O122/55

中学生课外读物

算术根与绝对值

孙家钰

含绝对值的方程

俞裕安

不等式·函数图象

娄桐城

北京师范大学出版社

算术根与绝对值

孙家钰　俞裕安

含绝对值的方程不等式　函数图象

娄　桐　城

北京师范大学出版社

算术根与绝对值
孙家钰　俞裕安
含绝对值的方程 不等式 函数图象
娄桐城
•
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
交通出版社印刷厂印刷
•
开本：787×1092　1/32　印张：5　字数：105 千
1987 年 4 月第 1 版　1987 年 6 月第 7 次印刷
印数：1—12,500
统一书号：7243·329　定价：0.80 元

目　　录

算术根与绝对值

含绝对值的方程 不等式 函数图象

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

算术根与绝对值

孙家钰　俞裕安

一、问题的引入

设一只蚂蚁的重量为 x 斤，一头大象的重量为 y 斤，蚂蚁与大象重量之和为$2n$斤．我们进行下列的运算：

$\because \quad x+y=2n,$

$\therefore \quad x-2n=-y \qquad (1)$

又 $\quad x=-y+2n \qquad (2)$

（1）×（2），得

$$x(x-2n)=(-y)(-y+2n),$$

$$x^2-2xn=y^2-2yn \qquad (3)$$

（3）两边加上 n^2，得

$$x^2-2xn+n^2=y^2-2yn+n^2,$$

$$(x-n)^2=(y-n)^2 \qquad (4)$$

（4）两边开方，得

$$x-n=y-n,$$

$\therefore \quad x=y.$

怎么蚂蚁的重量与大象重量相等了呢？上面运算过程什么地方发生了问题？

让我们再举出一例．

若 $x=-7$， $\quad \therefore \quad x+7=0 \qquad (1)$

（1）两边乘以$x-3$，得

$$(x+7)(x-3)=0,$$

$$x^2+4x-21=0,$$

$\therefore \quad x^2+4x=21 \qquad (2)$

（2）两边加上4，得

$$x^2+4x+4=25,$$

$$\therefore \quad (x+2)^2=25 \qquad (3)$$

（3）两边开方，得

$$x+2=5,$$

$$\therefore \quad x=3.$$

怎么 $x=-7$ 变成 $x=3$ 呢？问题出在哪里？

以上两个例子，发生错误的原因是一样的，是由于算术根与绝对值的概念不清楚之故。

在第一个例子中，由（4）

$$(x-n)^2=(y-n)^2$$

两边开方，得

$$\sqrt{(x-n)^2}=\sqrt{(y-n)^2},$$

$$\therefore \quad |x-n|=|y-n|,$$

$$\therefore \quad x-n=y-n,\ x-n=-(y-n).$$

由 $x-n=y-n$，得 $x=y$。

蚂蚁的重量显然不能等于大象的重量，所以 $x=y$ 不合题意，舍去不要。

由 $x-n=-(y-n)$，得 $x+y=2n$。这正是题目所给的蚂蚁与大象重量之和为 $2n$ 斤。

在第二个例子中，由（3）

$$(x+2)^2=25$$

两边开方，得

$$\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{25},$$

$$\therefore \quad |x+2|=5.$$

$$\therefore \quad x+2=5,\ x+2=-5.$$

由 $x+2=5$，得 $x=3$。

由 $x+2=-5$，得 $x=-7$.

在前面运算中，丢掉了 $x+2=-5$，即 $x=-7$，这正是题目所给出的．而增加了 $x+2=5$，即 $x=3$，这正是题目所不需要的．问题也是发生在算术根与绝对值这里．

算术根与绝对值是中学数学里重要的概念．如果掌握的不透彻，运算中往往发生错误．我们有必要认真研究算术根与绝对值这两个概念，并能运用这两个概念正确地进行解题．

二、相反数与绝对值

5与 -5 这两个数，它们只有符号不同，一个数是正的，而另一个数是负的．同样象 $\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{2}{3}$，$\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$，π 和 $-\pi$ 这些数，也只有符号的不同．同时，我们还注意到，这些一对一对的数，在数轴上表示这两个数的点，分别在原点的两旁，离开原点的长度相等．

象这样只有符号不同的两个数，叫做互为相反数．

零的相反数是零．

任意数 a，都有 a 的相反数 b 存在，使得 $a+b=0$.

应当指出的是，任意数 a 的相反数是唯一的．

证明：设 b 与 b' 都是 a 的相反数，则有

$$a+b=0,\quad a+b'=0,$$

$$\therefore \quad a+b=a+b'$$

上式两边加上 b，得

$$(a+b)+b=(a+b')+b,$$

$$(a+b)+b=(a+b)+b'.$$

$\because$ $a+b=0,$

$0+b=0+b',$

$\therefore$ $b=b'.$

也就是 b 和 b' 是同一个数，即任意的一个数的相反数是唯一的.

