内容反映了前三个国际性研究的主题范围。还要发表的研究成果是“认知和数学”与“数学普及”。此外，“估计和评价”、“未来小学教师的科学与数学培训”等两个课题正在计划之中。不仅有许多国家投入了这些研究，而且由此产生的那些出版物已形成可观的国际效益，并出现了各种文字的译本。这些工作有助于创立数学教育工作者的国际交往，关心其他国家发生的事情，以及不断寻求改进数学教学方面的合作。

中译本的问世是这一过程中的又一重要步骤。ICMI 十分欢迎这一步，而且希望本书对中华人民共和国的数学教育工作者会是很有价值的。我们也期望这将导致中国同行更多地参与ICMI的活动。

本书的出版要归功于张奠宙、李秉彝(Lee Peng Yee)的倡议，以及他们和丁尔升、周克希、赵斌等诸位先生的共同努力。与上海教育出版社陈和社长的合作也是很成功的。国际数学教育委员会谨为本书的出版向他们表示谢意。

Geoffrey Howson

1989 年 12 月

① ICMI 为 The International Commission on Mathematical Instruction 的缩写。

目录

第一篇　计算机和信息科学对数学和数学教育的影响

第二篇　九十年代的中、小学数学

第三篇　作为服务性学科的数学

国际数学教育委员会(ICMI)的七十五年

第一篇

计算机和信息科学对数学和数学教育的影响

ICMI 研究系列丛书之一

斯特拉斯堡(Strasbourg)会议　1985

斯特拉斯堡会议的综合报告

第一部分 计算机和信息科学对数学的影响

1.1 引言

数学概念总是依赖于计算的方法和表达的方法。十进制记数法、书写符号和数表的制作都是先于实数和函数的近代概念而存在的。在 Riemann 或 Lebesgue 积分概念形成之前很久，数学家就已计算过积分，并引进了积分号。我们同样可以期望，计算机和信息科学所提供的新的计算和表达的方法，也将会使新的数学概念应运而生。但是，时至今日，它们所引起人们注意的，仍只是观念和方法——旧的也好，新的也好——的涵义，而这些观念、方法又并没有在当代“传统”数学中争得一席之地。这就使我们有必要也有可能来对最传统的概念重新作一番考察。

首先考虑各种实数概念。实数可看作是直线R上的点，这种表示有助于对加法和乘法的理解。实数也可理解为分数的聚点，例如连分数可给出实数的最佳有理逼近。实数还可看作无限小数或是用浮点记法表示的数。用一架袖珍计算器就很容易弄明白后三种观点的意义。连分数算法——这只不过是 Euclid 时代的算法——现在又成了许多数学分支的标准工具。借助于计算机可使复杂的运算(如取幂运算、级数求和、迭代)变得很方便。但即使是这些简单的运算，也会产生新的数学问题：例如在级数求和时，用不同的顺序（如从大到小或从小到大地排列）可能会得出不同的数值（例如参见 Churchhouse, 1980, 1985)。

其次考虑函数概念。要教会学生区别两种不同的概念，一种是特殊的初等函数，也就是 17 世纪到 19 世纪期间列成表的那些函数，另一种是 Dirichlet 于 1830 年引进的一般函数概念。即使在今天，“求解”一个微分方程仍常被理解为将问题归结为求一个积分，而且尽可能求出初等函数解。但在泛函方程中，相应的问题是有效运算以及解的定性研究，因而我们在其中感兴趣的函数是可计算函数而不再是那些列表表示的函数。计算机出现之前的函数逼近理论和函数迭加理论现在得到了证实。初等函数领域已经扩大，通过对非线性问题的离散化自然地引进了非初等性态的函数。信息科学也要求我们对变量概念、对符号及其数值之间的联系重新作一考察。这种符号化的做法，在数学中得到了卓有成效的应用(如微积分的符号体系)。在信息科学中，必须求出或实现这些值，这就以新的方式提出了这一问题。不能完全搬用函数的符号体系，而且变量在诸如 FORTRAN、LISP 和 PROLOG 等不同的语言中的特征是不同的。

在下一节中，我们从几个方面探讨计算机和信息科学对数学及数学研究业已产生的影响，并就还可能会有哪些进一步影响提出一些设想。应该指出，我们的报告并不是很全面的，特别对应用数学的各个分支更是如此，但我们希望这一报告能提供一些线索，出一些点子。无论如何，在最广泛的意义上来说，信息技术突飞猛进的发展，是会使任何预测过不多几年就失去其价值的。

