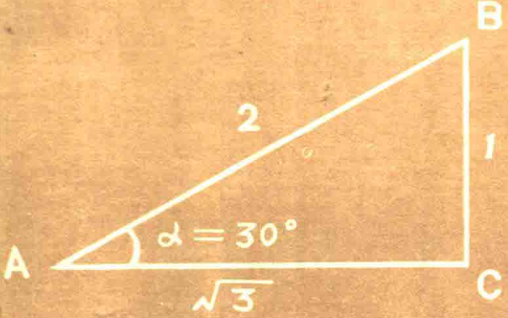
Zhongxue Kecheng Fudao Congshu



中学课程辅导丛书

高中三角疑难解析

彭咏松　冯善庆　王祖祥编著

湖北教育出版社

期

高中三[illegible]难解析

彭咏松　冯善庆　王祖祥编著

湖 北 教 育 出 版 社

改 版 说 明

本书一九八三年以湖北人民出版社名义出版，出版后受到读者欢迎。现根据读者要求重印，改由湖北教育出版社出版。

中学课程辅导丛书

高中三角疑难解析

彭咏松 冯善庆 王祖祥编著

封面设计：谢顺景

原湖北人民出版社

1983年1月第1版共印75,600册

·

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　7.25印张　161,000字

1984年2月新1版　1984年2月第1次印刷

印数：1—338,2?0

统一书号：7306·100　　定价：0.61元

出版说明

《中学课程辅导丛书》是我们中南五省(区)人民(教育)出版社继《中小学各科教学法丛书》协作出版之后，又一次协作出版供中学生学习用的丛书．丛书包括初、高中各科疑难解析共二十三种．初中部分有：语文、代数、几何、英语、物理化学、地理、历史、生物、政治，计九种．高中部分有：语文、代数、立体几何、解析几何、微积分、概率、三角、物理、化学、地理、历史、生物、政治、英语，计十四种．这套丛书计划在1983年2月以前基本出齐．

《中学课程辅导丛书》紧扣中学各科教学大纲和统编教材，按照中学生的一般水平，围绕重点，解决疑难，培养兴趣，发展智力，以期加强基础知识，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，都是执教多年，对本学科养之有素的教师和专门家．编辑方法，一般以教材为序，一个疑难点写一篇文章．有的用问答形式，有的用论证形式，各篇虽有些联系，但都可以独立成篇，篇幅长短不一，本着要言不烦的原则，当长则长，宜短则短，力求文字生动活泼，内容明白易懂，并富有启发性．

以上数端，只是我们编辑、作者的愿望，出书以后，成败利钝，还有待于在学习中检验．我们热切希望听到专家、老师和同学们的意见，以便再版时补充订正．

广东　广西　湖南　湖北　河南人民(教育)出版社

目　录

一　中学平面三角学概述

三角学的发展史告诉我们，三角学首先遇到的问题是已知三角形的某些元素，如何求出其它的未知元素. 为了解决这个问题，就要研究三角形各元素之间的关系，特别是边、角之间的关系.

在几何学里，我们已经知道，在任意三角形中：较大的边所对的角较大；反之，较大的角所对的边也较大. 但是这个定理只告诉了我们三角形中边、角之间的大概关系，是属于"定性"性的. 就生产实际和科学技术发展的需要而言，仅限于对这种定性关系的了解是不够的. 例如测量烟囱的高度，观测者已测得烟囱顶端的仰角和观测点到烟囱脚的距离，能否算出烟囱的高呢？要回答这个问题，就需要进一步对三角形的边、角关系作分析，找出它们之间的"定量"关系，即边、角间的数量关系. 怎样找这种关系呢？人们在长期的生产实践和科学研究中，总结了许多研究新问题的方法. 由特殊到一般的研究方法是其中之一. 三角学理论的研究就是遵循这一方法进行的.

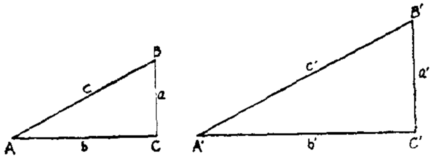
由于任何一个三角形都可以通过作边上的高，使其转化为直角三角形来研究. 因此，只要我们明确了直角三角形的边、角关系，任意三角形的边、角关系自然也就不难找出，基于这个原因，三角学的理论是从对直角三角形的研究开始的.

