考试名家指导

考研 Maths

数学专项训练系列

第3版

北京大学　姚孟臣　编著

概率论与数理统计题型精讲

2005版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

(考研)数学专项训练系列

概率论与数理统计题型精讲

第3版

北京大学　姚孟臣　编著

机 械 工 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计题型精讲/姚孟臣编著. —3 版. —北京：机械工业出版社，2004. 4

［考试名家指导·(考研)数学专项训练系列］

ISBN 7-111-14282-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. 姚… Ⅲ. ① 概率论—研究生—入学考试—解题 ② 数理统计-研究生-入学考试-解题 Ⅳ. 021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 026873 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：蓝伙金　边　萌

责任编辑：蓝伙金　　　　责任印制：李　妍

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 4 月第 3 版第 1 次印刷

787mm×1092mm1/16·17.25 印张·369 千字

定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

第3版前言

由机械工业出版社与北京大学数学科学学院的几位老师策划、出版的“考试名家指导”(2005版)考研数学专项训练系列、考研辅导教材系列、考研模拟试卷系列丛书中有关数学辅导用书共6本。其目的在于帮助有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容,了解考研的最新信息。这是一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的丛书。本书是根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求,并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验编写而成的。

本套丛书作者皆为北京大学多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师,具有丰富的教学经验,多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

考研数学专项训练系列丛书分为四册:《高等数学题型精讲》第3版(理工类)、《微积分题型精讲》第3版(经济类)、《线性代数题型精讲》第3版和《概率论与数理统计题型精讲》第3版,这样不仅充分发挥了每个作者的特长,而且也方便读者根据自己的具体情况选购。

每册书都严格按照“考试大纲”的规定分章,每一章又都包括四个部分:

考试大纲要求——在这一部分中原原本本地介绍了大纲对本章考试内容以及考试要求的规定,使读者一览全局。

基本内容与重要结论——在这一部分中对大纲规定的考试内容以及重点、难点做了精心的总结和透彻的阐述,目的在于使读者对有关的基本概念、重要公式和定理获得深入的理解和全面的掌握。

典型例题分析——在这一部分中集中了经过精心挑选的部分历年考研真题和一批典型例题,总结了各种解题方法,许多解法构思精妙、匠心独运,对读者深入领会基本内容、开阔思路和灵活解题十分有利。

自测练习题与参考答案——在这一部分中有针对性地编排了若干题目(并附有答案),供读者作为自测练习之用。由于本书篇幅所限,这里提供的练习题数量也许并不能完全满足备考的需要。为了做好研究生入学考试的复习,读者还需要从其他渠道获得更多的题目。

为了在研究生入学数学考试中取得高分,考生须切记以下几点:明确大纲规定的考试内容和要求,掌握历年数学命题的特点和重点是前提;深入掌握基本概念,牢记并能熟练运用基本公式和法则,确保基本计算准确熟练是基础;搞清有关知识间的纵向与横向的联系,按照解题为主线,重新组织有关知识,增强灵活运用知识解决综合题目的能力是关键。

研究生试题中有相当数量的综合题,即在一个题目中考查不同章节的多个知识点,甚至考

查不同学科内容的试题。这类题目着重考查考生对大纲内容的融会贯通与灵活运用，为此考生必须对所学知识进行重组，彻底搞清有关知识间的纵向与横向联系，把原来学过的内容按照解决特定问题的需要进行梳理，打乱次序后再重新编排，以期做到"成竹在胸，信手拈来"，迅速而准确地找到解决综合题的切入点。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大考生开拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

我们在出版这套书时力求能够体现出以上的特色，但是由于时间仓促，疏漏之处难免，恭请读者不吝指正。

机械工业出版社

2004 年 3 月

目录

第一章　随机事件和概率

一、考试大纲要求

1）理解随机试验，样本空间和随机事件的概念，掌握随机事件间的关系及运算.

2）理解概率的定义，掌握概率的基本性质，能使用古典概型和几何概型计算有关事件的概率，能利用概率基本性质计算随机事件的概率.

3）理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式.

4）掌握全概率公式和贝叶斯公式，能计算较复杂随机事件的概率.