1.2 数学研究的新领域和得到复苏的领域

计算机不仅为数学研究和教学提供了一个新的工具，同时也是新的研究领域的源泉。与计算机应用相联系的研究并不都是属于新的数学分支。其中有些研究具有悠久的历史，可追溯至 19 世纪甚至 18 世纪，它们之所以至今未能解决，是由于 Euler, Gauss, Jacobi, Ramanujan 等人没能得到合适的工具。如果有这种工具，这些数学巨匠一定会以巨大的热情去探索这些新的可能性，难道还有人对这一点抱怀疑态度吗？数学研究的特点之一就在于它是建立在价值长存的一系列结果的整体之上的。方式和兴趣可能会变化，但只要条件适宜，过去一个世纪甚至一千年前，那些被忽略的问题任何时候都会引起新的兴趣，这样领域就扩展了；任何内容，哪怕它已经沉睡了几个世纪之久，也不会是完全失去生命力的。在信息时代，我们希望能强调这一事实，因为这是下面讨论的基础。

数学研究中因使用计算机而取得进展的最著名的例子之一就是 Zabusky 和 Kruskal (1965)对 Korteweg-de Vries 方程给出的孤立子(孤立波)解。这个解首先是从计算机求数值解而得到启示的。进一步的试验研究说明了其他有关的解的存在性，而理论上的研究又使若干非线性波动方程孤立子解的研究得以纳入一个可靠的体系。

另一个例子可在 Yamaguti 的文章(见参考论文)中找到，他所做的工作可以概述为采用动态系统的数值试验对连续而处处不可微函数进行考察，这种动态系统是用迭代法定义的，其解呈现出紊乱的性态。在特殊情形下就将得出 Weierstrass 函数和 Takagi 函数，后者可写成

$$T(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\phi^{k}(x)$$

其中

$$\phi(x)=\begin{cases}2x, & \left(0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2(1-x), & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)\end{cases}$$

近来在初等分析的教学中采用了这类函数。他通过与 Hata 合作进一步研究一族有限差分格式，又得出了 Lebesgue 奇异函数。

在纯数学的古老分支中，计算机起过较大影响的领域有群论、组合数学和数论。计算

机在这些领域中的许多应用可在已出版的会议文集中找到(例如参见 Churchhouse and Herz(1968), Atkin and Birch(1971), Leech(1970))。

已有的应用实在太多，不能全部列举或详细描述。但很清楚，寻找离散子群、探讨 Burnside's 问题,研究椭圆曲线上的有理点以及找大素数等等,如果没有计算机,那将会一筹莫展。大整数的因子分解是另一个例子。从数学本身看这并非是什么令人着迷的课题，但近年来它在涉及密码检索系统的研究中显示了值得注意的重要性(参见 Beker & Piper, 1982)。许多这些应用都得益于特为这些领域的研究者们设计的合适的软件包。研究有限单群的 CAYLEY 系统是一个众所周知的例子；这些软件包使研究者摆脱了繁重的操作。另一个获得新生的"古老"课题是连分数，在逼近实数和用分析形式作数值分析的研究中都是这样。

计算机彩色图像显示和软件包不仅给几何、建立模型和流体流动的研究带来了令人鼓舞的可能性，而且对某些不很明显的领域(如分析)也是如此。复值函数的迭代研究最近出现了转机；尽管对 Julia 集及其子集的数学性质至今所知甚微，但通过彩色图像显示已清楚地看到了它们的复杂性态(参见 1.5 节和 West 参考论文)。

显然，计算机在数学研究方向和方式上正在发挥并将继续发挥深远的影响，它不仅能常常用于猜想结果，而且还能帮助找到证明。另外，还有如下的一些重要问题：(i)计算机将怎样帮助数学家交流彼此的发现，相互促进？(ii)对数学和数学家来说，广泛地关注和使用计算机可能会带来怎样的智力和社会的后果?