在直角三角形 ABC 中，设三边分别为 a、b、c，则可以得到下面的六个比值：

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{c}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{b}{a}.$$

这六个比值与角 A、B、C 有什么关系呢？我们不妨再作一个直角三角形 $A'B'C'$，设三边为 a'、b'、c'，又可得出下面相应的六个比值：

$$\frac{a'}{c'},\ \frac{b'}{c'},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{c'}{a'},\ \frac{c'}{b'},\ \frac{b'}{a'}.$$



(i)　　(ii)

图 1—1

我们知道，当 $A'=A$ 时，$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C' \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$. 根据相似三角形的性质，应有：

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'},\ \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'},\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},$$

$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'},\ \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'},\ \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}.$$

反之，若上述六个比例中有一个成立，则根据直角三角形相似的判定定理，$\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$. 于是 $A'=A$.

这就说明了：当角 A 一定时，比值 $\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{a}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{b}{a}$ 都是确定的，反之亦然.

为了在研究中便于区别各个比的意义，需要给与这个角相对应的各个比的名称，于是人们规定：

A 的对边与斜边之比叫做正弦，记作 $\sin A=\frac{a}{c}$，

A 的余角的对边与斜边之比叫做余弦，记作 $\cos A=\frac{b}{c}$；

A 的对边与邻边之比，叫做正切，记作 $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$；

A 的余角的对边与邻边之比，叫做余切，记作 $\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}$；

斜边与A的邻边之比，叫做正割，记作 $\sec A=\frac{c}{b}$；

斜边与A的余角的邻边之比，叫做余割，记作 $\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}$.

由于对不同的锐角，上述对应的比都有确定的值与之对应，这说明，每一个比都是锐角 A 的函数．因此，在三角学中，$\sin A$、$\cos A$、$\operatorname{tg} A$、$\operatorname{ctg} A$、$\sec A$、$\operatorname{cosec} A$分别叫做角 A 的正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数，而这些函数统称为三角函数．许多书上就是用这种方式定义三角函数的．

至此，容易看出，如果我们知道了直角三角形一锐角的某三角函数和它的一边，并利用勾股定理和同角三角函数的关系，就可以求出其它边来．那么怎样得到每一个锐角的三角函数值呢？为了便于应用，人们编制了三角函数表，需要时查表即可．懂得了这些知识和查表的方法，从应用的角度来讲，类似于测烟囱高的这类问题就完全解决了．从理论上讲就为我们进一步研究任意角的三角函数的问题奠定了基础．在初中大家熟知的、反映任意三角形边、角“定量”关系的正弦定理、余弦定理和面积公式正是以此为基础获证的．

关于任意角的三角函数问题，显然仅依赖于直角三角形是不够的．

在法国数学家笛卡儿创立平面直角坐标系以后，人们开始把几何图形置于坐标系中来研究．坐标法的作用是把几何元素——点，用一对有序实数来表示，从而建立起平面上的点与有序实数对之间的一一对应关系，为把几何问题转化为代数问题进行研究提供了方便．我们的教科书就是借助于坐标方法定义三角函数的．

把图 1—1(i) 中的直角三角形 ABC 放到直角坐标系里（如图 1—2），使 A 落在原点 O 上，边 AC 与 Ox 轴的正半轴重合，B 点落在第一象限内．于是 B 点的坐标为 (b, a)，而 $OB=c$ 恒为正，这时有 $\sin A=\frac{a}{c}$，

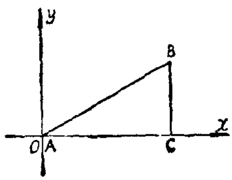


图 1—2

$$\cos A=\frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\, A=\frac{a}{b},$$

$$\mathrm{ctg} A=\frac{b}{a},\quad \sec A=\frac{c}{b},\quad \mathrm{cosec}\, A=\frac{c}{a}.$$

