五年制中学課本

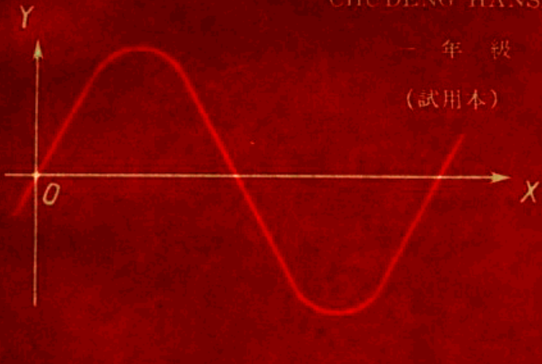
代数与初等函数

DAISHU YU

CHUDENG HANSHU

一 年 级

(試用本)



上海教育出版社

五年制中学課本

代数与初等函数

一 年 級

(試 用 本)

华 东 师 范 大 学 編

上海市中小学数学課程革新委員会审定

*

上 海 教 育 出 版 社 出 版

(上 海 永 福 路 123 号)

上海市书刊出版业营业许可証出 090 号

商务印书館上海厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：850×1168 1/32　印張：7　字数：134,000

1960 年 4 月第 1 版　1960 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—13,000 本

統一书号：K7150・955

定　价：(三) 0.44 元

說　明

代数与初等函数課本共两册．它是根据上海市中小学数学課程革新委員会、华东师范大学“关于全日制中小学数学課程革新的建議(修訂草案)”編写的．内容除包括原来中学代数里的实数、根式、方程、函数图象、指数与对数、复数和平面三角中的任意角的三角函数、加法定理、斜三角形解法、反三角函数等以外，还加强了近似計算，增添了平面解析几何、綫性代数初步和綫性規划等方面的知識．

本册課本分为实数，一元二次方程，一次函数、直綫，二次函数、圓錐曲綫与幂函数五章．

在内容的处理上，尽可能体现革新方案的精神；貫彻形数結合；采取从具体到抽象、从特殊到一般的方法，从解决实际問題中揭露矛盾，通过具体問題的解答，进行分析研究，得到数量間的一般規律．如从测量中找到不能用有理数表达的綫段而引入无理数的一般概念，再从綫段运算的結果得到实数运算的普遍規律．

在删除旧課本里大量的繁瑣論証的同时，充分注意正确地形成概念和建立必要的、有严密科学性的理論．如把根式和有理指数幂的运算統一起来，精簡了重复部分，删除了大量繁瑣的論証，同时注意用实例判明正整数指数幂的性質，推广到有理数指数幂时的正确性，而不是含糊地直接运用．

从第三章起，以函数为中心进行教学，以加强培养学生的辩証唯物主义观点．从大量的实例中反复研究量的联系、变化的規律，使学生能从本質上理解函数的概念，能用函数的观点解釋实际問

题，并为进一步学好数学分析打下基础.

在掌握概念与理論的同时，也注意培养学生熟練运算的技能技巧和解决实际問題的能力，使各种基本运算有多次反复練习的机会，如在各章中反复出現近似計算，使学生能熟練地掌握近似数的运算法则.

本課本是在党的領导下，由华东师范大学、复旦大学数学系师生和部分有經驗的中学教师协作編写的. 由于时間仓促，編写者水平有限，可能还存在不少缺点，特别是反映当前現实生活的习題在数量和质量上都远不能滿足要求，希望大家在試用过程中随时提出意見，以便进一步修改和提高.

1960 年4月

目 录

第一章　实数

一　实数的基本概念

1. 新数的需要　在小学里我們已經知道，整数和分数总起来叫做有理数.

但是，在实际中存在的量，却不是都能用整数或者分数来表示的. 我們来看下面的問題：

正方形的每边长 1 厘米，它的对角綫长多少厘米？

設对角綫的長是 x 厘米 (图 1). 根据勾股定理，我們知道：

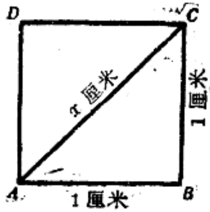


图　1

$$x^2=1^2+1^2,$$

就是

$$x^2=2.$$

因为綫段的长度規定都是正的，把上面等式的两边开平方，就得到：

$$x=\sqrt{2}\,(厘米).$$

这里，$\sqrt{2}$ 是哪一种数呢？

首先，因为任何整数的平方都不会是 2，所以 $\sqrt{2}$ 不可能是整数.