1.3 证明

数学中所谓"证明"，严格地讲就是从公理到结论的演绎链。当然，实际上一个证明能被接受，必须是它所用到的结果是由公理或由其他已知结果演绎而得。数论中有这样一个定理，每个正整数是四个整数的平方和。当然，我们可以从算术公理出发，十分沉闷地从头开始一步一步写出这个定理的证明，但是很少有人认为有这个必要，他们往往借助于一些中间步骤，例如用 Jacobi 恒等式或整数的双二次型表示，作为有效的梯级。这是因为它可以从其他结果推得，而这些结果又可逐步由算术公理推得。

计算机可用于数学证明。首先，它能帮助人们猜测什么是正确的或错误的；能进行证明中所需要的计算；能用于仅依赖于有限种情形的检验就可判定其真理性的结论，例如四色定理的计算机证明(见 Appel 和 Haken 1976)；甚至可以设计这样的程序，通过尝试已知公理，定理或恒等式的许多可能的组合去发现定理的一部分证明，但由于所谓的"组合爆炸"，这一方法除一些极个别的情况外难以奏效。

计算机在很多领域中已用来猜测结果，如群论、组合数学、数论、编码理论等，另外，它还用于估计猜想的正确性，如 Riemann 猜想。这方面的早期评述文章可参看 Churchhouse(1973)。起初是在数值计算的基础上作为猜想提出的著名定理中，有素数定理

(Gauss)和 Ramanujan 在 1927 年得到的几个重要结果，其中包括分拆函数和 $\tau(n)$ 函数的同余性质。另一方面，Lander、Parkin 和一个计算机专家于 1967 年发现

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5,$$

否定了持续近 200 年之久的 Euler 猜想。

计算机计算的精确性和可靠性在今天已是毋庸置疑了，如果一个结果相当重要或者使人感到有怀疑，那么可以由别人在不同的机器上进行检验；若在几种情形下做出来的结果都是一样的，而所根据的数学又假定是正确的，那么这个结果即使不能说绝对无误，至少也可以说是十拿九稳了。对计算机辅助证明无须比对纯粹的人工证明抱更多的怀疑态度。过去曾有许多错误的“证明”发表过（包括四色定理）；我们相信，计算机不会增加错误“证明”的数目，而是恰恰相反。

当然，关于无限集合的定理证明，仅有数值证据，是不能接受的。即使是对于数目极其庞大的一组有关变量的值算得的数值证据，也会使我们走入歧途。一个解析数论的众所周知的例子就是 Littlewood 所证明的下述结论（参见 Ingham, 1932）：尽管在当时（现在也一样）所得出的

$$\pi(x)-\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\text{（其中 }\pi(x)\text{ 表示小于或等于 }x\text{ 的素数的个数）}$$

的所有数值都是正的，但它不仅最终要改变符号，而且要改变无限多次。

对计算机辅助证明（如四色定理的证明）的批评意见是它过分依靠硬算而对定理何以是正确的没有提供见解。尽管如此，某些问题，如找大素数或大整数的因子分解，从本质上要用这种方法。尽管计算机证明也许确实没有为我们提供什么观点，但这一证明的存在会鼓舞人们去发现更优美、简短、明快的证明。

从长远的观点看，计算机辅助的有效性会鼓励数学家对他们的思想用更为确切的句法，更形式地加以表述（de Bruijn，参考论文）。反过来，这种发展又会有助于对构造证明的技巧进行教学，因而就有了至少能进行某些方面的数学工作的“专家系统”的发展（包括所有常规代数操作和计算等等），从而部分地实现了 Leibniz 的理性计算机器的梦想。

最后有一点值得一提，由于每一个可证明的命题，在它的许多证明中必定有一个最短的，又由于给定长度的证明个数（至多）只有有限个，因此必定有一些结论正确的定理，它们不可能在人类的有生之年内按传统的论证方法加以证明。于是，看来有一些数学定理，如果我们不愿等得太久，是只能借助于计算机进行证明的。

1.4 数学中的试验

数学中某些分支需要试验才能进行研究。计算机的出现意味着数学中的试验范围将大为增加。在以上几节中，我们已经说明试验被用来提供使猜想成立的支持数据，并且在

某些情况下还被用来证实定理。Eular 在强调数学中观察的必要性时曾说过:“我们知道的那些有关数的问题往往是通过观察而发现的，而且是远在用证明确认它们的正确性之前就发现的……”

