根据教育部最新教材编写

○国家骨干教师○全国特级教师○高考研究专家

高考考点总攻略

总审定○中科高考命题研究中心
总主编○耿立志

数学

排列组合与概率
平面向量
立体几何
三角函数
解析几何
集合·函数·数列
不等式

科学技术文献出版社

(京)新登字130号

《高考考点总攻略》

丛书编委会

序

对于即将参加高考的同学而言，最重要的无非是对各科知识体系的构建。只有具备完整的知识体系才能自如地应对各种考试，才能实现自己在高考中的成功。

这一切都需要从对一个个知识考查点的学深吃透开始。

没有“点”，便无以成“线”；没有“线”，便无以成“网”。没有一个个知识点的扎实理解，构建的知识体系就只是空中楼阁——尽管“欲上青天揽明月”，但仍必须一切从“点”开始。

正是基于这种现实考虑，本丛书将高考各学科分别拆分成不同的知识考查点，每个考点独立成书，同学们既可以“合之”为完整的知识体系，并进行补充和检测，也可以“分之”为不同的知识点而各个击破，从而在高考复习中便于学生根据个人情况灵活安排，真正实现了高考复习和日常学习的自主性。

一、考点点睛

考点该如何确立？是由最新的《考试说明》确定并从

教材讲解中进行筛选的。既然是应对高考，学习之前就必须先将考点弄清吃透。没有目标的学习会事倍功半，正如同没有“点睛”的龙不能飞一样。

“考点点睛”分为“知识盘点”和“方法整合”，既关注了基础知识的完整牢固，又强调了思维方式的科学迅捷，不仅有利于学生“记忆”，更有利于学生“巧记”；不仅指导学生“学习”，更指导学生“巧学”。

二、考例点拨

对考例的分析是必不可少的。本丛书精选高考例题并对之进行详解的目的，在于确认考点，透视设题思路，明确排障技巧，完善解题方法，捕获得分要点。通过对考例的点拨，学生就会熟知高考设题的方向，了解高考试题是如何与知识点相结合的。可以说，在“考点点睛”之后的“考例点拨”是给予学生的一把金钥匙。

三、考题点击

本丛书所选考题或者是各地历年高考题中对本知识考查点的涉及，或者是针对某些需要提醒之处的重点训练。“考题点击”是学生对知识点进行科学梳理之后必不可少的实战演练，有利于加深记忆，拓展思维，强化技法。

此外，考虑到不同层次学生的不同需求，本丛书又开辟了“创新拓展”版块，供学有余力的同学继续巩固提高。

本丛书命名为《高考考点总攻略》有两层意思：第一是本丛书每本书精讲一个考点，力争做到在这个“点”上讲通讲透；第二是学生经过本书点拨后即可学懂学透。

这个"点"，是水滴石穿中点滴之水的不懈，是点石成金中手指轻点的智慧，是点火燎原中星星之火无限潜能的释放，是京、冀、辽、吉、豫等各地一线名师联手对高中学习的重点点拨。

当然，再好的书也必须去学习才能体现它的价值，再美的愿望也需要同学们脚踏实地地从第一章读起。正所谓：

勤学如春起之苗，不见其增日有所长；

辍学如磨刀之砥，不见其损日有所亏。

开始读书吧！

耿立志

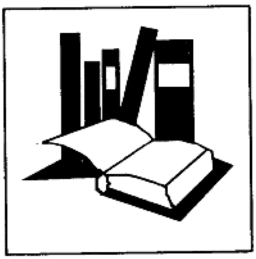
目 录

第一篇 基础达标

第二篇 创新拓展

第一篇

基础达标



一、考点点睛

知识盘点

1. 不等式的性质

(1)不等式的基本性质

设 a、$b\in R$,则 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$

不等式的基本性质是不等式性质及其证明的基础,是比较实数大小的依据.

(2)不等式的性质

①对称性 $a>b\Leftrightarrow b<a$

②传递性 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$

③加法法则 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$

$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

④乘法法则 $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

⑤乘方法则 $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in Z$,且 $n>1)$

⑥开方法则 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{a}(n\in Z$,且 $n>1)$

不等式性质是不等式证明和解不等式的依据,在不等式的性质应用中应注意其实用条件. 在不等式性质的学习中注意将不等式的性质与等式的性质进行类比,特别指出它们的区别,防止习惯性的迁移.

(3)均值不等式

①如果 a、$b\in R$,那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时,取"="号)

②如果 a、$b\in R^+$,那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时,取"="号)

定理主要应用于函数求最值及不等式的证明,运用定理求最值应注意

三个方面：

A. 应满足定理成立的条件；

B. 通过一定的变形使其和与积中有一方为定值；

C. 判定等号是否成立.

2. 不等式的证明

(1)比较法

①比较法又分求差比较法和求商比较法.

