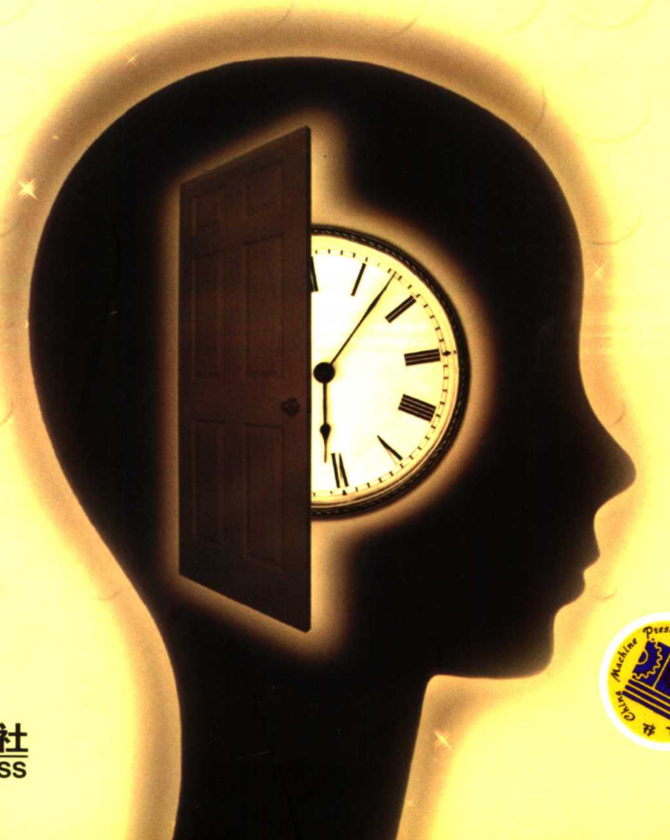
⊙ 普通高等学校研究生教材

运筹学与最优化方法

吴祈宗 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普 通 高 等 学 校 研 究 生 教 材

运筹学与最优化方法

主编　吴祈宗
参编　侯福均　朱心想

机 械 工 业 出 版 社

本书主要包括线性规划、非线性规划、目标规划、整数规划、层次分析法及智能优化计算简介等内容。这些内容是管理、经济类研究生应具备的必要知识。作为教材，本书内容着重阐述基本思想、理论和方法，力求做到深入浅出，通俗易懂，适于教学和自学。每一章末配置了适当的习题，便于读者理解、消化书中的内容。为了便于教师的教学，编者把多年教学中积累的教学课件做成光盘，奉献给读者特别是教师，仅供参考。

本书可作为管理、经济类专业及大多数工科类硕士研究生的教材，也可作为应用数学、计算数学及管理科学与工程专业本科高年级学生的教材或教学参考书。对于希望了解、认识及应用运筹学的各类人员也有一定的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学与最优化方法/吴祈宗主编．—北京：机械工业出版社，2003.8
普通高等学校研究生教材
ISBN 7-111-12700-5

Ⅰ．运…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．①运筹学-研究生-教材　②最佳化-研究生-教材　Ⅳ．022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 062621 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：曹俊玲　版式设计：冉晓华　责任校对：韩　晶
封面设计：陈　沛　责任印制：路　琳
北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2003 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5·8.875 印张·342 千字
定价：28.00 元（含 1CD）

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前　言

运筹学在自然科学、社会科学、工程技术生产实践、经济建设及现代化管理中有着重要的意义，在近几十年中得到迅速发展和广泛应用。作为运筹学的重要组成部分——最优化方法，是研究生相应课程的基本内容。本书根据管理类、经济类及大多数工科类硕士研究生知识结构的需要，系统地介绍了运筹学建模的基本思想，最优化方法中线性规划、非线性规划的理论及应用方法，目标规划，整数规划，层次分析法，并对一些较新的智能优化计算方法进行了介绍。内容尽力体现新颖、实用，力求跟上时代的步伐。