正因为 a 的相反数是唯一的，所以可以用“$-a$”来表示 a 的相反数.

有了相反数的概念，就为引出绝对值的概念打下了基础.

一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数．零的绝对值是零.

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

由绝对值的概念，很容易地得出下面的性质：当 a 为任意实数时，有

（1）$|a|\geqslant 0$； （2）$|a|=|-a|$；

（3）$|a|\geqslant a$； （4）$|a|^2=a^2$；

（5）$|a|\geqslant -a$.

证明：（1）当 $a>0$时，$|a|=a>0$；

当 $a=0$时，$|a|=0$；

当 $a<0$时，$|a|=-a>0$.

$\therefore$ $|a|\geqslant 0$.

因为 a 为任意实数，所以研究这一类问题时，常常将 a 分为大于零、等于零、小于零这三种情况分别加以讨论.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（2）$a>0$时，有$-a<0$。

当$a>0$时，$|a|=a$。

$\because\ -a<0$，$\therefore\ |-a|=-(-a)=a$。

$\therefore\ |a|=|-a|$。

当$a=0$时，

$\because\ |a|=0$，$|-a|=0$，

$\therefore\ |a|=|-a|$。

当$a<0$时，

$\because\ |a|=-a$，$|-a|=-a$，

$\therefore\ |a|=|-a|$。

所以，当a为任意实数时，有$|a|=|-a|$成立。

（3）当$a>0$时，$|a|=a$；

　　当$a=0$时，$|a|=a$；

　　当$a<0$时，$|a|=-a>0$。

$\because\ a<0$，$\therefore\ -a>a$。

这样有$|a|=-a>a$。

所以$|a|$不是比a大，就是等于a，也就是$|a|\geqslant a$。

（4）当$a>0$时，$|a|=a$。

等式两边平方，得$|a|^2=a^2$。

当$a=0$时，$|a|=0$。

同样也有$|a|^2=a^2$。

当$a<0$时，$|a|=-a$。

等式两边平方，得$|a|^2=(-a)^2$，这样有$|a|^2=a^2$。

根据以上分析得出$|a|^2=a^2$。

（5）当$a>0$时，$|a|=a$。

$\because\ -a<0$，$\therefore\ |a|>-a$。

当$a=0$时，$|a|=0$。

$\because \quad -a=0$，$\therefore \quad |a|=-a$。

当 $a<0$时，$|a|=-a$。

根据以上分析得出$|a|\geqslant -a$。

相反数具有什么性质呢？

（1）若 a 与 b 互为相反数，则 $a+b=0$；若 $a+b=0$，则 a 与 b 互为相反数.

（2）$a-b$ 的相反数为 $b-a$。

（3）$|a|$的相反数为$-|a|$。

（4）若 $a\neq0$，a、b 互为相 反数，则$\frac{a}{b}=-1$.

例1 在什么条件下，$a-b$ 的相反数等于 $a-b$？

解：只有零的相反数才是本身，因此 $a-b=0$.故当$a=b$时，$a-b$ 的相反数等于 $a-b$。

例2 （1）在$a\neq0$ 时，$\frac{2}{a}$有没有相反数，若有等于什么？

（2）$\frac{2}{a}$的相反数能不能是$\frac{2}{a}$？为什么？

解：（1）当 $a\neq0$ 时，$\frac{2}{a}$有相反数，相反数是$-\frac{2}{a}$.

（2）只有零的相反数才能是本身，而当 $a\neq0$ 时，$\frac{2}{a}$不能等于零，所以$\frac{2}{a}$的相反数不能是$\frac{2}{a}$.

例3 指出下列各式中哪些是正确的？哪些是不正确的？不正确的应如何改正？（a，b 均为任意实数）.

（1）$|a+1|=a+1$；（2）$|a-b|\geqslant a-b$。

解：（1）不正确．当 $a+1<0$，即 $a<-1$ 时，$|a+1|=-(a+1)$．

正确结论为：当 $a+1\geqslant 0$时，$|a+1|=a+1$；当$a+1<0$时，$|a+1|=-(a+1)$．

（2）当 $a>b$ 时，$|a-b|=a-b$；

当$a=b$时，$|a-b|=a-b$；

当$a<b$时，$|a-b|=-(a-b)$．

$\because\quad a<b$，

$\therefore\quad -(a-b)>0$，$a-b<0$，

$\therefore\quad |a-b|>a-b$．

根据以上分析，我们可以得到$|a-b|\geqslant a-b$．所以这道题是正确的．

例4 在什么条件下等式$\left|\dfrac{a-b}{a}\right|=\dfrac{b-a}{a}$成立？（$a$，$b$ 均为实数，$a\neq 0$）．