计算机的绝对速度意味着一些过去要用一生时间才能完成的计算，现在只要用几个小时甚至几分钟就能完成。再加上以下事实:如果需要的话，结果常可用图像形式表示而不用一列数来表示，所以对试验结果作出解释更为容易。复值函数的迭代说明了这一点。

当然，对一种约束的放松往往会出现矫枉过正的情况。计算能力的提高并不意味着每一件事情都能够或应该加以计算，这里有一种平衡，需由经验来加以指导，那就是在解决一个问题或发现一个有用的事实时，所涉及的努力和费用必须与成功的可能性相平衡，为计算而计算是不足取的。

虽然试验方法在纯数学中也有用，但也许它的用武之地特别是在统计领域。我们举两个例子。

模拟

即使在应用近代计算技术之前，为了研究如何在概率模型的假定下使用统计技巧，试验样本和 Monte Carlo 方法已经在统计中起着重要的作用。计算机的出现更增强了这一作用。一个著名的例子就是普林斯顿体力强度的研究(Andrews 等, 1972)。它是对一组不同模型假定下的各组估计量通过计算机模拟进行研究。其结果已经刺激了对体力强度估计量的新的数学研究(例如，渐近理论)，但另一方面，不能仅仅把它们解释为可以而且应该用数学来证实的猜想，它们还有其自身的重要性，并已影响了数据分析的实践。

探索性数据分析

时而有一种说法，说计算机完成的是从冥思苦想到一种无意义的实例计算和试验的讨厌的转换。一种比较公允的说法是，计算机导致形式多样的“推理型”方法以接近问题，而且在每种情况下必须判断哪种方法更合理。

应用统计的典型做法是首先努力地思考，而后构造概率模型并设计收集数据的适当步骤。但这种做法，在许多对数据或所涉及的系统几乎没有什么了解的情况下都是行不通的。随着计算机的数值计算和绘图能力的开发，一种称为探索性数据分析的新的数据分析方法 (Tukey, 1977) 已经发展起来了。计算机有可能对已知数据集合试验多种模型，构作与数据有关的图形的各种样式以获得对数据的模式、结构和非正规性的见解，并且对数据系统的特征作出某些猜想。这类探索性的数学，不用计算机是无法在大范围内进行的。

1.5 迭代方法

线性方程组的解法通常分为：(i)直接法；(ii)间接法，也就是迭代法。直接法中包括 Gauss 消去法，间接法中包括 Gauss-Seidel 方法。直接法有如下优点：(a)若解是存在而

且唯一的，则用这种方法总能求出解，并且在每一步保持解的足够的精确度。(b)经过已知步数的运算之后，即可求出解。直接法的缺点是，非常大稀疏方程组，例如由微分方程组的有限差分逼近得到的方程组，在用消去法时会很快变得不怎么稀疏，因而要求贮存个数(对 n 个方程来说)为 n 的几倍，有的甚至达到 n^2。另一方面，迭代法可能不收敛到一个解，即使收敛，也不明确多少步运算之后才能达到所要求的精度。然而在应用计算机之后，迭代方法却能充分发挥其特长并自始至终保持系数矩阵的稀疏性。

对非线性方程组，直接解法是很难得适用的；说到底，用直接法无法求解一般的多项式方程，即使只有五次也不行，因此通常都采用迭代法。像线性方程组一样，尽管收敛条件通常是知道的，其收敛性仍不能保证；并且在某些情况下，达到预先给定精度的迭代次数可能不易预定，但这并不重要，因为如果时间有限制，也可以用快速技巧予以解决。

由于计算机的使用，带来迭代方法的重新兴起，导致对迭代函数的研究取得重要进展。迭代函数就是如下形式的函数：

$$Z_{n+1}=F(Z_n),$$

这里 Z_0 是给定复数，函数 $F(Z)$ 可能含有一个或多个参数。某些这种类型的函数，如

$$Z_{n+1}=Z_n^2+C,$$

在 60 年前就由 Julia(1918)和 Fatou(1919) 研究过，但那时没有引起足够的重视。在函数 $F(Z)$ 含有复参数 C 的情形中，定义点集 K_C，它由使得点列

$$Z, F(Z), F(F(Z)), \cdots$$

不趋于∞的点 Z 组成，K_C 的边界称为关于 $F(Z)$ 和 C 的 Julia 集。只是在最近，由于计算机，特别是彩色图像终端的应用，我们才对 Julia 集的异常性态和它们众多的衍生形态有所认识。例如，Mandelbrot 集定义为使得 K_C 连通的所有参数 C 构成的集。当 Z_n 是由上述二次多项式 F 定义时，则它相应的 Mandelbrot 集的边界是一条分形(Fractal)曲线。这一发现归功于 Mandelbrot，它启发 Douady，Hubbard 等开展了引人入胜的研究（West，参考论文）。