方法	求差法	求商法
理论依据	$a>b\Leftrightarrow a-b>0$ $a=b\Leftrightarrow a-b=0$ $a<b\Leftrightarrow a-b<0$	$a>b\Leftrightarrow \frac{a}{b}>1$ $a=b\Leftrightarrow \frac{a}{b}=1$ $a<b\Leftrightarrow \frac{a}{b}<1$
条件	$a、b\in \mathrm{R}$	$a、b\in \mathrm{R}^+$

②一般步骤

求差法：求差——分解因式或配方——判断符号

求商法：求商——变形——判断商与1的大小关系

③应用比较法应注意：

A. 综合运用函数的单调性；

B. 比较两个二次根式可比较其平方；

C. 求商比较应考虑正负.

(2)综合法

①以已经证明过的不等式为基础，再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式，这种方法叫做综合法.

②综合法证明思路：由因导果，也就是从已知不等式出发，不断用必要条件代替前面的不等式，直到推导出要证的不等式.

若 A 为条件，B 为结论，综合法的逻辑关系为：

$A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow B_3\Rightarrow\cdots\Rightarrow B$

③常用的基本不等式及其变形式

条　　件	结　　论
$a、b\in R$	$a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时，取“=”号）
$a、b\in R^+$	$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时，取“=”号）
$a、b\in R$	$(\frac{a+b}{2})^2\geqslant ab$（当且仅当 $a=b$ 时，取“=”号）
$a\in R^+$	$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$（当且仅当 $a=1$ 时，取“=”号）
$a\cdot b>0$	$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$（当且仅当 $a=b$ 时，取“=”号）
$a、b、c\in R$	$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ （当且仅当 $a=b=c$ 时，取“=”号）

应用综合法应注意常用的基本不等式及其变形式的实用条件.

(3)分析法

①从求证的不等式出发分析这个不等式成立的充分条件，把所证不等式的问题转化为这些条件是否具备，如果能够肯定这些条件都已具备，那么就可判定所证的不等式成立，这种证明方法叫做分析法.

②分析法的证明思路：“执果索因”，即从求证的不等式出发，不断用充分条件来代替前面的不等式，直到找到已知不等式.

若条件为 A，结论为 B，分析法的逻辑关系为：$B\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\Leftarrow B_3\Leftarrow\cdots\Leftarrow A$

③分析法证明不等式应注意：

A. 证明题书写格式及逻辑关系；

B. 分析法叙述较烦琐，也可用分析法探寻思路，用综合法叙述证明过程.

(4)反证法

从否定结论出发，经过逻辑推理，推出矛盾（包括已知矛盾或其他错误结论），从而肯定结论是正确的. 其理论依据是原命题与逆否命题等价.

(5)放缩法

通过适当的放大或缩小，利用不等式的传递性，把要证明的不等式转化为另一个不等式再加以证明. 运用放缩法的关键是放缩要适度.

(6)换元法

换元法是指通过恰当引入新变量化简原有结构，或转化为其他新问题. 例如将一般问题转化为三角问题.

(7)判别式法

把一元二次方程、一元二次不等式、二次函数的知识结合起来，借助判别式判定不等式是否成立.

比较法、综合法、分析法是不等式证明的最重要、最基本的方法，是高考考查的重点. 而反证法、放缩法、换元法、判别式法以及借助函数单调性证明不等式的方法是重要数学思想和方法在不等式中的应用，因此也是考查的重要内容.

3. 不等式的解法

(1)一元一次不等式的解法

一元一次不等式最终化为 $ax>b$ 的形式.

①$a>0$ 时，解集为$\{x\mid x>\frac{b}{a}\}$

②$a=0$ 时，若 $b\geqslant0$，解集为 $\varnothing$；$b<0$，解集为 R

③$a<0$ 时，解集为$\{x\mid x<\frac{b}{a}\}$

(2)一元二次不等式的解法

一元二次不等式经过变形化为 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$，借助二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的联系解不等式.

注意：一元二次不等式的区间端点恰为所求一元二次方程的两根.

(3)高次不等式的解法

化成$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)>0$(或$<0$)的形式，再将其各根 x_1、x_2、$x_3\cdots x_n$ 标在数轴上，最右边的区间为正，从右向左每个区间符号为正负相间，即可分区间写出解集.

(4)分式不等式的解法

解分式不等式的关键是同解变形为整式不等式，其方法如下：

$f(x)/g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$

$f(x)/g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

$f(x)/g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$，且 $g(x)\neq 0$

$f(x)/g(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\leqslant 0$，且 $g(x)\neq 0$

(5)绝对值不等式的解法

解绝对值不等式的关键是去绝对值符号．去绝对值的方法有：

①利用结论

A. $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a\ (a>0)$；

B. $|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a\ (a>0)$

②利用绝对值定义

$$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)<g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)>g(x) \end{cases}$$

③两边取平方

注意：②中的两种情况不能直接取平方，否则不是同解变形。

(6)无理不等式的解法

解无理不等式的思路是如何同解变形为有理不等式，变形方法有：

$$① \sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$$

$$② \sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g^2(x) \end{cases}$$

$$③ \sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

平方去根式应注意：①根式有意义；②不等式两边符号不确定时，应分情况讨论．

(7)指数不等式的解法

①利用指数函数的单调性；

②利用换元法．

当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$

当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

(8)对数不等式的解法

①利用对数函数的单调性；

②利用换元法(注意：真数大于零).