其次，如果 $\sqrt{2}$ 是分数，它就一定可以化成一个最簡分

数(分子分母是互质数).

但是,因为互质的两个数的平方,它們还是互质数,所以一个最簡分数的平方也只能是一个最簡分数,而不能是一个整数,例如,$\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$,$\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$等. 所以$\sqrt{2}$是分数的假設是不成立的;也就是說,$\sqrt{2}$不能是一个分数.

为了表示这种不能用整数,也不能用分数来表示的量,我們必須引入一种新数.

2. 无理数 我們把这种不能表示成为整数和分数的数,叫做**无理数**.

在度量一条綫段的长度等实际問題中,遇到的无理数是很多的. 例如$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等都是无理数.

另外,象直徑等于1尺的圓,它的周长是π尺;斜边等于1,一个銳角等于35°的直角三角形里,这个銳角所对的边长是$\sin 35°$. 这里,π和$\sin 35°$的値也都是无理数.

任何无理数不能表示成为整数或分数. 但是,我們可以用尺来度量这些数所表示的綫段,得到近似地表示这些綫段长度的数. 例如,用刻度比較精确的尺来量每边长1厘米的正方形的对角綫,可以看到这条綫段比1.4厘米长,而比1.5厘米短;就是$1.4<\sqrt{2}<1.5$. 如果用刻度更精确的尺来量,就可以看到这条綫段比1.41厘米长,而比1.42厘米短;也就是$1.41<\sqrt{2}<1.42$.

所以,我們可以用小数1.4或者1.41来近似地表示$\sqrt{2}$.

同样,其他任何无理数,也都可以用分数(或者小数)来

近似地表示.

3. 正数的开平方 在上一节里，我們用刻度比較精确的尺来量$\sqrt{2}$所表示的綫段，得到$\sqrt{2}$可以用小数1.41近似地表示. 这个結果，我們也可以用开平方的方法計算出来.

下面我們来研究一个正数开平方的一般方法.

例如，我們要計算$\sqrt{1156}$.

首先，我們来确定1156的平方根有几位整数. 我們知道，$1^2=1, 10^2=100, 100^2=10000, \cdots\cdots$. 所以，如果一个整数大于1而小于100，它的正平方根就大于1而小于10；如果一个整数大于100而小于10000，它的正平方根就大于10而小于100；……. 这就是說，一位数或者两位数的平方根是一位数；三位数和四位数的平方根是两位数；…….

1156是一个四位数，所以它的平方根是两位数. 我們把1156从右向左，每隔两位用一个撇号“ ' ”分成两段：

$$\sqrt{11'56}.$$

第二步，我們就可以根据它的左边第一段里的数字所組成的数11，来确定$\sqrt{11'56}$的左边第一位上的数字.

因为$3^2<11<4^2$，所以$30<\sqrt{1156}<40$. 这就确定了十位上的数字是3.

第三步，我們再来确定$\sqrt{1156}$的个位上的数字. 假設这个数字是a，那末求到的平方根就可写成$3\cdot10+a$的形式，就是：

$$\sqrt{1156}=30+a.$$

两边平方，得

$$1156=(30+a)^2,$$

就是

$$1156=900+2\cdot 30a+a^2.$$

从 1156 减去 900，得

$$\begin{array}{rl} 1156 & \cdots\cdots\ 100\cdot 3^2+2\cdot 30a+a^2 \\ -\ \ 900 & \cdots\cdots\ 100\cdot 3^2 \\ \hline 256 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 2\cdot 30a+a^2 \end{array}$$

就是說，所得的 256 应該等于 $2\cdot 30a+a^2$. 从这个关系，我們可以求出这个平方根的个位数 a.