1.6 算法

算法就是解某一特定问题或一类问题的过程。算法概念在二千多年前就已出现（如求两整数的最大公因子的 Euclid 算法），近年来，由于计算机的引进，算法又唤起了人们的极大兴趣。它不仅应用在数学上，而且在技术、自动化、商业、贸易、经济和社会科学等领域中有着广泛的应用。对许多同类型问题已经开发了很多计算机算法。某些情况下，可用多种算法解决同一问题，诸如将名字按字典顺序排列或求一个矩阵的逆矩阵。此时，人们选择的算法，不仅要能解决问题，而且还要是符合要求的好几种算法中“最佳”的一个。有些算法虽节省了运行时间，但可能浪费了内存空间，或者是反过来的情况，这就需要找出与一个或多个参数有关的最优的或至少是有效的算法，由此开辟了复杂度理论的研究。

快速 Fourier 变换将时间复杂度从 n^2 阶降为 $n\log n$ 段，对于较大的 n 值，这有很重要的实际意义。最近，能有效地在几台信息处理器上并行运行的算法的设计问题受到极大的重视。在单个信息处理器上理想的算法，在几台并行的信息处理器上运行可能效率很低，甚至完全失败。因而设计适当的并行算法，即使对最普通的问题来说也是一个值得研究的课题。

1.7 符号处理系统

用计算机来处理符号而不是处理数，从而提供给用户可进行代数运算和不定积分的软件包，这在计算机发展的早期就已引起重视，60 年代初就出现了诸如 ALPAK 和 Slagle 的 SAINT(Slagle,1963)这样的软件包。这些软件包不仅具有实用性，而且已被广泛地使用。1960 年左右，Lajos Tokacs利用 ALPAK 去执行某个非常乏味的涉及 1200 项的代数运算，去寻求排队理论中的二次等候问题的解，这个问题对 Bell 实验室至为重要。没有人愿意，也没有人能用手工计算去完成这样的工作。当二次等候问题的解最终被求出时，它已约化为仅有的三项，之后又得出了简短的数学推导，于是一般理论也得到了发展。有两点值得一提：在利用 ALPAK 进行运算后，所求得的解的性态，激发数学家们去找出更为漂亮的推导过程——正如我们在 1.3 节中所说的那样；其次，倘若没有符号演算软件包，这个工作完全不可能进行。

另一个早期系统，FORMAC，被用来解决三体问题的某些特殊情形。近来，G. E. Andrews(1979)利用它去验证平面分划理论中出现的两个 752 项多项式是恒等的。

某些符号演算软件包虽具有一般性，但更多的是为特殊应用而准备的。正如我们前面所提到的 CAYLEY 演算系统被广泛地应用于有限群的研究和教学上。另一些特定的系统包括 MATRIX，REDUCE(Fitch, 1985)，MACSYMA(Pavelle 和 Wang, 1985)；更多常用的代数系统总结在 Pavelle 等人(1981)的文章中，一个更一般的联系逻辑、数学和计算机科学的系统是 Automath(de Bruijn，参考论文)。

当许多系统执行那些枯燥的演算任务时，它们的基础却不一定是平凡的数学。符号积分的进展，特别令人惊奇。这种积分理论的完备形式归功于 Liouville(1833)，它在法国的讲坛上风行将近 50 年(至 1880 年)，然而在新的材料冲击下，它在 Hermite 的《分析教程》一书中却销声匿迹。计算机的出现，使人们对这一理论重新产生了兴趣，最近设计的软件(Davenport，1982)解决了这方面的问题，而 G.H. Hardy 1916 年对此问题发表看法时曾说过："有理由相信此路不通。"这种类型的积分软件包的操作技巧非常复杂，超出大多数用户的经验。

另一个极为实用的例子值得一提。利用一个软件包，可以对一个区域上的微分方程的求解产生一个有限差分格式，对每一个网元求出它的解，并分析逼近的 Fourier 稳定性(Wirth, 1981)。这涉及高级数学和高级程序。