本书建立在读者具备高等数学和线性代数知识的基础之上，力图讲清各部分内容的基本思想、基本理论及方法过程，努力做到深入浅出，通俗易懂，适于教学和自学。

为了节省篇幅，突出重点，避免过多重复，本书没有安排本科阶段运筹学重点讲述的动态规划和排队论内容。没有这些知识，不会影响对本书内容的理解。

本书对层次分析法进行了系统介绍。这是本书的特色。由于层次分析法在当前已成为运筹学中最有效、最实用的方法之一，并且它在经济建设的各领域中所创造的效益也是十分突出的。因此，我们把它作为一个重要组成部分写入本书。

作为有一定针对性的教材，在内容的选择、例题的安排等方面注意专业知识的相关性，在每一章末配置了适当的习题，便于读者理解、消化书中的内容。为了支撑教师的教学，我们把多年来在教学中积累的教学课件做成光盘，奉献给读者，特别是教师。其中的内容不是教材的简单复制，而是为了扩大整个教学的信息量，作为附件仅供教师与其他读者参考。

本书是针对管理类、经济类及大多数工科类学生，在研究生阶段学习运筹学课程编写的，也可作为应用数学、计算数学、管理类、经济类专业本科高年级相应课程的教材或教学参考书。对于从事运筹及优化应用的工程技术人员和管理人员，也具有一定的参考价值。

在编著者从事运筹及优化方面的学习、教学和科研工作中，北京理工大学的刘宝光教授、丁丽娟教授等给予了大力帮助，在此表示衷心的感谢。在本书的编著过程中，本人参考了大量的国内、外有关文献书籍，这些成果对本书的成文起了重要作用，在此对有关作者一并表示衷心感谢。

限于编著者水平，书中难免有不当或失误之处，敬请广大读者批评指正。

吴祈宗

目　　录

第 1 章　运筹学思想与运筹学建模

运筹学（Operations Research，简称 OR）作为科学名字，是在 20 世纪 30 年代末出现的。第二次世界大战期间，运筹学的研究与应用范围主要是战略、战术方面。随着世界性战争的结束，各国的经济建设迅速发展。世界范围内的剧烈竞争也体现在经济、技术方面，运筹学的研究发展也向这些方面拓展。为了适应时代的要求，运筹学在几十年中，无论从理论上还是应用上都得到了快速的发展。在应用方面，今天运筹学已经涉及到了服务、管理、规划、决策、组织、生产、建设等诸多方面，甚至可以说，很难找出它涉及不到的领域。在理论方面，由于运筹学的需要和刺激而发展起来或得到扩展的一些数学分支，如数学规划、应用概率与统计、应用组合数学、对策论、数理经济学、系统科学等等，都得到了迅速发展。

运筹学是一门应用科学，很难给出一个确切的定义。根据运筹学工作者的一些论述，我们可以较深刻地理解这门科学的内涵。运筹学工作的先驱，英国诺贝尔奖金获得者，著名物理学家 P.M.S.Blackett，在 1940 年就开始从事运筹学方面的研究与应用。他曾多次指出：运筹学的一个明显的特征，正如目前所实践的，是它有或应该有一个严格且实际的性质，其目标是帮助人们找出一些方法，来改进正在进行中的或计划在未来进行的作战效率。为了达到这一目的，要研究过去的作战来明确事实，要得出一些理论来解释事实，最后利用这些事实和理论对未来的作战作出预测……

我们可以罗列出一些论述：运筹学是“为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。”“运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据。”“运筹学是一种给出问题坏的答案的艺术，否则的话，问题的结果会更坏。”等等。实质上，运筹学的基本目的是找到“优”的方案、途径，而在实际中，最优只能是一种理想追求。由于问题的复杂性、各种确定与不确定因素的综合影响，运筹学目标的准确（或有保障的）定位应该是通过研究使我们避开更坏的结果。