5）理解随机事件独立性的概念，能应用事件独立性进行概率计算.

6）理解随机试验独立性的概念，掌握 n 重伯努利试验中有关随机事件的概率计算.

二、基 本 内 容

1.1　样本空间与随机事件

具有下列三个特征的试验称为**随机试验** E：

（1）在相同的条件下，试验可以重复地进行；

（2）试验的结果不止一种，而且事先可以确知试验的所有结果；

（3）在进行试验前不能确定出现哪一个结果.

称试验的结果为**基本事件**或样本点，用 ω 表示；由全体基本事件构成的集合为**基本事件空间**或样本空间，记为 Ω.

在随机试验中，把一次试验中可能出现也可能不出现，而在重复独立试验中具有某种统计规律性的样本空间的一个子集称为**随机事件**（简称**事件**）. 所谓一个随机事件 A 发生当且仅当 A 的一个样本点 ω 发生.

通常把**必然事件**（记为 Ω）和**不可能事件**（记为 $\varnothing$）看作特殊的随机事件.

1.2 事件的关系与运算

1. 随机事件之间的关系及运算

(1) 包含关系　如果事件 A 发生则事件 B 一定发生，即属于事件 A 的每一样本点都属于事件 B，称事件 B **包含**事件 A，记为：$B \supset A$.

(2) 相等关系　如果事件 A 和事件 B 满足 $A \supset B$ 和 $B \supset A$，即事件 A 和事件 B 同时发生和不发生，称事件 A, B **相等**，记为 $A = B$.

(3) 互不相容　如果事件 A 和 B 不能同时发生，即它们的积事件是不可能事件，称事件 A 与 B **互不相容**(**或互斥**)，记为 $AB = \varnothing$.

(4) 互逆　如果事件 A 发生必然导致事件 B 不发生，反之亦然，称事件 A 和 B **互逆**(**或互余**)，此时称 B 是 A 的**逆事件**，记为 $B = \overline{A}$.

(5) 事件的和　"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与 B 的**和事件**(**或并事件**)，记为 $A \cup B$(或 $A + B$). 它可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(6) 事件的积　"事件 A 和 B 同时发生"的事件称为事件 A 与 B 的**积事件**(**或交事件**)，记为 $A \cap B$(或 AB). 它可推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(7) 事件的差　"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A - B$(或 $A\overline{B}$).

2. 事件运算的满足规则

(1) $A + B = B + A$(交换律)；

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$(结合律)；

(3) $A + A = A$；　　(4) $A + \overline{A} = \Omega$；

(5) $AB = BA$(交换律)；　　(6) $(AB)C = A(BC)$(结合律)；

(7) $AA = A$；　　(8) $A\overline{A} = \varnothing$；

(9) $A(B + C) = AB + AC$(分配律)；

(10) $A + BC = (A + B)(A + C)$(分配律)；

(11) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$　(德·摩根律一)；

(12) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$　(德·摩根律二).

1.3 概率和条件概率的定义

1. 概率的古典定义

我们把具有:(1) 试验的结果总数是有限的;(2) 每个试验结果出现的可能性是相同的这两个特点的随机试验称为**古典型试验**.

定义 在古典型试验中,随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

其中 n 为 Ω 中包含的基本事件总数,m 为事件 A 中包含的基本事件数.由关系式(1-1)计算事件概率的数学模型称为**古典概型**.

2. 概率的几何定义

我们把具有:(1) 试验的结果是无限且不可数的;(2) 每个试验结果出现的可能性是均匀的,这两个特点的随机试验称为**几何型试验**.

定义 在几何概型随机试验中,如果 Ω 中的所有基本事件可以用一个有界闭区域来描述,而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件,那么随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \tag{1-2}$$

其中,$L(\Omega)$和 $L(A)$分别为 Ω 和 A 的几何测度,由关系式(1-2)计算事件概率的数学模型称为**几何概型**.

3. 概率的统计定义

独立地重复进行 n 次随机试验,设随机事件 A 发生的次数为 m,称 $f_n=\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

定义 在 n 次重复独立试验中,事件 A 发生的频率具有稳定性,即它在某一数 p 附近摆动,而且,一般来说当 n 越大时,摆动幅度越小,则定义数值 p 为事件 A 发生的概率,即 $P(A)=p$.