要注意的是，在这里 a，b 是表示数．

我们知道，对含有已知锐角 A 的直角三角形 ABC，$\sin A$、$\cos A$、$\mathrm{tg}\, A$ 等与三角形的大小是无关的．因此对任意锐角 α 的三角函数，如 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\,\alpha$ 我们就可以这样来定义：在锐角 α 的终边上任取一点 $P(x, y)$，

$$\sin\alpha=\frac{P\text{ 点的纵坐标}}{|OP|}=\frac{y}{|OP|},$$

$$\cos\alpha=\frac{P\text{ 点的横坐标}}{|OP|}=\frac{x}{|OP|},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{P\text{ 点的横坐标}}{P\text{ 点的纵坐标}}=\frac{x}{y}.$$

这样我们就从讨论直角三角形边、角关系出发，得到了任一锐角三角函数的坐标法定义．而锐角的终边始终是在第一象限，所以与前面的通过直角三角形边与边的关系定义锐角三角函数是无矛盾的．

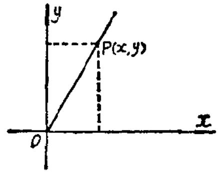


图 1—3

坐标法定义的好处在于，它可以推广到任意角 α 的情况．需要特别注意的是：锐角的三角函数值均为正，而除锐角外的其它角的三角函数值则可正、可负，也可能为零，至于具体情况则要看所论角的终边落在坐标系中的位置而定．

任意角三角函数的定义给出后，除要弄清同角三角函数之间的关系外，在理论上自然还要提出两个问题：第一，如何求任意角的三角函数值；第二，任意角的三角函数有什么性质．

第一个问题，诱导公式给了我们办法：利用诱导公式化负角的三角函数为正角的三角函数；化大于 360° 的角的三角函数为小于 360° 的角的三角函数；化钝角的三角函数为锐角的三角函数，再求值(主要是查表)．

第二个问题，主要是借助于三角函数图象的直观性，发现和研究了三角函数的下述几个性质：

(1) 增、减性，即函数图象在某区间上升、下降的情况．

(2) 有界性，即各函数值的变化范围；

(3) 奇、偶性，表现在图象上即是否关于原点的中心对称或关于 y 轴的轴对称；

(4) 周期性，反映在图象上的特点是，横轴每隔某定距离，图象重复出现．

函数的图象除有利于我们发现和研究这些性质外，还可以

加深我们对三角函数定义的理解和印证许多三角公式，帮助我们记忆这些公式.

至于三角函数图象的作法，课本上介绍了两种：几何作图法——在单位圆上，通过函数线的移动，确定图象上的点作出图象；描点作图法——确定正(余)弦函数图象与坐标轴的交点和极值点，作出图象. 因为共有五个点，课本上叫"五点法"作图. 这两种作图方法各有优点，前者准确，后者迅速. 在精确度要求不太高的情况下，一般用后一种方法.

单变量的三角函数讨论完毕之后，无疑会要提出多变量函数的问题. 根据研究单变量三角函数的经验，首先应该研究两角和(差)的正、余弦函数. 我们的课本借助于坐标法和两点间的距离公式，首先论证了 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$. 这个公式揭示了两角差的余弦函数与这两个角的正、余弦函数之间的关系，更重要的是我们研究两角和（差）的其它函数的基础，是推导倍角、半角公式以及和积互化公式的依据. 如果令 $\alpha=90°$，$180°$，$270°$，$360°$ 以及它们的整数倍，又易知诱导公式是和、差公式的特例.

上面的概述主要是就一个三角函数式或就其变形来说的. 但是要借助数学方法完成从未知向已知的转化，达到认识客观事物的目的，还必须研究两个三角函数式之间的关系. 而两个三角函数式之间的关系只有两种可能：或为相等，或为不等. 在两个三角函数式相等的情况下，又分为有条件相等和无条件相等这两种等式. 前者就是三角方程，后者就是恒等式；在两个三角函数式不等的情况下，也分为有条件不等和无条件不等；前者就是我们通常所说的三角不等式. 从解决实际问题的需要看，有条件的等式或不等式更为重要. 因此，对三角方程和三角不等式的研究是重要的. 但由于不等的问题一般都要通

过相等的问题来研究，所以三角方程和三角不等式比较起来，三角方程又是基础．而为三角方程的解的表达问题，不可避免的又要研究反三角函数的问题．这就是教材在学习三角方程之前研究反三角函数的主要原因．