从哲学角度，可以说运筹学就是用科学方法去了解和解释运行系统的现象。它在自然界的范围内所选择的研究对象就是这些系统。这种系统时常包含着人和在自然环境中运行的“机器”，这个广义的“机器”可以推广到按照公认的规则运行的复杂社会结构。

把运筹学作为一门科学，是因为它用科学方法来创建其知识。它与其他科学

的不同就在于，它研究的是运行系统的现象，这是自然界中被其他科学大大地忽略了的部分。

综上所述，我们可以体会到，运筹学的思想就是对我们所关心的对象（“机器”或运行系统）进行深入的了解、分析和研究，特别是进行量化分析，得到信息，再合理运用有关的数学工具、系统方法等进行研究，提出有效方案来解决问题。

1.1 运筹学的特点及其应用

1.1.1 朴素运筹学思想与其深刻的内涵

自从1956年引入运筹学以来，在我国已有几十年的历史。这期间，运筹学在我国有了很大的发展，它在经济建设中的地位得以确立。但是，运筹学在我国的发展状况与世界其他国家相比，尚有不小的差距，其中最主要的是认识与基础的问题。人们公认，Operations Research 译为运筹学是非常恰当的。在我国历史上的军事和科学技术方面，对运筹思想的运用是世界著名的，从春秋战国和三国的战争中就可举出很多运用运筹思想取得战争胜利的例子。这反映出，运筹学注意系统数据采集、分析并研究优化方案的思想是一种朴素、自然的思想。在实际上，很多人都在自觉不自觉地运用这个思想。另一方面，我们常说“道高一尺，魔高一丈”，在竞争中，各方共同运用这些思想解决问题时，就表现为对运筹学内涵的认识、研究和运用能力。

随着科学技术的发展，特别是信息社会的到来，运筹学的内涵不断扩大，涉及的数学及其他基础科学的知识越来越多，熟练掌握并运用这门学科，有效解决实际问题的难度也逐渐加大。根据运筹学的发展，数学、计算机科学及其他新兴学科的最新知识、技术都能很快融合到其中，特别是人的直接参与决策，使得运筹学的发展更进入了一个崭新的阶段。

因此，必须加强运筹学的发展研究与应用，逐步缩短与世界发达国家的距离。

1.1.2 运筹学研究的工作步骤

为了有效地应用运筹学，根据运筹学的特征，应当遵循下列六条原则：合伙原则、催化原则、独立原则、互相渗透原则、宽容原则和平衡原则。这些原则反映了运筹学工作者与其他各种因素的横向和纵向的联系。

运筹学研究的工作步骤可以归纳为以下九个内容：

(1) 目标的确定。即确定决策者期望从方案中得到什么。这个目标不应限制在过分狭小的范围内，同时也要避免把研究目标作不必要的扩大。

(2) 方案计划的研制。实施一项运筹学研究的过程常常是一个创造性的过

程。计划的实质是规定出要完成某些子任务的时间，然后创造性地按时完成这一系列子任务。这样做能够推动运筹学分析者作出结论，有助于方案的成功。对计划的任意延期和误时会导致分析者的消极工作和管理者的漠不关心。

(3) 问题的表述。这项工作需要与管理人员进行深入讨论，经常包括与其他职员和业务人员的接触，及必要数据的采集，以便了解问题的本质、历史及未来、问题各个变量之间的关系。这项任务的目的是为研究中的问题提供一个模型框架，并为以后的工作确立方向。在这里，第一要考虑问题是否能够分解为若干串行或并行的子问题；第二要确定模型建立的细节，如问题尺度的确定、可控制决策变量的确定、不可控制状态变量的确定、有效性度量的确定，以及各类参数、常数的确定。