4. 概率的公理化定义

定义 设 E 是一个随机试验,Ω 为它的样本空间,以 E 中所有随机事件组成的集合 $\mathscr{F}$ 为定义域,对于任一随机事件 A,规定一个实值函数 $P(A)$,$A\in\mathscr{F}$ 如果 $P(A)$满足下列三个公理:

(1) (非负性)$P(A)\geqslant 0$;

(2) (规范性)$P(\Omega)=1$;

(3) (可列可加性)如果事件 $A_1,A_2,\cdots$互不相容,那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$是事件 A 的概率.

5. 条件概率的定义

设 A 与 B 是两个随机事件,其中 $P(B)>0$,规定

$$P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

在同一条件下,条件概率具有概率的一切性质.

1.4 概率的计算公式

利用概率的公理化定义可推出下列概率计算公式:

1. 加法公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

一般地

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n}\sum P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n}\sum\sum P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{(有限可加性)}$$

2. 乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

当 A, B, C 相互独立时,$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

3. 求逆公式

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

4. 求差公式

$$P(A-B) = P(A) - P(AB)$$

特别,当 $B \subset A$ 时,有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

关于条件概率有相同的计算公式,如

$$P(\overline{A} \mid D) = 1 - P(A \mid D)$$

$$P((A-B) \mid D) = P(A \mid D) - P(AB \mid D)$$

$$P((A+B+C)\mid D)=P(A\mid D)+P(B\mid D)+P(C\mid D)-P(AB\mid D)-P(AC\mid D)-P(BC\mid D)+P(ABC\mid D)$$

1.5 全概率公式和贝叶斯公式

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$；

(2) $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$.

则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成了 Ω 的一个划分.

定理 如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成 Ω 的一个划分,则对任一事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

该公式称为**全概率公式**.

定理 如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成 Ω 的一个划分,则对任意事件 $B(P(B)>0)$,在事件 B 发生条件下事件 A_j 发生的条件概率为

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

该公式称为**贝叶斯公式**.

1.6 随机事件的相互独立性

定义 如果随机事件 A,B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

称**事件** A 和 B **相互独立**.

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足对任意两个事件 A_i,A_j 有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad(i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n)$$

称**事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立**.

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,对任意 $k(1<k\leqslant n),1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$.有

$$P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$$

成立.则称**事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立**.

定理 如果 $P(A)>0$(或 $P(B)>0$).则事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$(或 $P(A|B)=P(A)$).

定理 事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是下面三个之一:

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$;

(2) 当 $0<P(A)<1$, $P(B)>0$ 时,

$$P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A});$$

(3) 当 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$ 时,

$$P(B \mid A) + P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 1.$$

定理 若事件 A 和 B 相互独立,则

(1) 事件 A 与事件 $\overline{B}$ 也相互独立;

(2) 事件 $\overline{A}$ 与事件 B 也相互独立;

(3) 事件 $\overline{A}$ 与事件 $\overline{B}$ 也相互独立.

1.7 随机试验的相互独立性,伯努利概型

定义 对于随机试验 $E_i(i=1,\cdots,n)$,设 A_i 是随机试验 E_i 中任一随机事件,如果

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

则称**随机试验** $E_i(i=1,\cdots,n)$是**相互独立**的.

如果在一次随机试验中,仅关心随机事件 A 是否发生,即只考虑 A 和 $\overline{A}$ 两个试验结果,称这种试验为**伯努利试验**.如果重复独立进行 n 次伯努利试验,将它们合在一起称为 **n 重伯努利试验**.

定理 设在一次伯努利试验中事件 A 发生的概率为 p,则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生(用 μ 表示)k 次的概率为

$$P(\mu = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0,1,\cdots,n) \tag{1-3}$$

由关系式(1-3)计算概率的数学模型称为**二项概型**,二项概型也称为**伯努利概型**或**独立试验序列概型**.