如上所述的软件包的实用性，不仅将数学家从大量沉闷演算中解放出来，并且鼓励他们去探讨至今看上去仍难以处理的问题，甚至会导致新的重要进展，就像利用 ALPAK 和驳斥 Hardy 的评论。

1.8 计算机与数学交流

当个人对一个结果的证明（否定或猜想）感到满意时，还必须与其他数学家交流，才能获得数学界的承认。数学交流可以有不同的形式（尽管这样分类不是固定的）。

通信——A 写信给 B 交流这一结果。

公布——A 将结果写在墙上（用原义或隐喻），以便他人去读。

私人出版物——常见形式是技术部分的报告，宣告结果的存在。

公开出版物——杂志或著作。

数学交流可以使要用其结果的数学家直接或间接地收到它。

计算机辅助文字处理和照相复制明显改善了数学交流的视觉形式（特别是公开出版物）和它的经济情况。对数学家（特别是编辑）而言，可能需要阅读文字处理系统的输入。但计算机技术具有很强的更新能力，并正在更新，其范围远不止于此。

通信 电话没能给数学交流带来重大的改观（尽管它使数学管理和数学家的通讯较为容易）。因为它对传递公式或图表很不方便。电报也很少被采用。

人们被迫采用传统的通信方式交流，出于数学家无法控制的因素，这种服务年复一年地变得越来越糟。剑桥和伦敦的数学家过去只要一天就可交换三封信，而今需要一个星期才能做到，这不仅使思想的联系花费很长时间，而且会失去新奇的灵感。

计算机网络解决了这个问题，"电子邮递"代替了"手工邮递"，高带宽网络，如 ARPA 网是"异常迅速的"，而低带宽网络，如 CS 网能联接美国大部分计算机科学系，JA 网能连接联合王国的许多研究所，它能日夜传递，通常只要花几小时。

例如，Davenport 在剑桥（英格兰）利用文本处理系统写一篇文章后，用三个网络将结果送往 New York 的 Coppersmith，一天之后就得到了校正和扩充。

公布 计算机网络除了在本部门或其他地方的布告栏上可以书写证明（或更可能只是包含证明的技术报告的通告）外，还可提供电子"布告栏"到各个"预定"的地点。在北美的某些计算机科学领域中，多数结果都在这种电子布告栏中宣布。

私人出版物 这与前文联系紧密。该网络也将电子"新闻信件"分发给个别预定者，它经常包含草稿形式的长篇文章，陈述猜想或问题。

公开出版物 这方面的形式没有更多的直接影响。虽然也曾谈到，但尚未将电子方法应用于杂志中。

所有这些方法都在于传播信息给接受者。有时接受者能直接使用这些信息。通常，接受者只在以后才需要或者只知道"我在……上看到过某种结果"或"在……上有些什么"。

前者比较难以回答，除非能记住在哪里看到过。检索特殊的杂志相对来说容易些。要找出一年以前贴在布告栏里的内容几乎是不可能的。倘若保存专门的档案，一年以前的电子布告栏中的内容只要利用适当的程序即可找出。

检索特殊专题中的信息是非常艰难的。像美国数学会那样的分类目录必然过于广泛，将导致限定范围的困难，而这正是在寻查信息之前必须掌握的。这个领域被称为"信息检索"。《数学评论》在过去的十一年这样做了。根据题目、关键词或评论能找出许多必要的文章来。Davenport 将一个问题转化成另一个不同领域中的问题，就是两次利用这种方法所得到的很好结果。一旦这种方法与引用由计算机产生的索引相结合，即使它们散布在许多论文中，我们也能够发现其各种推广(或反驳)。Kessler 已于 1965 年在麻省理工学院建立了这种物理文献信息检索系统(Kessler, 1965)，计算机科学方面由 churchhouse 于 1966年在联合王国 Atlas 实验室里发明了 (churchhouse 1969)。如果由题目、关键词、参考文献等等构成的数据库以及最重要的能自动地生成数学杂志上的引用论文索引，能通过计算机网络而获得，那必将大大地节省数学研究中由于大量重复发现所浪费的时间。建立并维护信息检索系统的任何一个步骤都将是令人鼓舞的。