(4) 模型的研制。模型是对各变量关系的描述，是正确研制、成功解决问题的关键。构成模型的关系有几种类型，常用的有定义关系、经验关系和规范关系。

(5) 计算手段的拟定。在模型研制的同时，需要研究如何用数值方法求解模型。其中包括对问题变量性质（确定性、随机性、模糊性）、关系特征（线性、非线性）、手段（模拟、优化）及使用方法（现有的、新构造的）等的确定。

(6) 程序明细表的编制、程序设计和调试。计算过程需要编制程序来实现计算机运算，运筹学研究应包含对算法过程的描述、计算流程框图绘制。程序的实现及调试可以交由程序员完成，或会同程序员完成。

(7) 数据收集。把有效性试验和实行方案所需的数据收集起来加以分析，研究输入的灵敏性，从而可以更准确地估计得到的结果。

(8) 验证。验证运筹学在研究与应用中的重要性无论怎样强调都不会过分。验证包括两个方面：第一，确定验证模型，包括为验证一致性、灵敏性、似然性和工作能力而设计的分析和实验；第二，验证的进行，即用前一步收集到的数据对模型作完全试验。这种试验的结果，往往要求模型必须重新设计，并要求重编相联系的程序。

(9) 实施。运筹学分析者往往认为，模型验证后，任务就完成了，这是不对的。事实上，一项研究的真正困难往往在方案的最后一步，即在实施和维护时才暴露出来。因此，要使得整个研究有效，必须取得那些与所研究的决策问题或受到影响的各种职能有关的各级管理人员的合作与参与。

1.2　运筹学建模

1.2.1　运筹学建模的一般思路

运筹学建模在理论上应是属于数学建模的一部分。因此，运筹学建模所采用

的手段、途径就是数学建模中所采用的。本节所要介绍的，是根据运筹学本身的特征来处理建模问题的一般思路。

经过长期、深入的研究和发展，人们将运筹学处理的问题归纳成一系列具有较强背景和规范特征的典型问题。因此，运筹学建模就要把相当的精力放在将实际问题合理地描述为某典型的运筹模型。在这个过程中，要求运筹学工作者具有以下几个方面的知识和能力：

(1) 熟悉典型运筹模型的特征和它的应用背景。

(2) 有理解实际问题的能力，包括广博的知识，搜集信息、资料和数据的能力。

(3) 有抽象分析问题的能力，包括抓主要矛盾、逻辑思维、推理、归纳、联想和类比等创造能力。

(4) 有运用各类工具知识的能力，包括运用数学知识、计算机、自然科学和工程技术等的能力。

(5) 有试验校正、维护修正模型的能力。

根据问题本身的情况，按照上节的讨论，我们在建模时一般有如下思路：

(1) 直接方法。当熟悉问题的内在关系、特征以及运筹学的典型模型特点时，常常可以直接得到一些问题的模型或问题归类。如确定问题是属于线性规划、非线性规划、整数规划、排队模型等的哪一个。有时模型的参数也可直接从问题本身得到。

(2) 类比方法。通过类比，把新遇到的问题用已知类似问题的模型来建立该问题的模型。这时得到的往往是模型归类，而模型参数需用其他方法取得。

(3) 模拟方法。利用计算机程序实现对问题的实际运行模拟，可得到有用的数据。这些数据常用来求得模型参数，或对所建立模型的合理性、正确性进行检验。

(4) 数据分析法。利用数据处理的方法分析各数据变量之间的关系是确定关系还是相关关系，以及是何种相关等。这种方法还可以用回归分析找出变量的变化趋势，从而得到合理的数学模型。大量的模型参数也常常使用数据处理的统计方法来求得。另外，回归模型常常就是一个无约束最优化模型。

(5) 试验分析法。通过试验分析建模是工程管理中常用的方法。以局部的试验产生数据，经过统计处理得到总体的模型或模型归类。试验分析法更多地用于产生模型参数。

1.2.2 运筹学模型的评价

一个好的运筹学模型，不仅能比较真实地反映实际问题，还要具备以下几个优点：

1. 易于理解

模型应力求简明。这里要强调一点，模型并不是越大越复杂越好。应当把实际问题中那些不重要的因素删去。这样，一方面，形成模型以后，由于变量和约束个数较少，便于计算求解。另一方面，也更易于揭示主要因素对问题的影响以及它们之间的关系。