二 三角与平面几何、代数的联系与区别

前面我们对三角学这门课程的研究方法、对象和知识结构作了概要的说明，从中可以看出，三角学的基本理论是以相似三角形的性质为基础建立起来的，在发展过程中又和圆的有关性质紧密相联，而它的表达和处理方式，又是代数的．因此可以说，三角学是初步把代数和几何联系起来了．正因为建立了这种联系才能从几何学中的一些“定性”关系的认识发展到“定量”关系的认识，也正因为建立了这种联系，三角学才有可能逐步发展成为一门独立的科学．

三角学与代数的主要联系表现在：

1．**坐标方法**：通过坐标法，建立平面上的点与有序实数对的对应关系，将有向线段的比数值化，使三角函数能脱离几何图象，用代数方法来进行研究；

2．**函数及反函数的概念**：作为初等函数之一的三角函数的概念，与一般函数概念的关系是共性与个性的关系．因此，三角函数与反三角函数的概念分别从属于函数与反函数的概念．

3．**三角函数式的恒等变形与代数式的恒等变形的联系与**

区别：恒等变形在数学中有着非常重要的地位，通常我们遇到的恒等式的证明、化简、求值都是恒等变形．即使在解方程中也要用到恒等变形．

如果把三角函数式中的三角函数看作一个字母，则代数中的所有公式、恒等变形的方法都可以用到三角的恒等变形中去．但是由于三角学本身有许多公式，如同角三角函数关系式，诱导公式，和、差、倍、半公式，和积互化公式等等的建立，使三角恒等变形的内容更广，方法和技巧也更多．例如，$\sin x+\cos x$ 仅用代数的方法就无法化简了，如果利用三角本身的一些方法和特有的技巧，则可以变形为 $\sqrt{2}\sin(45^\circ+a)$，而这种变形对于计算、化简以及探求函数的性质都是非常重要的．

三 怎样才能学好三角？

前面一个问题的分析告诉我们，要学好三角，首先必须牢固地掌握：相似三角形和圆的一些基本性质；坐标平面上有向线段，点、有序实数对之间的对应关系；函数、反函数的基本概念；代数恒等变形的基本公式和方法．如果对这些知识有了深刻的理解，在学习三角时，主要精力就只需注意三角学本身的特性了．

在学习中要特别注意的是：三角函数的两种定义——坐标法定义和单位圆内三角函数线定义，它们是研究三角函数基本理论的出发点，是推导所有三角公式的基础，也是直接用来解答数学问题的重要依据；三角公式很多，切不可死记硬背，关键

是要弄清楚每个公式的来龙去脉，分清主次，抓住重点，并在解题的实践中加深认识，学会灵活运用.

此外，充分利用三角中的图形，可以启发我们去发现、推导许多三角公式，借助于三角函数的图象的直观性去发现和探讨三角函数的性质；帮助我们检验三角方程的解、三角不等式的解的正、误及解的等效性等．因此，在整个学习过程中切不可忽视图形的作用．读者也可以从本书的有关问题的解析和例说中看到这种作用.

四　何谓任意角？在学习任意角的概念时应注意哪些问题？

在平面几何中，把角看成是由一点引出的两条射线所组成的图形．这种用静止的观点定义角的概念在实际应用时有很大的局限性．例如，机器轮子绕轴旋转一周后继续旋转，以及按不同方向旋转所得到的角，就无法用两条射线来表示和区分．为了研究和处理这类运动变化着的事物，还必须用运动、变化的观点来定义角的概念．于是在三角中，我们把角看成是平面上的一条射线绕着某一点旋转所成的图形．当射线绕着这一点旋转一周以上时，就形成了大于 360° 的角．例如，$\angle AOB$ 就表示一个大于 360° 的角(图 4—1)．它是由一条射线从 OA 的位置开始，绕着端点 O 旋转两周后再旋转到 OB 而形成的角．O 叫做角的顶点，OA、OB 分别叫做角的始边和终边．我们还可以看到，角的形成具有方向性．例如，图 4—2 是相互啮合的两个齿轮，其中一个旋转一个角，另一个也旋转一个角，