用 $2\cdot 30$ (就是 60) 去試除 256，得到商的整数部分是 4. 要确定 a 的值是不是 4，只要把 4 代入 $2\cdot 30a+a^2$，看它的值是不是等于 256 就可以了. $2\cdot 30a+a^2=(60+a)a$，現在 $(60+4)\cdot 4=256$，所以 a 的值的确是 4. 因此，$\sqrt{256}=34$.

上面所說的計算过程，可以用下面的形式表示出来：

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 3\ \ 4 \\ & \sqrt{1\ 1'5\ 6} \\ & \ \ \ 9 \\ \hline 6\ 4 & \ \ \ 2\ 5\ 6 \\ & \ \ \ 2\ 5\ 6 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

这里，在根号上面对着第一段 11，先写上十位数字 3 (实际表示 30)，把 $3^2=9$ (实际表示 900) 写在 11 的下面，$11-9=2$ (实际表示 200)，把第二段 56 移下得到 256. 在

竖綫左边写上 3 的 2 倍(实际表示 $2\cdot30$ 就是 60), 用 60 去試除 256 得到試商 4, 在根号上面对着第二段 56 写上 4, 同时在竖綫左边 6 的右边写上 4. 因为 $64\cdot4=256$, $256-256=0$,就得到 $\sqrt{1156}=34$.

例 1 求 $\sqrt{1444}$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3 \quad 8 \\
 & \sqrt{1\,4'\,4\,4} \\
 & \quad 9 \\
\hline
6\,8 & 5\,4\,4 \\
 & 5\,4\,4 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{1444}=38.$$

四位以上整数的开平方,也可以照这样的形式来計算.

例 2 求 $\sqrt{84681}$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2 \quad 9 \quad 1 \\
 & \sqrt{8'\,4\,6'\,8\,1} \\
 & \quad 4 \\
\hline
4\,9 & 4\,4\,6 \\
 & 4\,4\,1 \\
\hline
5\,8\,1 & \quad 5\,8\,1 \\
 & \quad 5\,8\,1 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{84681}=291.$$

在例 1 里, 544 除以 60 得到試商 9, 但是 $69\cdot9$ 的积大于 544, 所以改用 8.

在例 2 里, 446 除以 40 得到試商 11, 但是試商只能是一位数,所以改用 9.

求小数的平方根，也可以用整数开平方的一般方法来計算．但是必須注意，分段的时候要从小数点起向左、向右每隔两位用撇号分开，并且要注意所得平方根的小数点的位置．例如：

```
          0.  5   7
        √ 0.3 2′4 9
            2 5
       1 0 7 | 7 4 9
             | 7 4 9
             --------
                   0
```

```
          1.  0   8
        √ 1.1 6′6 4
            1
     2 0 8 | 1 6 6 4
           | 1 6 6 4
           ----------
                   0
```

应用这种开平方的方法，我們可以算出$\sqrt{2}$到任意精确度的近似值．例如，要求精确到0.0001，可以象下面这样做：

```
            1.  4   1   4   2
         √  2
            1
      2 4 | 1 0 0
          |   9 6
        2 8 1 | 4 0 0
              | 2 8 1
      2 8 2 4 | 1 1 9 0 0
              | 1 1 2 9 6
        2 8 2 8 2 | 6 0 4 0 0
                  | 5 6 5 6 4
                  -----------
                      3 8 3 6
```

因为$\sqrt{2}$不是分数，所以不能表示为有限小数，因而这里的开平方运算可以无限地継續下去．这样我們得到一个无限小数，就是$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$．

4. 实数 有理数和无理数总起来叫做实数．

所有的实数都可以用有限小数或者无限小数来表示．

在小学里，我們曾經用正的有理数和負的有理数表示具有相反方向的量．这也适用于无理数所表示的量．就是說，对于每一个正实数，都有一个和它相反的負实数．例如3和-3，$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$，π和$-\pi$等等都是相反的数．