模型中变量、函数符号要接近所代表的实际因素、资源和目标的原义，这样易于理解模型所表示的实际问题的结构，而且当变量和约束个数很多时，对于模型和解的解释也是便利的。

2. 易于探查错误

如果上面一点做得比较好，那么模型也是易于探查错误的。模型的错误一般有两种：①书写错误；②模型与实际问题不符。后一类错误在建立模型时应尽量避免，在评价模型及其解时，也可以找出错误并改正。前一类错误的避免，一方面要求细心，另一方面要求模型的书写形式要规范，变量次序最好固定不变。如果在某个函数关系中不出现某个变量，那么该变量的位置最好以空白代替。约束条件中，把等式约束与不等式约束分成两组，分开来写。而在不等式约束中又可以把"≤"不等式与"≥"不等式分开来写。为便于清楚地表明每个约束所代表的实际的资源限制，不必把两种形式的不等式统一成一种。

3. 易于计算

运筹学模型问题是否易于求解，取决于问题的规模、复杂程度，当前计算技术水平和解该问题的算法。降低问题的复杂程度和规模可以通过以下几个途径达到：

(1) 采用简单的函数。与其在建模时花费许多时间、精力，寻找很好地反映现实情况但非常复杂的函数，不如在误差允许的范围内，采用简单的函数。在这一点上，尤其应该注意的是，非线性函数在计算方面的困难远比线性函数大得多。

(2) 删去不必要的变量和约束条件。在建立模型前，分析问题时就应该注意把那些不重要的因素和资源限制简化掉。建立模型后，应注意删去那些多余的约束条件。多余的约束条件是指该约束条件被删去后，可行解集没有改变。一个简单的例子是 $x_1 \leqslant a$ 和 $x_1 \leqslant b$，这里 $b > a > 0$，那么条件 $x_1 \leqslant b$ 就是多余的。尤其要删去那些非线性的约束条件。但是没有实用的一般方法能识别模型中的多余约束条件。尽管如此，在求解运筹学模型前，对它进行一番数学上的分析，讨论一下它的性质，仍是非常必要的。

(3) 函数变换。通过将复杂的函数进行代数处理，可以达到降低模型复杂程度的目的。例如 $\boldsymbol{Y}$ 是 $n \times n$ 可逆矩阵，非线性约束 $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{b}$，可变成 $\boldsymbol{g}(x) - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{b} = 0$，如果 $\boldsymbol{g}(x)$ 是线性函数，那么就把一个非线性约束变成线性约束。利用对数函数可以把乘积变成求和。例如 $\prod_n x_n^{a_n} \leqslant c$，如果要求 x_n 和 c

都大于零，那么上式等价于 $\sum_n a_n \ln x_n \leqslant \ln c$ ，这是关于对数函数的线性求和。

解决一类运筹学问题，有多种算法可供选择，某些特别的问题也有专门的算法来处理。某个算法对某一类问题特别有效，但对其他问题也许就一筹莫展。建立模型时，注意到一些算法具备的解某类问题的优势是有益处的。在误差允许的范围内，可以选用适于某算法的模型结构。因此建模者应该对优化算法进行系统的了解，熟悉每种算法的优势和缺点。

运筹学模型中的典型问题具有特殊的结构，在应用中经常出现，因此，应用数学家对这些典型问题给予了专门研究，对它们的性质有深入的了解，并产生了一些有效率的算法。某些运筹学模型经过数学上的处理，可以转化为典型问题，如分块线性的非线性规划可以转化为线性规划。因而，熟悉典型问题的结构，对求解模型是有帮助的。