三、典型例题分析

1.1 样本空间与随机事件

例 1 设 E_1 为从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)之中任取 3 件,观察其中次品的件数.记 ω_i 为恰有 i 件次品($i=0,1,2$),于是 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 设 E_2 为在相同条件下接连不断地向一个目标射击,直到击中目标为止,观察射击次数.记 ω_i 为射击 i 次($i=1,2,\cdots$),于是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 3 设 E_3 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过,乘客对于列车通过该站的时间完全不知道,观察乘客候车的时间.记乘客的候车时间为 ω.显然有 $\omega\in[0,5)$,即 $\Omega=[0,5)$.

例 4 写出下列随机试验的样本空间 Ω:

(1) 同时掷两枚骰子,记录两枚骰子点数之和;

(2) 10 件产品中有 3 件是次品,每次从中取 1 件,取出后不再放回,直到 3 件次品全部取出为止,记录抽取的次数;

(3) 生产某种产品直到得到 10 件正品,记录生产产品的总件数;

(4) 将一尺之棰折成三段,观察各段的长度.

解 (1) $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$;

(2) $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$;

(3) $\Omega=\{10,11,\cdots\}$;

(4) 设 x,y,z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度,有

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}.$$

评注 通过上面的几个例子可以看出,随机试验大体可以分成只有有限个可能结果的(如 E_1);有可列个可能结果的(如 E_2)和有不可列个可能结果的(如 E_3)这样三种情况.

应该说明的是,一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的.另外,一个随机试验的条件有的是人为的,有的是客观存在的.在后一种情况下,每当试验条件实现时,人们便会观测到一个结果 ω.虽然我们无法事先准确地说出试验的结果,但是能够指出它出现的范围 Ω.因此,我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含义的.

1.2 事件的关系与运算

例 5 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________.（2000 年数学一）

答案是： $\frac{2}{3}$.

分析 本题主要考查"**事件的关系与运算**".

由题设，可知 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立，有 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9}$. 又因为 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$，故

$$P(A)=P(B),\quad P(\overline{A})=P(\overline{B})=\frac{1}{3},$$

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{2}{3}$.

例 6 如果事件 A,B,C 两两互不相容，$A+B+C=\Omega$，则 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 与 Ω 的关系为________；$\overline{A}\ \overline{B}$ 与 $\varnothing$ 的关系为________.

答案是： 相等，包含.

分析 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{A}\ \overline{B}=\overline{A+B}$. 由于 $A+B+C=\Omega$，因此 $A+B\subset\Omega$，$\overline{A+B}=\Omega-(A+B)\supset\varnothing$，即 $A+B+C$ 与 Ω 是相等关系，$\overline{A}\,\overline{B}$ 与 $\varnothing$ 是包含关系. 也就是说 $\overline{A}\ \overline{B}$ 不一定是不可能事件 $\varnothing$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不一定互不相容，对于 $\overline{A}$ 与 $\overline{C}$，$\overline{B}$ 与 $\overline{C}$ 也是同样.

评注 两个对立事件 A 与 B，它们的对立事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 一定也是对立事件. 但是两个以上事件 $A_1,\cdots,A_n(n>2)$ 构成的完备组，它们的对立事件 $\overline{A}_1,\cdots,\overline{A}_n$ 一般不是一个完备组.

例 7 随机事件 A 与 B 互不相容，且 $A=B$，则 $P(A)=$________.

答案是： 0.

分析 由于 $A=B$，于是有 $AB=A=B$，又由于 A 与 B 互不相容，因此 $AB=\varnothing$ 即 $A=B=\varnothing$. 所以 $P(A)=0$.

评注 从此例我们得出的结论是：两个互不相容的事件如果相等，则它们一定都是不可能事件.

例 8 假设 A,B 是两个随机事件，且 $AB=\overline{A}\ \overline{B}$，则 $A+B=$________，$AB=$________.

答案是： Ω，$\varnothing$.

分析 由于 $A+B$ 与 $\overline{A+B}$ 互不相容，于是 $A+B$ 与 $\overline{A}\ \overline{B}$ 互不相容，但是 $A+B\supset AB$. 因此有 AB 与 $\overline{A}\ \overline{B}$ 互不相容，又因 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$. 从上例可知 $AB=\overline{A}\ \overline{B}=\varnothing$，因此 $A+B=\Omega$. 即 A 与 B 为对立事件.