实数的絕对值的意义也和有理数的一样，就是：正实数的絕对值就是它本身，負实数的絕对值是和它相反的正实数，零的絕对值是零．例如，

$$|\sqrt{2}|=\sqrt{2},\ |-\sqrt{2}|=\sqrt{2},\ |0|=0 \text{ 等等.}$$

我們已經知道，任何一条綫段，它的长度可以用一个实数来表示．在数軸上，从原点起向右截取这条綫段，那末，另一个端点就表示这个实数．例如，在数軸上从原点起向右截取一条綫段OA（图 2），使它的长度等于边长是一个单位的正方形的对角綫长，那末A点就表示无理数$\sqrt{2}$．

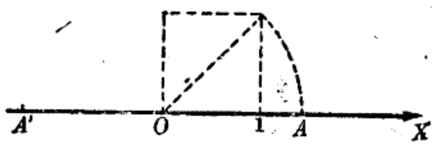


图 2

如果从原点起向左截取一条綫段OA'，使它的长度等

于 OA,那末 A' 就表示无理数 $-\sqrt{2}$.

这样，数軸上的每一点有一个实数和它对应；反过来，每一个实数也有数軸上的一个点和它对应. 这就是說，实数与数軸上的点是一一对应的.

設有两个实数 α 和 β，并且設数軸上的 A 点表示实数 α，B 点表示实数 β.

利用 A、B 两点在数軸上不同的位置关系，我們規定实数的大小：

(1) 如果 A 点在 B 点的左边，我們就說，α 小于 β，写做 $\alpha<\beta$；

(2) 如果 A 点和 B 点重合，我們就說，α 等于 β，写做 $\alpha=\beta$；

(3) 如果 A 点在 B 点的右边，我們就說，α 大于 β，写做 $\alpha>\beta$.

从这个規定我們得到：

(1) 任何正实数都大于零；任何負实数都小于零；任何正实数都大于任何負实数.

(2) 两个正实数化成小数以后，如果对应数位上的数字都相同，那末这两个正实数相等；如果整数部分不同，那末整数大的正实数大；如果整数部分相同，而小数第一位不同，那末小数第一位大的正实数較大；如果小数第一位也相同，那末小数第二位大的正实数較大；以下依次类推.

(3) 如果两个負实数的絕对值相等，那末这两个負实数相等；如果两个負实数的絕对值不等，那末絕对值大的負

实数較小.

例1 比較$\frac{1}{10}$和$-\pi$的大小.

解 $\because \quad \frac{1}{10}>0, -\pi<0;$

$\therefore \quad \frac{1}{10}>-\pi.$

例2 比較$\sqrt{10}$和π的大小.

解 从平方根表上我們可以查得:

$$\sqrt{10}=3.16\cdots\cdots, \pi=3.14\cdots\cdots;$$

$$\therefore \quad \sqrt{10}>\pi.$$

例3 比較$-\sqrt{10}$和$-\pi$的大小.

解
$$\because \quad -\sqrt{10}=-3.16\cdots\cdots,$$
$$-\pi=-3.14\cdots\cdots;$$
$$\therefore \quad -\sqrt{10}<-\pi.$$

我們知道，每一个实数都可以用一条綫段来表示．因为两条綫段的和仍旧是一条綫段，它的长度就是两个正实数的和．另外,用两条綫段做矩形的边,这个矩形的面积就是两个实数的积.

負实数的相加和相乘，可以依照負有理数的运算法則进行．例如，$\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta$; $\alpha\cdot(-\beta)=-\alpha\beta$; $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$; 等等.

两个实数相减，我們把它看做是两个实数相加的逆运算．同样，把两个实数相除看做是两个实数相乘的逆运算.

因此，总起来説，实数的加减乘除四则运算是有意义的.

对两个无理数的四则运算，我們通常是先取它們的近似值，再象有理数那样来运算.

习 题 一

1. 指出下列各数，哪些是有理数？哪些是无理数？

$$3.1416;\ \pi;\ -3\frac{2}{3};\ 0.57142857;$$

$$-\sqrt{5};\ -\sqrt{16};\ \cos 45^\circ;\ \sin 30^\circ.$$

2. 假使正三角形(等边三角形)每边的长是 2 厘米，那末它的面积是几平方厘米？你能説明用来表示它的面积的这个数一定是无理数嗎？

3. 求 $\pi=3.14159\cdots\cdots$ 的不足近似値和过剩近似値，并且分别取两位、三位和四位小数.