1.2.3 运筹学建模举例

在运筹学模型中，一类最重要的模型是数学规划模型，它们有如下共同形式

$$\begin{cases} \text{opt.} \quad f\ (x_i;\ \xi_j;\ c_k) \\ \text{s.t.} \quad g_h\ (x_i;\ \xi_j;\ d_l) \leqslant (\text{或} =,\ \text{或} \geqslant)\ 0 \end{cases}$$

其中，i，j，k，h，l 为指标变量取值从 1 开始顺序排列的有限自然数；f 是实值函数（或向量值函数），称之为目标函数；g_h 为一系列函数，称之为约束函数；opt. 表示对右面的函数优化，一般取最大（max）或最小（min）；s.t. 是 subject to 的缩写，表示问题的解要“满足”后面的各等式或不等式组；x_i 为研究型决策变量；ξ_j 为随机因素；c_k，d_l 为问题的确定型参数。

这类模型的形式表示要在限定的约束条件下求得目标函数的最优。

在讨论中常把约束条件表示为集合的形式

$$S = \{x_i \mid g_h\ (x_i;\ \zeta_j;\ d_l) \leqslant (=,\ \geqslant)\ 0\}$$

称为约束集合或可行解集合（简称可行集）。为了讨论方便，这类模型常记成下列的简单形式

$$\begin{cases} \text{opt.} f\ (\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \boldsymbol{x} \in S \end{cases}$$

这里，opt. 与 s.t. 的含义同上；$\boldsymbol{x}$ 为向量，即 $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$；$S$ 是约束集合。这里没有明显地标出参数和随机因素。

数学规划模型按其函数特征及变量性质可细分为不同的规划模型，常见的有：

(1) 线性规划。各函数均为线性函数，变量均是确定型的问题。

(2) 非线性规划。各函数中含有非线性函数，变量均为确定型的问题。

(3) 多目标规划。上两类问题中，若目标函数是向量值函数，即多个目标函数的问题。

(4) 整数规划。上面问题中若决策变量的取值范围是整数（或离散值）的问题。

(5) 动态规划。求解多阶段决策过程的问题。

(6) 随机规划。当问题存在随机因素时，求解过程有其特殊的要求，因此常把它们归类为随机规划。

还有许多种归类方法，有的是针对问题本身特点进行分类的，有的是根据处理方法特征进行分类的，这里不一一列举。

为了帮助读者建立运筹学模型的概念，并了解建模思想的实际应用，下面举一些例子，其中有些例子作了较大程度的简化。我们把一些与后文有关章节紧密联系的例子融合到方法过程的讨论当中，在这里不进行特别描述。

例 1-1　我国大连钢厂是一个产品繁多、产品结构较复杂的特殊钢厂。在一定的能源、原材料供应、设备能力和人力等条件下，应考虑如何合理安排产品品种及产量，以获得最高的总利润。这个问题由当时的大连工学院及大连钢厂的有关人员共同研究，并建立了线性规划模型。通过计算得到结果，用到实际当中取得很好的效果。

这里的目标很明确，是要求最高的总利润。设产品可划分为 n 种，其产量分别为 x_1，x_2，…，x_n；各产品的利润率分别为 r_1，r_2，…，r_n。这里利润率 = 单位产品价格 - 单位产品成本。于是得到目标函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \tag{1-1}$$

反映国家计划、社会需要、设备及车间生产能力、原材料及能源等方面的情况，有如下约束条件：

(1) 设备能力的约束。假设对产量起决定作用的设备（或某些车间或工段）有 m 个。记每种设备的有效总工作时数为 A_j，$j=1$，2，…，m。又设第 i 种产品每吨产量需要消耗第 j 个设备的工作时数为 a_{ij} (h/t)（见表 1-1）。于是，得到约束

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant A_j, j=1,2,\cdots,m。 \tag{1-2}$$