1.9 智力，经济和社会方面的危险

在斯特拉斯堡专题讨论会的一篇论文中，Atiyah 注意到了由于大学、中学的学生广泛地使用计算机，可能给数学带来某种危险，该文已收入本书。我们相信，对此提高警惕是对的，但只有时间才能告诉我们事实真相以及不同国家之间的差异。然而，我们也相信，应用计算机给数学带来的好处将远远超过带来的危险，特别是在事先已有所警惕的情况下。

第二部分 计算机和计算机科学对数学课程的冲击

2.1 数学、科学与工程方面学生的共同数学要求

(a) 大学数学的准备

为了讨论计算机与计算机科学对数学课程和数学教学方法的冲击，应该从中学生需要什么样的数学讨论起，然后讨论大学数学课程。因为世界各地何时结束中学教育，何时开始大学教育有很大的差异，因此下面的意见必须因地制宜地进行解释。

代数是中学里传统的重点学科。抽象代数的原理在数学教育中的地位很可能愈来愈重要，因此在中学数学课程中代数仍然处于极其重要的地位。然而值得注意的是不应使学生完成大量的代数运算训练(例如在多项式代数中)，而应使学生懂得在许多场合下代数是解决问题的自然的工具。但是运用公式和其他代数表达的能力将仍是必需的。

近年来，有一种趋势，那就是 Euclid 平面几何的许多内容已经被与代数密切有关的

那些几何内容所替代。这作为大学数学的准备是有用的，但从数学教育角度来看，欧氏几何的衰落是一种糟糕的趋势。在中学和大学里怎样教几何最好，还没有取得一致的意见。然而，应该指出有些计算机科学家感到传统几何教学中所包含的严格证明训练可以通过算法验证来完成。

对于数学的许多内容来说，三角仍然是有用的准备。但我们要指出：许多在过去是必要的乏味的数字和符号的计算工作，现在或不久的将来能在手提式计算机上完成。

下面谈谈微积分。多年来，在许多国家中微积分已成为那些准备进大学学习的中学生的学习内容，然而在另一些国家中，只有少数最好的学生才能在中学里开始学微积分。中学微积分主要成果是为学生提供了一种技巧，使那些准备在大学里学数学的中学生在概念上有所准备。现在的许多用计算机教微积分的工作(见 2.2(b))，对于中学教学可能比对大学教学更有用武之地。

近些年来，许多新的内容进入中学数学课程。其中概率已进入许多国家的课程。这次会议认为在中学里教离散概率空间、二项分布及有关内容比教统计更有用。因为在中学里教统计太难(然而，介绍一点数据分析(见第 26 页附录(b))，在中学水平是非常合适的)。另一个我们将进一步讨论的，也是我们希望更多地列入中学课程的内容是离散数学，包括初等计数、数系(非十进制的)、二项式定理、归纳和递推。在这方面，引入一些诸如分类算法这样的重要算法的设计和论证是合适的。

对于中学生来说，关于计算机本身我们应做些什么呢？这是一个很难回答的问题。在微积分教学中用计算机的可能性上面已提及，也需考虑用计算机进行算法方面的教学。要当心不要把计算机仅仅看作是一种玩具，而应该把它放在计算机科学确是一门科学的背景里来加以介绍。

对于几乎所有上述内容，我们可以通过数学模型和实际问题继续讨论如何实干。但我们要指出，对于上面提到的每一件事，教师的培训已是令人望而生畏的问题。我们应该从 60 年代“新数学”的经验中吸取教训，要避免一下子想得到太多。

(b) 大学数学课程

多年来，大学数学课程的核心是微积分，其次是线性代数。不管学生在中学里已经学过多少数学，都是这种情况。计算机对于这类课程的影响主要在方法方面，而不是在内容方面。这就是说，计算机可以使经典的内容更有效地表示出来，使它变得更有趣，但是对于大学生一开始学哪些课程以及课程中的哪些内容比较重要，则计算机的影响甚微。有一个例外也许是符号数学系统(即“计算机代数”系统)，它的运算功能表明了对课程中某些部分运算技巧的要求的减弱(见第 26 页附录(a))。

然而，信息科学(即计算机科学)确实意味着核心课程内容的改变。这是因为信息科学需要高度的数学训练，但它需要的几乎全是离散数学而不是连续数学。因此，核心课程中传统的连续数学和离散数学之间的平衡问题正引起一场激烈的争论(见 Ralston