解：$\left|\dfrac{a-b}{a}\right|=\dfrac{b-a}{a}=-\dfrac{a-b}{a}$．

只有在一个数为负数或零的情况下，这个数的绝对值才能是它的相反数，因此可以得到

$$\frac{a-b}{a}\leqslant 0．$$

这样有$\begin{cases}a-b\geqslant 0,\\ a<0,\end{cases}$　$\begin{cases}a-b\leqslant 0,\\ a>0.\end{cases}$

即 $b\leqslant a<0$ 或 $b\geqslant a>0$．

以上几个例子告诉我们：运用绝对值定义解题时经常使用“零点分段法”．下面让我们再举出两个例子，说明怎样运用这个重要的方法．

例5 化简$|2a+3|+|a+2|$。

解：$2a-3$的零点，即由$2a-3=0$，得$a=\frac{3}{2}$。再由$a+2$的零点，即由$a+2=0$，得$a=-2$。

找出零点是-2，$\frac{3}{2}$后，按下面所分出的区间进行讨论。

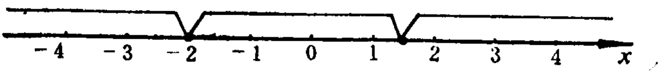

图 1

（1）当$a\geqslant\frac{3}{2}$时，

$\because$ $|2a-3|=2a-3$，$|a+2|=a+2$，

$\therefore$ $|2a-3|+|a+2|=2a-3+a+2=3a-1$。

（2）当$-2\leqslant a<\frac{3}{2}$时，

$\because$ $|2a-3|=3-2a$，$|a+2|=a+2$，

$\therefore$ $|2a-3|+|a+2|=3-2a+a+2=5-a$。

（3）当$a<-2$时，

$\because$ $|2a-3|=3-2a$，$|a+2|=-a-2$，

$\therefore$ $|2a-3|+|a+2|=3-2a+(-a-2)=-3a+1$。

例6 在什么条件下，不等式$|a|>|a-1|$成立。（a为实数）

解：a的零点是零，$a-1$的零点为1。找出零点是0，1后，可以按照下面所分出的区间进行讨论。

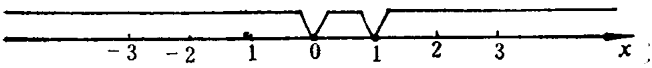

图　2

(1)当$a \geqslant 1$时，

$|a| = a$，$|a-1| = a-1$，

$\because \quad |a| > |a-1|$，

$\therefore \quad a > a-1$，

$\therefore \quad 0 > -1$。

这是一个永远成立的不等式。因此在$a \geqslant 1$时，$|a| > |a-1|$一定成立。

(2)当$0 \leqslant a < 1$时，

$|a| = a$，$|a-1| = 1-a$，

$\because \quad |a| > |a-1|$，

$\therefore \quad a > 1-a$，

$2a > 1$，

$a > \frac{1}{2}$。

又因为$0 \leqslant a < 1$，所以在$\frac{1}{2} < a < 1$时，有

$|a| > |a-1|$。

(3)当$a < 0$时，

$|a| = -a$，$|a-1| = 1-a$。

$\because \quad |a| > |a-1|$，

$\therefore \quad -a > 1-a$，

$\therefore\quad 0>1$.

$0>1$这个不等式显然是矛盾的，所以当$a<0$时，$|a|>|a-1|$不成立。

由（1）、（2）可知，当$a>\frac{1}{2}$时$|a|>|a-1|$成立。

例7　若a，b互为相反数，化简$\frac{ab+1}{b+1}$。

解：因为a，b互为相反数，所以有$a+b=0$。这样在$ab+1$中可以加上$a+b$，而值不变，然后通过因式分解的方法将这个分式化简。

$$\frac{ab+1}{b+1}=\frac{ab+a+b+1}{b+1}=\frac{(a+1)(b+1)}{b+1}$$

$$=a+1.$$

例8　a为何值时，方程组

$\begin{cases}3x-ay=5,\\4x+y=3\end{cases}$的解为相反数？

解：
$$\begin{cases}3x-ay=5, & (1)\\4x+y=3. & (2)\end{cases}$$

（1）×4，得

$$12x-4ay=20 \qquad (3)$$

（2）×3，得

$$12x+3y=9 \qquad (4)$$

（4）－（3），得

$$3y+4ay=-11,$$

$$(4a+3)y=-11.$$

当$4a+3\neq0$，即$a\neq-\frac{3}{4}$时，有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com