4. 求下列各数(査平方根表)：

$$\sqrt{3};\ \sqrt{30};\ \sqrt{7.44};\ \sqrt{74.4}.$$

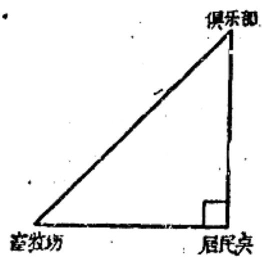
5. 用开平方法求下列各数：

$$\sqrt{144};\ \sqrt{3721};\ \sqrt{6.25};\ \sqrt{20.25}.$$

6. 用开平方法求下列各数(精确到 0.01)：

$$\sqrt{11};\ \sqrt{7.3};\ \sqrt{6};\ \sqrt{0.4}.$$

7. 已知群英公社的居民点，正好在十字路口上.从居民点向西 2 公里可以到畜牧場，向北 2 公里可以到俱乐部.求俱乐部到畜牧場的距离.(精确到 0.01 公里)



第 7 题

8. 比較下列各数的大小:

(1) $\sqrt{7}$ 和 $\sqrt{5}$; (2) $-\sqrt{7}$ 和 $-\sqrt{5}$;

(3) $\sqrt{10}$ 和 $\frac{10}{3}$; (4) $-\sqrt{2}$ 和 -1;

(5) $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{3}$; (6) $\sin 30^\circ$ 和 $\cos 30^\circ$.

9. 回答下列各問題:

(1) 如果 $a>0$, $b<0$, 那末 a、b 两数中哪一个大?

(2) 如果 $a<0$, $b<0$, 而且 $|a|>|b|$, 那末 a、b 两数中哪一个大?

(3) 如果 $a<b$, 那末 $|a|$ 和 $|b|$ 中哪一个大? (要討論)

10. (1) 有两个正方形,它們的边长分别是 2 厘米和 1 厘米. 先用米尺量出它們对角綫的长度,然后求这两条綫段的和、差、比,以及用这两条綫段为两相邻的边的矩形的面积.

(2) 有两个直角三角形,它們的每两条直角边分别是 1 厘米与 1 厘米,1 厘米与 2 厘米. 先用米尺量出它們斜边的长度,然后求这两条斜边的和、差、比,以及用这两条斜边做两相邻边的矩形的面积.

从以上两个例子的比較中,你发現了什么問題?

二 不等式

5. 不等式的概念 在日常生活和生产实际中,除了常常会遇到两个量之間的相等关系外,也会遇到两个量之間的不等关系.例如:

有两个小組在工厂劳动.第一小組 5 个人,4 小时里做了 80 个零件;第二小組 6 个人,4 小时里做了 90 个零件.哪一个小組的工作效率高?

要回答这个問題，首先我們要分别求出这两个小組里每个人平均所做的零件数，然后比較它們的大小.

这里 $80\div5=16$，$90\div6=15$.

因为 $16>15$，

所以，第一小組的工作效率比第二小組的工作效率高.

又如：

为了执行一項紧急任务，一架飞机必須在 4 小时里从甲地飞到乙地. 已知甲地到乙地的航空綫長 1,200 公里. 这架飞机每小时要飞行多少公里才能完成任务？

要回答这个問題，我們設飞机每小时必須飞行 x 公里. 那末，从甲地飞到乙地要花 $\frac{1200}{x}$ 小时. 根据題意，飞机必須在 4 小时里到达，所以 $\frac{1200}{x}<4$.

象 $16>15$，$\frac{1200}{x}<4$ 等用不等号把两个代数式連接起来所組成的式子，叫做**不等式**. 例如，

$$\sqrt{2}>1.41,\quad a>b,\quad x+3<0$$

等都是不等式.

要比較两个实数的大小，只要考察它們的差就可以了. 这就是說：

如果 $a-b>0$，那末 $a>b$；如果 $a-b<0$，那末 $a<b$；如果 $a-b=0$，那末 $a=b$.

反过来，**如果 $a>b$，那末 $a-b>0$；如果 $a<b$，那末 $a-b<0$；如果 $a=b$，那末 $a-b=0$.**