(2) 生产指标的约束。国家规定生产必须完成 8 种指标。这里只讨论了合格率和成材率这两种指标，因为这两种指标对产品结构优化影响较大。设第 i 种产品的合格率为 b_{i1}，成材率为 b_{i2}，国家规定的总合格率为 B_1，总成材率为 B_2。那么，可得到下列约束

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{b_{ij}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\frac{1}{B_j}, j=1,2$$

表 1-1

吨工作时数 产品 / 设备	1	2	3	…	n	设备工作时数
1	a_{11}	a_{21}	a_{31}	…	a_{n1}	A_1
2	a_{12}	a_{22}	a_{32}	…	a_{n2}	A_2
3	a_{13}	a_{23}	a_{33}	…	a_{n3}	A_3
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	a_{1m}	a_{2m}	a_{3m}	…	a_{nm}	A_m

或写成
$$\sum_{i=1}^{n} x_i\left(1-\frac{B_j}{b_{ij}}\right)\geqslant 0, j=1,2$$

(3) 原材料的约束。设有 L 种原材料是来源不足的，每种最多的供应量为 c_j。显然，对来源充足的原材料来说不会对产量有约束，故不需要考虑。设第 i 种产品每吨对第 j 种原料的消耗量为 c_{ij}（单位：t）（见表 1-2），于是得到约束

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_j \leqslant c_j, j=1,2,\cdots,L$$

表 1-2

消耗量 产品 / 原料	1	2	3	…	n	供应量
1	c_{11}	c_{21}	c_{31}	…	c_{n1}	c_1
2	c_{12}	c_{22}	c_{32}	…	c_{n2}	c_2
3	c_{13}	c_{23}	c_{33}	…	c_{n3}	c_3
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
L	c_{1L}	c_{2L}	c_{3L}	…	c_{nL}	c_L

(4) 能源的约束。电力不足是影响大连钢厂产量的决定因素。设第 i 种产品每吨耗电量为 d_i (kW·h/t)，全厂最大供电量为 D (kW·h)。于是得到又一个约束

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i \leqslant D$$

(5) 市场需求。在生产上要考虑社会需要，某些产品即使利润不高，甚至亏损，也必须不少于一个最低限度的产量。设第 i 种产品的最低限度产量为 f_i（单位：t）（当没有这个限制时可取相应的 $f_i=0$）；市场最大需求量为 e_i（单位：t）。于是得到下列上、下界约束

$$f_i\leqslant x_i\leqslant e_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

综合上面的分析，得到以下线性规划模型

$$\begin{cases}\max & f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant A_j \quad j=1,2,\cdots,m \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i\left(1-\dfrac{B_j}{b_{ij}}\right) \geqslant 0 \quad j=1,2 \\ & \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i \leqslant c_j \quad j=1,2,\cdots,L \\ & \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \leqslant D \\ & f_i \leqslant x_i \leqslant e_i \quad i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{1-3}$$

在实际建模中，还有一些约束，如国家要求该厂的产品满足一定的合金比；由于工艺的原因，要求某些产品之间的比例数大于某一定值等。这些约束很容易表示成式（1-2）的形式，这里不多叙述。

模型中的参数，往往不能够直接得到，如约束条件（1）中的 A_j，a_{ij}，（2）中的 b_{ij}，（3）中的 c_j，（4）中的 D，（5）中的 e_i。这些数据的取得需要根据过去的情况统计处理，具体方法可参考本书有关章节。这个工作量是很大的，有时由于数据不完全，会给建模造成一些困难，此时往往需要对模型进行适当的简化，以便得到相对较好的优化方案。

某些条件实际上可能是非线性的，如（1），（3），（4）都可能是非线性的。但是非线性规划在求解中会产生较大困难，因而在误差允许的范围内，常常用线性关系近似。一般情况，可以得到满意的结果。