当 $a>1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$

当 $0<a<1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

对于一元二次不等式、简单的含绝对值不等式、简单的分式不等式的解法，学生在高一已经学过，在这里应达到正确、熟练的程度. 解其他各类不等式的关键要善于根据有关性质或定理，把它同解变形为一元一次、一元二次不等式. 变形的流向趋势是：

- 不等式
  - 超越不等式(三角不等式、指数不等式、对数不等式)
  - ↓
  - 代数不等式
    - 无理不等式
    - ↓
    - 有理不等式
      - 分式不等式
      - ↓
      - 整式不等式
        - 高次不等式
        - ↓
        - 低次不等式

4. 不等式的应用

(1)利用均值不等式求最值应满足

①各项均为正数；

②和或积为定值；

③等号必成立.

(2)一元二次方程根的分布的讨论方法

①利用韦达定理；

②结合二次函数图象寻求等价条件；

③利用求根公式.

(3)将函数的单调性及函数方程转化的思想运用到不等式的证明中.

(4)解实际应用题的关键是如何设未知量转化为不等式问题，应特别注意其中未知量的实际意义及取值范围.

方法整合

1. 不等式的性质是解不等式及证明不等式的理论依据，运用不等式的基本性质时应注意不等式成立的条件.

2. 比较两式的大小时，如果是和式，可采用求差比较法；如果是积或指数并且大于零，可采用求商比较法.

3. 在运用重要不等式时，要特别注意“拆、凑”等技巧，使其满足一正、二定、三相等.

4. 比较法是证明不等式最基本的方法，也是一种最常用的方法，变形的主要方向是分解因式、配方，然后判断各因式的正负.

5. 综合法证明不等式时，主要利用重要不等式、函数的单调性以及不等式的性质，在严密的演绎推理下推导出结论.

6. 分析法的思维是逆向思维，它能增大思维的发散量，克服思维定势的消极影响，有利于发展求异思维.

7. 放缩法是一种证题技巧，要想用好它，必须有目标，目标可以从要证的结论中寻找.

8. 三角代换可把一些不等式证明问题转化为三角问题，然后利用三角函数的有界性去证明.

9. 含字母不等式的证明有时可以化为一边为零，而另一边为某个字母的二次不等式，考虑判别式法.

10. 有些不等式从正面证明如果不易说清楚，可以考虑反证法.

11. 掌握一元二次方程，一元二次不等式与二次函数的根、解集、图象的关系，熟练运用函数、方程、不等式思想解题.

12. 高次不等式与分式不等式的解法通常是：使不等式一边为零，另一边分解为一次因式或二次不完全平方式的积的形式，然后用数轴标根法写出解集.

13. 解含有绝对值符号的不等式的主要思路是去绝对值符号，等价转化为不含绝对值符号的不等式求解，因此，掌握去绝对值符号的方法和途径是关键.

14. 数形结合是解不等式的另一重要途径.

15. 解答不等式的应用题，一般可分为如下步骤：

(1)领悟问题的实际背景,确定问题中量与量间的关系,明确解题的方向;

(2)把实际问题用"符号语言"、"图形语言"抽象成数学模式.

(3)讨论与结论有关的不等关系,得出问题的结论.

二、考例点拨

【例 1】 给出下列六个命题

①$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$ ②$ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$

③$a>b,c>d\Rightarrow a-c>b-d$ ④$a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$

⑤$a>b,ab\neq 0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ⑥$\sqrt{x+2}>x-1\Rightarrow x+2>(x-1)^2$

其中正确的命题是________

【解析】 本题考查的是不等式性质的应用，其中①中 c 可能为 0，④中不满足 $a>b>0,c>d>0$，⑤中 $a\cdot b$ 可正、可负，⑥中也不满足 $x-1>0$，不满足相应性质成立的条件，而③可化为 $a>b,-c<-d$，故不能得到 $a-c>b-d$.

【答案】 ②

【点评】 在运用不等式性质的推理过程中应注意不等式性质的条件是否具备.

【例 2】 若 $a>b>0$，且 $d<c<0$，则$\frac{\sqrt{a}}{c}$与$\frac{\sqrt{b}}{d}$的大小关系是________

【解析】 考查不等式性质的综合应用.

【答案】

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} d<c<0\\ -\frac{1}{dc}<0\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{1}{c}>-\frac{1}{d}>0 \\ a>b>0\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}>0\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{\sqrt{a}}{c}>-\frac{\sqrt{b}}{d}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$$

【点评】 灵活运用符号语言及不等式的性质.

【例 3】 已知 a、$b\in \mathrm{R}^+$，比较 a^5+b^5 与 $a^3b^2+a^2b^3$ 的大小.

【解析】 求差分解因式，判断各因式的正负.

【解】 $(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)$