例 1-2　讨论某所大学在培养、教育中考虑为其毕业生安排工作位置的问题，这是很复杂的问题。为了简便，我们做如下假设：

（1）假设工作位置有 3 类：政府部门、工矿企业和科研院所。

（2）假设每个毕业生只接受一个工作位置。

（3）假设考虑几年的情况，第 j 年（$j=1,2,\cdots,n$）毕业的人数为 N_j。

要考虑的问题是找出分配工作位置的比例系数 λ_1，λ_2，λ_3，使得在安置工作时能较好地符合各类工作位置的要求。

令 G_j，I_j 和 S_j 分别表示第 j 年进入政府部门、工矿企业和科研院所的人数。因此应该有 $G_j+I_j+S_j=N_j$。但是按照要找出的比例系数 λ_1，λ_2，λ_3，实际进入 3 类不同工作部门的人数为 $\hat{G}_j=\lambda_1 N_j$，$\hat{I}_j=\lambda_2 N_j$，$\hat{S}_j=\lambda_3 N_j$。

要得到与需求相符合的较好的比例，一种考虑办法是使所有 $G_j-\hat{G}_j$，I_j-

$\hat{I}_j$，$S_j-\hat{S}_j$ 的绝对值均为最小，那么可建立下面的目标函数

$$f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sum_{j=1}^{n}[(G_j-\hat{G}_j)^2+(I_j-\hat{I}_j)^2+(S_j-\hat{S}_j)^2]$$

把 $\hat{G}_j=\lambda_1N_j$，$\hat{I}_j=\lambda_2N_j$，$\hat{S}_j=\lambda_3N_j$ 代入，得

$$f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sum_{j=1}^{n}[(G_j-\lambda_1N_j)^2+(I_j-\lambda_2N_j)^2+(S_j-\lambda_3N_j)^2]$$

要让 $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 最小。

由于第 j 年毕业人数是 N_j，于是应有 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，又比例系数就它们的意义来说是非负的，即 $\lambda_1\geqslant0$，$\lambda_2\geqslant0$，$\lambda_3\geqslant0$，这些就是问题的约束函数，于是得到下列非线性规划模型

$$\begin{cases}\min & f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sum_{j=1}^{n}[(G_j-\lambda_1N_j)^2+(I_j-\lambda_2N_j)^2+(S_j-\lambda_3N_j)^2]\\ \text{s.t.} & h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1=0\\ & g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=-\lambda_1\leqslant0\\ & g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=-\lambda_2\leqslant0\\ & g_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=-\lambda_3\leqslant0\end{cases}$$

这类问题的求解，有一些有效的方法，这里不进行介绍，可参考有关最优化算法的文献。

例 1－3 一零售商店需要储存和销售货物，如何进货最好，这是经常遇到的问题。由于影响的因素很多，因而一般地讨论这种问题会有不少困难。为了简便，我们考虑一种货物，如收音机。为了保障销售，需要有一定的库存。假设商店用于担负收音机存货的资金不能超过 S 元。收音机共有 n 个型号，j 型号收音机的外包装体积为 V_j，仓库用于存储收音机的最大容积为 V。收音机为批量订货，每订购一批型号为 j 的收音机，需花费手续费 a_j，（由于每批进货的数量是相同的，因而入库费用可同手续费合并来计）。每台 j 型收音机的单价为 c_j，每年对 j 型收音机的需要量为 d_j。这里 a_j，c_j 和 d_j 有一定的随机性，因此它们的取值一般是通过对前面若干情况进行统计分析得到的，关于统计的方法可参看本书有关章节。库存的费用常常同货物价格有关，假设 j 型收音机年库存费用与价格的比为 q_j。我们安排进货是想使订货及存储的平均年花费最小。

令 x_j 表示一批 j 型收音机的订货台数。首先建立目标函数，即订货及存储的年平均费用。对 j 型收音机，订货费用应是每批手续费 a_j 同批数 d_j/x_j 的乘积，即 a_jd_j/x_j；存储的年平均费用应是存货的平均数量 $x_j/2$ 同年存储费 q_jc_j 的乘积，即 $q_jc_jx_j/2$。于是得到目标函数